Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ota Setzer

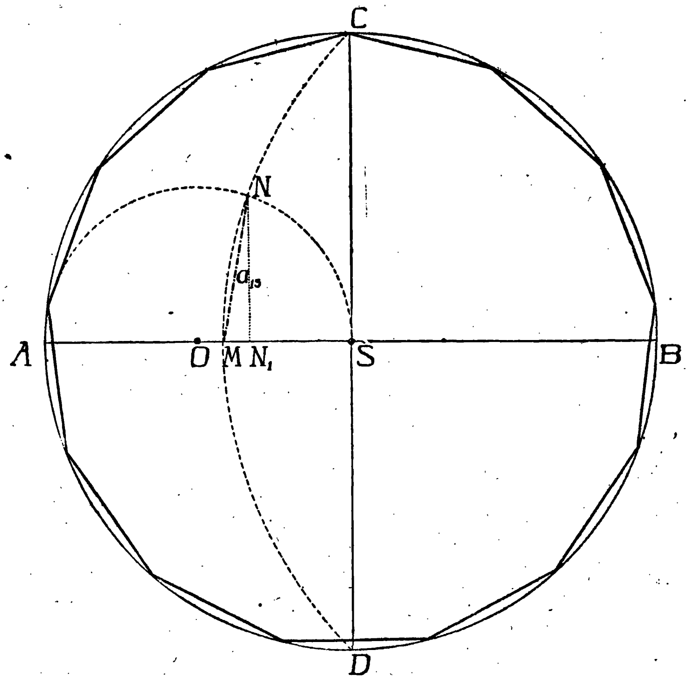
K problému normál středových kuželoseček

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 5, R95--R99

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121723

Plyne, že

$$MN_1 = \frac{r}{3}\sqrt{2}, \quad ON_1 = \frac{r}{6}, \quad MN_1 = \frac{r}{3}(3\sqrt{2} - 4)$$



a proto

$$a_{13} = \frac{2}{3} r \sqrt{3(3 - 2\sqrt{2})} = 0{\cdot}47836 \cdot r.$$

Liší se tedy výsledky od sebe až na čtvrtém desetinném místě a předčí proto udaná konstrukce svou přesností známá sestrojení stran pravidelných sedmi-, devíti-, nebo jedenácti-úhelníků.

K problému normál středových kuželoseček.

Prof. *Ota Setzer*, Kralupy n. Vlt.

I. Problém normál, t. j. úloha vésti z daného bodu normály k dané středové kuželosečce, řeší se zpravidla pomocnou rovnoosou hyperbolou *Apolloniovou*, v jejíchž průsečících s danou kuželosečkou jsou paty hledaných normál.[1]) Tento způsob je zdlouhavý v případě, že máme vésti normály k téže kuželosečce z různých bodů roviny. Tu je lépe, postupujeme-li takto:

V libovolném bodě B_1 (x_1, y_1) středové kuželosečky:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

sestrojíme normálu n_1, jejíž rovnice jest:

$$y - y_1 = \pm \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1). \tag{2}$$

Průsečíky této normály s osami souřadnými buďte $X(\bar{x}, 0)$, $Y(0, y^*)$:

$$\bar{x} = \frac{e^2}{a^2}x_1, \quad y^* = \mp \frac{e^2}{b^2}y_1. \tag{3}$$

Polára k pólu (x_0, y_0) má rovnici:

$$b^2xx_0 \pm a^2yy_0 = a^2b^2. \tag{4}$$

Poláry k bodům X, Y jsou podle (4):

$$x = \frac{a^4}{e^2x_1}, \quad y = -\frac{b^4}{e^2y_1}, \tag{5}$$

t. j. přímky rovnoběžné s osami souřadnými. V jejich průsečíku (x, y) jest pól normály n_1. Vyloučíme-li z rovnic (5), určujících souřadnice x, y tohoto pólu a z rovnice:

$$b^2x_1^2 \pm a^2y_1^2 = a^2b^2 \tag{6}$$

parametry x_1, y_1, dostáváme po snadné úpravě:

$$\pm b^6x^2 + a^6y^2 = e^4x^2y^2, \tag{7}$$

což jest rovnice geometrického místa G pólů normál dané kuželosečky.

Sestrojíme-li jednou pro vždy k dané kuželosečce příslušnou křivku G 4. stupně, stačí k bodům, z nichž máme vésti normály, sestrojiti poláry, vyšetřiti jejich 4 průsečíky s křivkou G a k nim odvoditi poláry, jež jsou již hledanými normálami.

Křivkou G lze řešiti i jiný zajímavý problém, k němuž nutno odvoditi určitou větu pro rovnici 4. stupně.

II. Hledejme podmínku, aby kořeny rovnice:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \tag{8}$$

tvořily harmonickou čtveřinu.

---

[1]) Viz *Bydžovský:* „Úvod do analytické geometrie", str. 218, též *Kadeřávek-Klíma-Kounovský:* „Deskr. geometrie", I. d., str. 55.

O kořenech rovnice (8) platí:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{B}{A}, \tag{9a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{C}{A}, \tag{9b}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{D}{A}, \tag{9c}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{E}{A}. \tag{9d}$$

Naše podmínka zní:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = -\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}, \tag{10}$$

což po úpravě dává:

$$2 \cdot (x_1x_2 + x_3x_4) = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4; \tag{11}$$

přihlížíme-li k (9*b*), dostaneme:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{C}{3A}. \tag{12}$$

K rovnici (9*a*) umocněné dvěma přičtěme čtyřnásobnou rovnici (12) zmenšenou o čtyřnásobnou rovnici (9*b*):

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = \frac{9B^2 - 24AC}{9A^2}; \tag{13}$$

označme:

$$9B^2 - 24AC = P^2; \tag{13a}$$

po odmocnění:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \pm \frac{P}{3A} \tag{14}$$

a vzhledem k (9*a*):

$$x_1 + x_2 = \frac{\pm P - 3B}{6A}, \quad x_3 + x_4 = \frac{\mp P - 3B}{6A}. \tag{15}$$

Snadno se přesvědčíme, že všechny další výpočty pro horní znaménka při P vedou k týmž výsledkům jako pro znaménka dolní, od nichž nadále upustíme.

Rovnici (9*c*) lze psáti ve tvaru:

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\frac{D}{A}; \tag{16}$$

dosadíme-li sem za výrazy v závorkách hodnoty (15), máme po substituci: $x_1x_2 = u$, $x_3x_4 = v$:

$$\left.\begin{aligned}(3B + P) \,.\, u + (3B - P) \,.\, v &= 6D \\ u \,.\, v &= \frac{E}{A}\end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Soustava (17) má řešení:

$$u_{1,2} = \frac{3D \pm Q}{3B + P}, \quad v_{1,2} = \frac{E \,.\, (3B + P)}{A \,.\, (3D \pm Q)}, \tag{18}$$

kde: $$Q^2 = 9D^2 - 24C \,.\, E. \tag{19}$$

Usměrníme-li kořeny u, v, máme:

$$\left.\begin{aligned}u_{1,2} &= \frac{9BD - 3DP \pm 3BQ \mp PQ}{24AC} \\ v_{1,2} &= \frac{9BD + 3DP \mp 3BQ \mp PQ}{24AC}\end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

Tyto výsledky dosaďme do (12):

$$u + v = \frac{C}{3A}, \quad \frac{18BD \mp 2PQ}{24 \,.\, AC} = \frac{C}{3A}. \tag{21}$$

Osamocením odmocnin P, Q, umocněním dvěma a snadnou úpravou dospíváme k výsledku:

$$2C^3 + 27AD^2 + 27B^2E - 9BCD - 72ACE = 0. \tag{22}$$

Relace (22) je podmínka pro to, aby kořeny rovnice (8) tvořily harmonickou čtveřinu.

III. Hledejme nyní geometrické místo Σ bodů (ξ, η), z nichž vedené normály ke středové kuželosečce tvoří harmonickou čtveřinu. Svazek polár jest projektivní s příslušnou řadou pólů.[2]) Mají-li tedy normály z bodu (ξ, η) vedené tvořiti harmonickou čtveřinu, musí také póly těchto normál (ležící na poláře π bodu (ξ, η) a na křivce G) tvořiti harmonickou čtveřinu; protože však dvojpoměr čtyř bodů přímky se promítáním nemění,[3]) musí i úsečky těchto pólů míti dvojpoměr $= -1$.

Polára π má rovnici:

$$b^2x\xi \pm a^2y\eta = a^2b^2. \tag{23}$$

Její průsečíky s křivkou G vyhovují rovnicím (7) a (23). Z (23) plyne:

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2\eta} (a^2 - x\xi); \tag{24}$$

---

[2]) Viz *E. Weyr:* „Projekt. geom. zákl. útvarů 1. řádu", str. 118.
[3]) Viz *Jarolímek-Procházka:* „Deskr. geom. pro vys. šk. techn.", str. 99.

dosazeno do (7) dá po zkrácení a uspořádání podle mocnin x:

$$e^4\xi^2x^4 - 2a^2e^4\xi x^3 + a^4 . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2) . x^2 + 2a^8\xi x - a^{10} = 0. \quad (25)$$

Užijme nyní podmínky (22)! V našem případě jest:

$$A = e^4\xi^2, \; B = -2a^2e^4\xi, \; C = a^4 . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2),$$
$$D = 2a^8\xi, \; E = -a^{10}.$$

Tím se změní (22) na:

$$2a^{12} . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2)^3 + 108\, a^{16}e^4\xi^4 + 36a^{14}e^4\xi^2 (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2) - 108\, a^{14}e^8\xi^2 + 72a^{14}e^4\xi^2 . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2) = 0;$$

krátíme-li $2 . a^{12}$ a sloučíme-li pokud možno, obdržíme výsledný tvar rovnice křivky Σ:

$$(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - e^4)^3 \pm 54a^2b^2e^4\xi^2\eta^2 = 0. \quad (26)$$

Rovnice (26) se velmi podobá rovnici evoluty středové kuželosečky, jež má tvar:

$$(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - e^4)^3 \pm 27a^2b^2e^4\xi^2\eta^2 = 0. \quad (27)$$ [4]

Odtud lze dokázati, že naše křivka Σ pro středovou kuželosečku leží celá uvnitř příslušné evoluty, považujeme-li střed elipsy (hyperboly) za vnitřní (vnější) bod evoluty.

Poznámky o trojúhelníku.

Dr. *Jan Schuster.*

1. Sestrojování obecných bodů v trojúhelníku prováděno jednak dělicími poměry nebo specielními konstrukcemi, jež pak dají řadu význačných bodů charakteristických.

V následujících řádcích podám jednoduchý způsob, který se hodí stejně pro určení obecných bodů jako bodů význačných.

Princip metody je vektorové sčítání. Představme si totiž, že v jedné straně, třeba BC, naneseme od vrcholů B a C protivně, buď ven nebo dovnitř dva stejné, protivné vektory $+m$ a $-m$. Když je pojímáme jako síly, zruší se navzájem. Když pak stejně ve straně CA naneseme $+n$, $-n$ a ve straně AB zase $+p$ a $-p$, je celý systém 6 sil v rovnováze. Ale mysleme si nyní vždy dva vektory v témž vrcholu sečteny. Tím vzniknou tři síly, jejichž přímky se musí protnout v témž bodě, a které musí zase dát touž nulovou výslednici.

---

[4]) Viz *Bydžovský* — tamtéž, str. 215—220.