Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Peter Scherk

Eine Bemerkung über Mengen natürlicher Zahlen

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 1, 31--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121730

Eine Bemerkung über Mengen natürlicher Zahlen.

Peter Scherk, Praha.

(Eingegangen am 10. Oktober 1938.)

$\mathfrak{M}_1$ bezw. $\mathfrak{M}_2$ sei eine Menge natürlicher Zahlen a bezw. b; $\mathfrak{M}_3$ sei die Menge aller c, die a oder $a + b$ sind. Es sei für $0 \leqq k \leqq l$

$$\left.\begin{matrix} E_1(k, l) \\ E_2(k, l) \\ E_3(k, l) \end{matrix}\right\} \text{ die Anzahl aller } \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} \text{ mit } k < \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} \leqq l \text{ (also 0 für } k = l).$$

$$E_n(x) = E_n(0, x) \text{ für } x \geqq 0,\ n = 1, 2, 3.$$

Ferner sei

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1,\ 0 \leqq \beta - \delta < 1;$$
$$E_1(x) \geqq \alpha x,\ E_2(x) \geqq \beta x + \delta \text{ für alle } x > 0.$$

Dann ist für alle $x > 0$

$$E_3(x) \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{\alpha + \delta}{1 - \beta + \delta}, \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta - \delta}, \alpha + \beta - \alpha(\beta - \delta)\right) . x. \quad (1)$$

Der Fall $\delta = 0$ enthält Sätze von Schur[1]) und Landau.[2]) Herr Besicovitch[3]) hat den Fall $\delta = \beta$ bewiesen. Sein Verfahren langt zum Beweis von (1).

Er betrachtete folgende Kette natürlicher Zahlen: $m_0 + 1 = 1$; $k_0 + 1 =$ kleinste nicht in $\mathfrak{M}_3$ liegende ganze Zahl hinter $m_0 + 1$; $m_1 + 1 =$ kleinstes $a > k_0 + 1$; $k_1 + 1 =$ kleinste nicht in $\mathfrak{M}_3$ liegende ganze Zahl hinter $m_1 + 1$ u. s. f. Er zeigte: Ist für ein $i \geqq 0$ die Zahl k_i definiert (also auch die Zahl m_{i+1}), so gilt für jedes x mit $k_i < x \leqq m_{i+1}$:

$$E_3(m_i, x) \geqq E_1(m_i, x) + E_2(x - m_i - 1),$$

insbesondere

$$E_3(m_i, m_{i+1}) \geqq E_1(m_i, m_{i+1}) + E_2(m_{i+1} - m_i - 1).$$

Summation ergibt:

$$\begin{aligned} E_3(x) &= E_3(m_1) + E_3(m_1, m_2) + \ldots + E_3(m_{i-1}, m_i) + E_3(m_i, x) \\ &\geqq E_1(m_1) + E_1(m_1, m_2) + \ldots + E_1(m_{i-1}, m_i) + E_1(m_i, x) \\ &\quad + E_2(m_1 - 1) + E_2(m_2 - m_1 - 1) + \ldots + \\ &\quad + E_2(m_i - m_{i-1} - 1) + E_2(x - m_i - 1) \\ &= E_1(x) + E_2(m_1 - 1) + E_2(m_2 - m_1 - 1) + \ldots \\ &\qquad + E_2(m_i - m_{i-1} - 1) + E_2(x - m_i - 1); \end{aligned}$$

---

[1]) Schur: Über den Begriff der Dichte in der additiven Zahlentheorie. Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. 1936, S. 269ff.

[2]) Landau: Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz. Gött. Nachr. 1930, S. 255ff.

[3]) Besicovitch: On the density of the sum of two sequences of integers. Journ. London Math. Soc. 10 (1935), S. 246ff.

$$\begin{aligned} E_3(x) &\geqq E_1(x) + (\beta(m_1 - 1) + \delta) + (\beta(m_2 - m_1 - 1) + \delta) \\ &+ \ldots + (\beta(m_i - m_{i-1} - 1) + \delta) + (\beta(x - m_i - 1) + \delta) \\ &= E_1(x) + \beta x - (\beta - \delta) . (i + 1). \end{aligned}$$

Nun gilt 1. $i + 1 \leqq x - E_3(x)$; denn keine der $i + 1$ Zahlen

$$k_0 + 1, k_1 + 1, \ldots, k_i + 1$$

liegt in $\mathfrak{M}_3$, und die Anzahl dieser Zahlen ist höchstens gleich der Anzahl aller nicht in $\mathfrak{M}_3$ gelegenen Zahlen $\leqq x$, d. h. höchstens gleich $x - E_3(x)$. Daher haben wir

$$E_3(x) \geqq \alpha x + \beta x - (\beta - \delta)(x - E_3(x))$$

oder

$$E_3(x)(1 - \beta + \delta) \geqq (\alpha + \delta) . x.$$

2. $i + 1 \leqq E_3(x)$; denn die $i + 1$ Zahlen

$$m_0 + 1, m_1 + 1, \ldots, m_i + 1$$

liegen in $\mathfrak{M}_3$, sogar in $\mathfrak{M}_1$. Also

$$E_3(x) \geqq \alpha x + \beta x - (\beta - \delta) . E_3(x)$$

oder

$$E_3(x)(1 + \beta - \delta) \geqq (\alpha + \beta) . x.$$

3. $i + 1 \leqq E_1(x)$; also

$$\begin{aligned} E_3(x) &\geqq E_1(x) + \beta x - (\beta - \delta) . E_1(x) = \\ &= E_1(x)(1 - \beta + \delta) + \beta x \geqq (\alpha(1 - \beta + \delta) + \beta) . x. \end{aligned}$$

Die Behauptung (1) gilt somit für alle x mit $k_i < x \leqq m_{i+1}$.

Sie ist richtig für $x = 1$; ist (1) mit $x - 1$ statt x schon bewiesen und gilt $x \subset \mathfrak{M}_3$, so ist der Induktionsschluß trivial. Denn die linke Seite von (1) wächst dann bei Übergang von $x - 1$ zu x um Eins, die rechte um weniger. Liegt x aber nicht in $\mathfrak{M}_3$, so in einem Intervall $k_i < x \leqq m_{i+1}$.

*

Poznámka o množinách přirozených čísel.

(Obsah předešlého článku.)

$\mathfrak{M}_1$ resp. $\mathfrak{M}_2$ budiž množina přirozených čísel a resp. b. Budiž $\mathfrak{M}_3$ množina všech čísel, jež jsou buďto a nebo $a + b$. $E_i(x)$ budiž počet oněch čísel z $\mathfrak{M}_i$, jež jsou $\leqq x$. Budiž $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, $0 \leqq \beta - \delta < 1$,

$$E_1(x) \geqq \alpha x, \; E_2(x) \geqq \beta x + \delta$$

pro všechna celá $x > 0$. Potom platí nerovnost (1) pro všechna celá $x > 0$.