Bohuslav Hostinský
O projektivní definici úhlu dvou rovin

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 5, 474--479

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121737

$\overline{b^1 b}$ a středu křivosti s_E rychlost výslednou $\overline{c'\,^3c'}$, kterou se bod c' při pohybu přímek O a O' jakožto tečen křivek E a E' pohybuje.

Z rychlosti $\overline{a'\,^3a'}$ a $\overline{k\,^3k}$, (kterou týmž způsobem jako ve článku předcházejícím sestrojíme,) najdeme rychlost $\overline{v\,^1v}$ bodu v z tohoto složitého pohybu přímky $a'k$ vyplývající. Stejně stanovíme z rychlostí $\overline{c'\,^3c'}$ a $\overline{l\,^2l}$ rychlost $\overline{v\,^2v}$ odpovídající složitějšímu pohybu přímky $c'l$.

Poněvadž i přímky $a'a$ a $c'c$ v bodě f se protínající na základě pohybů bodů a' a c' s rychlostmi $\overline{a'\,^3a'}$ a $\overline{c'\,^3c'}$ konaných v tomto případě složitěji se pohybují, jest nutno také rychlosti $\overline{f\,^1f}$ a $\overline{f\,^2f}$ znova sestrojovati.

Sestrojivše na konec výsledné rychlosti $\overline{v\,^3v}$ a $\overline{f\,^3f}$ bodů v a f pokračujeme v dalším při sestrojování středu křivosti křivky M právě tak, jako ve článku předcházejícím.

O projektivní definici úhlu dvou rovin.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. Metrické vlastnosti geometrických útvarů jest možno interpretovati jako vlastnosti polohy ve smyslu projektivní geometrie, zkrátka redukovati je na dvojpoměry, které jsou určeny vztahem útvarů daných k t. zv. útvaru absolutnímu.

V Euklidově geometrii dospějeme k takové interpretaci zavedením Ponceletovy absolutní kružnice (Σ), která má v každé soustavě pravoúhlých souřadnic homogenních (x, y, z, t) rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0. \qquad (\Sigma)$$

V následujícím jde o definici úhlu φ dvou rovin α a β, založenou na vztahu těch rovin k (Σ); místo známé definice Laguerreovy (I) lze zavésti ekvivalentní definici (II).

2. Za tím účelem jest výhodno odvoditi parametrické vyjádření bodů na kružnici (Σ). Jsou-li všechny komplexní hodnoty proměnného parametru λ (inklusive $\lambda = \infty$) ve vzájemně jednoznačném vztahu s body ležícími na (Σ), shoduje se toto vyjádření s parametrickým vyjádřením povrchových přímek na

t. zv. isotropickém kuželi, který vznikne centrální projekcí kružnice (Σ) z libovolného bodu O prostoru; každé hodnotě λ parametru odpovídá jistý bod A na (Σ) a přímka OA na isotropickém kuželi.

Volíme-li vrchol tohoto kužele v počátku pravoúhlé soustavy, jest jeho rovnice patrně

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0; \tag{1}$$

neboť to jest rovnice kužele 2. st., jenž má vrchol v O a protíná nekonečně vzdálenou rovinu v kružnici (Σ). Rovnice povrchových přímek na (1) jsou

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= \lambda z \\ \lambda(x - iy) &= -z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Každé hodnotě parametru λ odpovídá jedna taková „isotropická" přímka kužele (1) a naopak; v rovinách souřadných leží tyto isotropické přímky: v rovině $z = 0$

$$x + iy = 0, \ (\lambda = 0) \text{ a } x - iy = 0, \ (\lambda = \infty),$$

v rovině $x = 0$

$$y + iz = 0, \ (\lambda = 1) \text{ a } y - iz = 0, \ (\lambda = -1),$$

v rovině $y = 0$

$$z + ix = 0, \ (\lambda = i) \text{ a } z - ix = 0, \ (\lambda = -i).$$

Vůbec protíná každá rovina α vrcholem O vedená kužel (1) ve dvou přímkách směřujících od O k isotropickým bodům roviny α, t. j. jejím průsečíkům s kružnicí (Σ).

3. První definici úhlu založenou na pojmech projektivní geometrie podal *Laguerre*. Budiž φ úhel sevřený dvěma danými rovinami α a β; dvojpoměr δ, který určují tyto roviny s oběma rovinami τ, τ' svazku (α, β) dotýkajícími se kružnice (Σ), souvisí s úhlem φ dle rovnice

$$\delta = (\alpha, \beta, \tau, \tau') = e^{2i\varphi}. \tag{I}$$

K důkazu volme počátek O soustavy souřadné v libovolném bodě průsečné přímky p obou rovin; osa Oy nechť splývá s p a jedna z daných rovin na př. α s rovinou souřadnou (xy):

$$\alpha \equiv z = 0, \tag{3}$$

tak že má druhá daná rovina β rovnici

$$\beta \equiv z = x \, . \, tg \, \varphi. \tag{4}$$

Roviny τ a τ' mají rovnice

$$z = -ix, \text{ resp. } z = ix,$$

neboť jejich průsekem s kuželem (1) prochází dvojnásobná rovina $y^2 = 0$; jsou to tečné roviny kužele (1) a zároveň kružnice (Σ).

Čtyři roviny, o které se jedná, mají tedy ve svazku, jehož osou jest p, parametry o, $tg\,\varphi$, $-i$, i; jejich dvojpoměr jest

$$\delta = (o, tg\,\varphi, -i, i) = \frac{i}{tg\,\varphi + i} : \frac{-i}{tg\,\varphi - i}$$
$$= \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = e^{2i\varphi}.$$

4. Jiný tvar předchozí definice:

Jsou-li A, A' kruhové body roviny α, B, B' kruhové body roviny β a Δ dvojpoměr těchto čtyř bodů na absolutní kružnici, jest úhel φ obou rovin určen vztahem

$$\Delta = (A, A', B, B') = -tg^2\frac{\varphi}{2}. \tag{II}$$

Důkaz: Dvojpoměr Δ jest identický s dvojpoměrem čtyř hran a, a', b, b' isotropického kužele, kterými se promítají body A, A', B, B' z libovolného bodu O. Budiž střed kužele O počátkem soustavy souřadné, kterou volíme jako v předchozím odstavci 3. Přímky a, a' jsou průseky roviny (3) s kuželem (1), tedy mají dle odst. 2. parametry $\lambda = 0$, resp. ∞.

Přímky b, b' jsou průseky roviny (4) s kuželem (1); po úpravě jejich rovnic na normální tvar (2) obdržíme, kladouce pro stručnost $tg\,\varphi = k$

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= z\,.\,\frac{1-\sqrt{1+k^2}}{k} \\ (x - iy)\frac{1-\sqrt{1+k^2}}{k} &= -z, \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= z\,\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k} \\ (x - iy)\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k} &= -z. \end{aligned}\right\} \tag{b'}$$

Hodnoty parametru λ jsou tedy

$$\frac{1-\sqrt{1+k^2}}{k}, \quad \frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}.$$

Z toho plyne, že

$$\Delta = (A, A', B, B') = (a, a', b, b')$$

$$= \left(0, \infty, \frac{1-\sqrt{1+k^2}}{k}, \frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}\right) = \frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi + 1} = -tg^2\frac{\varphi}{2}.$$

Rovnicemi (I) a (II) není úhel φ určen jednoznačně; i když vytkneme pořadí rovin α a β, můžeme právě tak jako δ zavésti do (I) dvojpoměr $(a, b, \tau', \tau) = \frac{1}{\delta}$ a do (II) místo Δ dvojpoměr $(A, A', B', B) = (A', A, B, B') = \frac{1}{\Delta}$. Snadnou úvahou dokáže se, že všechny hodnoty úhlu, ku kterým jsme vedeni, ať užíváme definice (I) nebo (II), jsou (nehledíme-li k celistvým násobkům 2π) $\pm\varphi$, $\pi \pm \varphi$.

5. Za příklad pro užití rovnice (II) volme řešení úlohy: ustanoviti sklon φ kruhových řezů plochy druhého stupně

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Svazek rovnoběžných rovin, o kterých předpokládáme, že protínají plochu v kruzích, má za osu jistou přímku a v rovině nekonečně vzdálené. Tato přímka protíná absolutní kružnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad (\Sigma)$$

v kruhových bodech A, A', které leží dle předpokladu zároveň na dané ploše a tedy na kuželosečce

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \qquad (S)$$

ve které plochu protíná rovina nekonečně vzdálená; a spojuje dva z průsečných bodů čar (S) a (Σ). Z toho plyne, že libovolným bodem na př. středem plochy prochází šest kruhových řezů; roviny těch řezů protínají nekonečně vzdálenou rovinu v šesti stranách úplného čtyrrohu, jehož rohy A, A', B, B' jsou průseky čar (S) a (Σ). Omezíme-li se při výpočtu úhlu φ toliko na páry rovin procházejících osami, tak že dvě takové roviny protínají (Σ) vždy ve čtyřech různých bodech, dostačí uvažovati toliko páry protějších stran v čtyrrohu $AA'\,BB'$. Souřadnice

$\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ těchto bodů obdržíme řešením rovnic (S) a (Σ); vychází

$$A(r, s); \quad A'(-r, -s); \quad B(r, -s); \quad B'(-r, s),$$

píšeme-li

$$\left|\sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1}}\right| = r, \quad \left|\sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_1}}\right| = s.$$

Parametry jejich na kružnici absolutní určíme z první rovnice (2), dle které jest

$$\lambda = \frac{x}{z} + i\,\frac{y}{z}.$$

Tak obdržíme

$$A(\lambda = r + is), \ A'(-r - is), \ B(r - is), \ B'(-r + is);$$

úhel φ dvou rovin jdoucích přímkami $a \equiv \overline{AA'}$, resp. $b \equiv \overline{BB'}$ jest dle (II) určen rovnicí

$$tg^2 \frac{\varphi}{2} = -(AA'BB')$$

$$= -\frac{(r + is) - (r - is)}{(-r - is) - (r - is)} : \frac{(r + is) - (-r + is)}{(-r - is) - (-r + is)}$$

$$= \frac{s^2}{r^2} = \frac{a_1 - a_3}{a_3 - a_2},$$

a tedy $tg \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_3 - a_2}}$, což jest známý vzorec pro sklon kruhových řezů procházejících osou Oz. Cyklickou záměnou konstant a_1, a_2, a_3 obdržíme vzorce pro sklon kruhových řezů vedených osou Ox a z tohoto vzorec pro sklon kruhových řezů třetího páru vedených osou Oy.

6. Eliminace úhlu φ z rovnic (I) a (II) vede k relaci mezi Δ a δ, kterou můžeme psáti ve dvou ekvivalentních formách:

$$\Delta = \left(\frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}}\right)^2. \tag{5a}$$

aneb

$$\delta = \left(\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{1 - \sqrt{\Delta}}\right)^2. \tag{5b}$$

Tento výsledek připouští interpretaci zcela obecného rázu, ačkoliv byly rovnice (I) a (II) odvozeny toliko pro absolutní kružnici (Σ).

Vytkneme li totiž v prostoru libovolnou kuželosečku (Σ_1), můžeme vždy nalézti kollineaci, která převádí (Σ) v (Σ_1). Při téže transformaci přejdou body A, A', B, B' v body A_1, A'_1, B_1, B'_1 položené na (Σ_1) a roviny α, β, τ, τ' v roviny α_1, β_1, τ_1, τ'_1; poslední dvě dotýkají se kuželosečky (Σ_1) a patří svazku určenému rovinami α_1, β_1.

Dvojpoměry Δ a δ jsou vůči kollineaci invariantní; roviny α_1, β_1 můžeme předpokládati v obecné poloze ku (Σ_1), poněvadž poloha rovin α, β ku (Σ) nepodléhá žádnému omezení. Máme tedy větu:

V každém svazku rovin určují dvě libovolné jeho roviny α, β s rovinami svazku τ, τ', které se dotýkají dané kuželosečky, dvojpoměr $\delta = (\alpha, \beta, \tau, \tau')$, jenž souvisí s dvojpoměrem $\Delta = (A, A', B, B')$ bodů A, A'; B, B' na dané kuželosečce, vyťatých rovinami α, resp. β, rovnicí

$$\Delta = \left(\frac{1-\sqrt{\delta}}{1+\sqrt{\delta}}\right)^2, \quad \text{aneb} \quad \delta = \left(\frac{1+\sqrt{\Delta}}{1-\sqrt{\Delta}}\right)^2.$$

Z rovnice (5[a]) plyne, že se Δ nezmění, přejde-li δ v $\frac{1}{\delta}$, což nastane, zaměníme-li buď α a β aneb τ s τ'. Naproti tomu změní se Δ v $\frac{1}{\Delta}$, obrátíme-li znamení při $\sqrt{\delta}$; tato změna, jež odpovídá permutaci A s A' nebo B s B', nastává nutně, poněvadž sestrojením rovin α a β není v párech bodových A, A' a B, B' dán pořádek prvků.

Podobně shledáváme, že se δ nezmění, přejde-li Δ v $\frac{1}{\Delta}$; neboť tu se permutují toliko buď body A, A' v rovině α aneb B, B' v β. Opět však přejde δ v $\frac{1}{\delta}$, píšeme-li v (5[b]) $-\sqrt{\Delta}$ místo $\sqrt{\Delta}$; tato neurčitost v hodnotě dvojpoměru δ se vysvětluje patrně tím, že není ustanoveno, kterou z tečných rovin kuželosečky máme označiti jako τ a kterou jako τ'.