Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

M. Smok

Stanovení rovnovážné polohy při harmonickém pohybu tlumeném z n pozorování

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 5, 484--497

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121739`

Stanovení rovnovážné polohy při harmonickém pohybu tlumeném z n pozorování.

Podává dr. Mik. Šmok.

Při běžných případech se žádá obyčejně řešiti uvedenou úlohu jen pro nejjednodušší případy $n = 3, 4, 5$ *); k obecnějšímu řešení se nepřihlíží, ač je nutné zvláště při přesnějších měřeních, chceme-li míti výsledek dle možnosti nejzaručenější, plynoucí ze všech učiněných pozorování.

I.

1. Mysleme si, že nám je dáno v jednotkách příslušné skály $n = 2k + 1$, tedy *lichý* počet pozorovaných, za sebou jdoucích bodů obratu, jež si označíme takto:

$$l_{-k}, \ldots l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \ldots l_k.$$

Hledané poloze rovnovážné odpovídej hodnota ξ. Zaveďme si pomocnou veličinu χ dle rovnice

$$\chi = l_0 - \xi;$$

jest to tedy amplituda prostředního kyvu l_0. Výchvěvy předcházející a následující dají se, jak známo, při harmonickém pohybu tlumeném vyjádřiti pomocí hodnoty χ a pomocí příslušného log. dekrementu σ dle zákona geometrické progresse s kvocientem $e^{-\sigma}$ v absolutních hodnotách takto:

$$\chi e^{k\sigma}, \ldots \chi e^{2\sigma}, \chi e^{\sigma}, \chi, \chi e^{-\sigma}, \chi e^{-2\sigma} \ldots \chi e^{-k\sigma},$$

a ježto směřují střídavě k protivným stranám, platí obecně

$$l_m = \xi + (-1)^m \chi e^{-m\sigma}$$
$$(m = -k, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots k).$$

Těchto rovnic by bylo $2k + 1$ tolik, kolik jest pozorování. Neznámé však jsou pouze tři ξ, χ, σ, z nichž my chceme sta-

---

*) Viz na př.: Strouhal, Mechanika, 1901 pag. 233 atd.; Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte, 1898, pag. 108 až 117, a j.

noviti toliko prvou ξ. Úlohou naší bude, ze *všech* — ne jen ze tří — pozorování najíti pro ξ hodnotu pravdě nejpodobnější.

To vyžaduje dle methody nejmenších čtverců, aby

$$\sum_{m=-k}^{m=k} (l_m - \xi - (-1)^m \chi e^{-m\sigma})^2 = min.$$

Součet ten bude minimem, budou-li neznámé ξ, χ a σ tak stanoveny, aby

$$\delta\xi \, . \, \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} = 0,$$

$$\delta\chi \, . \, \frac{\partial \Sigma}{\partial \chi} = 0,$$

$$\delta\sigma \, . \, \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma} = 0.$$

Provedeme-li differenciaci a vypustíme všecky faktory různé od nully — zvláště variace $\delta\xi$, $\delta\chi$, $\delta\sigma$, obdržíme následující tři rovnice

$$\left.\begin{aligned} &\sum_m (l_m - \xi - (-1)^m \chi \, . \, e^{-m\sigma}) = 0, \\ &\sum_m (-1)^m e^{-m\sigma} (l_m - \xi - (-1)^m \chi \, . \, e^{-m\sigma}) = 0, \\ &\sum_m (-1)^m m \, . \, e^{-m\sigma} (l_m - \xi - (-1)^m \chi \, . \, e^{-m\sigma}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Naší úlohou jest vyloučiti z těchto rovnic χ a σ, resp. $e^{-\sigma}$. Vzhledem ku ξ a χ jsou uvedené rovnice lineárné, vzhledem k $e^{-\sigma}$ však vyššího stupně závislého na počtu provedených pozorování, tak že žádaná eliminace by byla obecně obtížnou.

Ve většině praktických případů bývá dekrement σ veličinou hodně malou; proto si možno počet usnadniti aspoň v prvém přiblížení tím, že užijeme přibližné hodnoty

$$e^{-m\sigma} = 1 - m\sigma,$$

to jest nahrazujeme geometrickou řadu amplitud řadou arithmetickou. Pak máme vlastně jen rovnice

$$\left.\begin{aligned} &\sum_m (l_m - \xi - (-1)^m \chi + (-1)^m m\sigma\chi) = 0, \\ &\sum_m ((-1)^m l_m - (-1)^m \xi - \chi + m\sigma\chi) = 0, \\ &\sum_m ((-1)^m m\, l_m - (-1)^m m\xi - m\chi + m^2\sigma\chi) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Při úpravě jich jsme přihlíželi zároveň k tomu, že součin

$$\sigma\left(l_m - \xi - (-1)^m \chi e^{-m\sigma}\right)$$

— součin log. dekrementu a rozdílu hodnoty theoretické a pozorované — je proti ostatním členům veličinou hodně malou, a že jej lze v prvém přiblížení tudíž zanedbávati.

Provedeme-li v příslušných mezích některé summace, shledáme, že

$$\left.\begin{aligned} &\sum_m +1 = 2k+1 \text{ (počet pozorování)} \\ &\sum_m (-1)^m = (-1)^k, \qquad \sum_m m = 0 \\ &\sum_m (-1)^m m = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Tím, že dvě z těchto summ se annullují, vymizejí z prvé a druhé rovnice členy obsahující σ, tak že ke třetí rovnici netřeba ani přihlížeti a další summace prováděti.

Prvé dvě rovnice pak dávají

$$(2k+1)\,\xi + (-1)^k \chi = \sum_m l_m$$

$$\xi + (-1)^k (2k+1)\,\chi = (-1)^k \sum_m (-1)^m l_m,$$

a z nich

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_m l_m + (-1)^k \sum_m (-1)^m l_m}{2(k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sum_m l_m - (-1)^k \sum_m (-1)^m l_m}{2k}\right).$$

Provedeme-li a sloučíme ještě naznačené součty, dostaneme jednoduchý výsledek:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{l_{-k} + l_{-k+2} + \ldots + l_{k-2} + l_k}{k+1}\right.$$

$$\left. + \frac{l_{-k+1} + l_{-k+3} + \ldots + l_{k-3} + l_{k-1}}{k}\right). \tag{4}$$

Při *lichém* počtu pozorování najdeme rovnovážnou polohu, stanovíme-li arithmetický střed pozorování každé strany. Arithmetický střed obou těchto průměrů je hledaná rovnovážná poloha.

Speciální případy jsou:

Pro $n = 3$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{l_{-1} + l_1}{2} + l_0\right).$$

Pro $n = 5$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{l_{-2} + l_0 + l_2}{3} + \frac{l_{-1} + l_1}{2}\right) \text{ atd.}$$

2. V témže přiblížení jako při lichém počtu pozorování budeme řešiti úlohu pro *sudý* počet pozorování.

Označme si $n = 2k$ pozorovaných bodů obratu takto:

$$l_{-k+1},\ l_{-k+2},\ \ldots\ l_{-1},\ l_0,\ l_1,\ \ldots\ l_{k-1},\ l_k.$$

Základní rovnice, k nimž bychom dospěli, jsou tytéž jako při počtu lichém, jedině nutno v jednotlivých součtech položiti meze $\sum\limits_{m=-k+1}^{m=k}$. Tím změní se i hodnoty oněch součtů.

Jest

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_m 1 = 2k \text{ (počet pozorování)} & \\ \sum\limits_m (-1)^m = 0 & \sum\limits_m m = k \\ \sum\limits_m (-1)^m m = (-1)^k k & \sum\limits_m m^2 = \dfrac{k(k^2+1)}{3} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Dostaneme tedy tyto rovnice:

$$\sum_m lm - 2k\xi + (-1)^k k\sigma\chi = 0,$$

$$\sum_m (-1)^m l_m - 2k\chi + k\sigma\chi = 0,$$

$$\sum_m (-1)^m m l_m - (-1)^k k\xi - k\chi + \frac{k(2k^2+1)}{3}\sigma\chi = 0.$$

K řešení dle ξ nutno upotřebiti všech tří rovnic.

Obdržíme

$$\xi = \frac{(4k^2-1)\sum\limits_m l_m + 3(-1)^k \sum\limits_m (-1)^m l_m - 6(-1)^k \sum\limits_m (-1)^m m l_m}{8k(k^2-1)}$$

Ve výraze tomto nutno rozvésti ještě naznačené součty a sloučiti. Výsledku možno dáti tvar

$$\xi = \frac{\sum\limits_{r=0}^{k-1} [(2k-1)(k-1)+6r]\,(l_{-k+1+2r}+l_{k-2r})}{4k(k^2-1)}. \qquad (6)$$

Dvojčlen $(l_{-k+1+2r}+l_{k-2r})$ obsahuje symmetrické členy, t. j. pozorování prvé a poslední, třetí a třetí od konce atd. až předposlední a druhé, každý pak z těchto dvojčlenů je násoben jistým číslem a sice v našem uspořádání dvojčlen prvý číslem $(2k-1)(k-1)$, dvojčlen druhý číslem $(2k-1)(k-1)+6$ atd. vždy číslem o 6 větším. Součet znásobených takto dvojčlenů dělen číslem $4k(k^2-1)$ dává hledanou rovnovážnou polohu při *sudém* počtu bodů obratu.

Tak na př. pro $n = 4$ — $(k = 2)$:

$$\xi = \frac{l_{-1}+l_2+3(l_1+l_0)}{8} \text{ (kráceno 3);}$$

pro $n = 6$ — $(k = 3)$

$$\xi = \frac{5(l_{-2}+l_3)+8(l_0+l_1)+11(l_2+l_{-1})}{48} \text{ (kráceno 2) atd.}$$

Summa všech koefficientů jednotlivých l jest ovšem

$$4k(k^2-1).$$

Jest povinností naší, bychom stanovené vzorce ocenili, což provedeme na praktických případech.

Bylo pozorováno na kývající se magnetce (odpor $= \infty$) 12 za sebou jdoucích bodů obratu, jež si označíme k vůli dalšímu takto:

1 = 14·84	2 = 65 49
3 = 17·24	4 = 63·20
5 = 19·42	6 = 61·13
7 = 21·40	8 = 59·24
9 = 23·19	10 = 57·53
11 = 24·82	12 = 55·98.

Chyby pozorovací mohou obnášeti pouze $\pm$ 0·01.

Výpočet rovnovážné polohy pro skupiny 3, 4, 5 atd. za sebou jdoucích bodů obratu obsahuje tab. 1., při čemž počítáno až na třetí desetinné místo.

Tab. 1.

Počet bodů obratu	Počáteční bod obratu 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Maximální vzájemná difference
3	40·765	40·793	40·765	40·793	40·770	40·793	40·768	40·788	40·768	40·788	0·028
4	40·779	40·779	40·779	40·779	40·779	40·779	40·779	40·779	40·779		0·000
5	40·756	40·802	40·756	40·800	40·761	40·798	40·762	40·794			0·046
6	40·779	40·781	40·779	40·780	40·779	40·779	40·778				0·003
7	40·749	40·809	40·752	40·806	40·754	40·804					0·060
8	40·779	40·781	40·778	40·780	40·778						0·003
9	40·742	40·815	40·745	40·812							0·073
10	40·777	40·781	40·777								0·004
11	40·735	40·821									0·086
12	40·800										

Chyby pozorovací dovolují největší vzájemnou differenci 0 02, tak že při sudém počtu pozorování výsledky dobře souhlasí, ne tak při lichém počtu. A rozdíly v obou případech jsou tím větší, čím více pozorování užito pro výpočet, ač bychom snad čekali právě opak.

Ještě nápadnější je výsledek při větším útlumu tělesa se pohybujícího.

Při téže magnetce co v předešlém případě, ale při spojení s malým odporem bylo pozorováno:

1 = 0·60	2 = 68·07
3 = 22 24	4 = 53·37
5 = 32 23	6 = 46·59
7 = 36·83	8 = 43·46

Příslušné výsledky analogicky jako v tab. 1. podány jsou v tab. 2.

Tab. 2.

Počet bodů obratu	Počáteční bod obratu						Maximální vzájemná difference
	1	2	3	4	5	6	
3	39·745	41·480	40·303	41·105	40·568	40·928	1·735
4	40·613	40·891	40·702	40·833	40·744		0·278
5	39·539	41·623	40·207	41·169			2·084
6	40·502	40·967	40·651				0 465
7	39·493	41·653					2·160
8	40·414						

Vzájemná difference při sudém počtu přesahuje již značně chyby pozorovací, ale ne v takové překvapující míře, jako při lichém počtu, kde ani celky nejsou zaručeny.

Proto zcela správně se odporučuje při běžných měřeních užívati sudého, resp. aspoň 4 bodů obratu.

Jako při menším útlumu tak i zde jsou difference tím větší, čím více bodů obratu se uvažuje.

II.

Celkem vidíme, že výsledky dané vzorci (4) a (6) jsou hrubé, tak že nutno výpočet rovnovážné polohy provésti buď přesně anebo aspoň přesněji, podržeti vyšší mocniny log. dekrementu σ, jakož i součin $\sigma(l_m - \xi - (-1)^m \chi e^{-m\sigma})$; neboť v rovnicích (1) je násoben vlastně číslem m^2, tak že jeho hodnota s tímto číslem roste, a tím také vzorce (4) a (6) obsahují pro větší počet pozorování větší a větší chyby.

Známo, že pravdě nejpodobnější hodnota log. dekrementu σ dá se stanoviti bez znalosti rovnovážné polohy pouze z bodů obratu. Pro úplnost uvedu zde stručně obvyklé obecné řešení této úlohy.*)

Je-li měřeno n za sebou jdoucích bodů obratu, je tím dáno $(n - 1)$ za sebou jdoucích oblouků s_m. Pro dva sousední oblouky platí

$$l\, s_{m+1} - l\, s_m = -\sigma.$$

Vyjádřeme si všechny oblouky od s_1 až do s_{n-1} analyticky pomocí oblouku s_0, jenž předcházel prvnímu oblouku s_1:

$$l\, s_m = l\, s_0 - m\sigma \quad (m = 1, 2, \ldots n - 1).$$

Hodnoty σ a s_0 budou pravdě nejpodobnější, bude-li

$$\sum_{m=1}^{m=n-1} (l\, s_m - l\, s_0 + m\sigma)^2 = minim.$$

To žádá, aby

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial\, l\, s_0} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma} = 0,$$

t. j.

$$\sum_m (l\, s_m - l\, s_0 + m\sigma) = 0,$$

$$\sum_m m\, (l\, s_m - l\, s_0 + m\sigma) = 0.$$

---

*) Viz uvedenou Helmholtzovu Dynamiku, pag. 118—119.

Ježto

$$\sum_m +1 = n - 1, \quad \sum_m m = \frac{(n-1)\,n}{2},$$

$$\sum_m m^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6},$$

možno psáti

$$\sum_m l s_m - (n-1)\, l s_0 + \frac{(n-1)\,n}{2} \sigma = 0$$

$$\sum_m m\, l s_m - \frac{(n-1)\,n}{2}\, l s_0 + \frac{(n-1)\,n\,.\,(2n-1)}{6} \sigma = 0.$$

Vyloučením hodnoty $l s_0$, která nás neinteressuje, dostaneme pro σ:

$$\sigma = 6\, \frac{n \sum_m l s_m - 2 \sum_m m\, l s_m}{n(n-1)(n-2)}$$

$$= 6\, \frac{\sum_m (n-2m)\, l s_m}{n(n-1)(n-2)}.$$

V naznačené součtové řadě je číselný koefficient členu prvního a posledního atd. stejný, tak že konečně máme:

$$\sigma = 6\, \frac{(n-2)(l s_1 - l s_{n-1}) + (n-4)(l s_2 - l s_{n-2}) + \ldots}{n(n-1)(n-2)} \tag{7}$$

anebo

$$\sigma = l \left[\left(\frac{s_1}{s_{n-1}} \right)^{n-2} \left(\frac{s_2}{s_{n-2}} \right)^{n-4} \ldots \right]^{\frac{6}{n(n-1)(n-2)}}. \tag{7'}$$

Výsledky stanovené dle tohoto vzorce pro naše pozorování s větším i menším útlumem se pěkně shodují; sestaveny jsou v tab. 3, resp. v tab. 4.

Nejpravděpodobnější hodnotu log. dekrementu pro libovolný počet pozorování dovedeme tedy přímo určiti, tak že možno v rovnicích (1) považovati veličinu σ za známou a výpočet hodnoty ξ provésti přesně a pak použíti dle úlohy většího nebo menšího přiblížení.

Tab. 3.

Počet bodů obratu	Počáteční bod obratu										Maximální vzájemná difference
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	0·04855	0·04859	0·04861	0·04847	0·04864	0·04872	0·04843	0·04868	0·04862	0·04852	0·00029
4	0·04857	0·04860	0·04854	0·04856	0·04868	0·04857	0·04855	0·04865	0·04857		0·00014
5	0·04858	0·04856	0·04856	0·04861	0·04861	0·04859	0·04859	0·04861			0·00005
6	0·04856	0·04857	0·04859	0·04859	0·04861	0·04860	0·04858				0·00005
7	0·04857	0·04859	0·04858	0·04858	0·04861	0·04859					0·00004
8	0·04858	0·04858	0·04859	0·04859	0·04860						0·00002
9	0·04858	0·04859	0·04859	0·04859							0·00001
10	0·04858	0·04859	0·04859								0·00001
11	0·04859	0·04859									0·00000
12	0·04859										

Prvé dvě rovnice v (1) dávají

$$\xi = \frac{\sum\limits_m e^{-2m\sigma} \sum\limits_m l_m - \sum\limits_m (-1)^m e^{-m\sigma} \cdot \sum\limits_m (-1)^m \cdot e^{-m\sigma} l_m}{n \cdot \sum\limits_m e^{-2m\sigma} - \left(\sum\limits_m (-1)^m e^{-m\sigma}\right)^2}. \quad (8)$$

Jmenovatelem jest čitatel pro $l_m = 1$.

Tab. 4.

Počet bodů obratu	Počáteční bod obratu 1	2	3	4	5	6	Maximální vzájemná difference
3	0·38675	0·38677	0·38700	0·38675	0·38613	0·38671	0·00087
4	0·38676	0·38689	0·38688	0·38644	0·38642		0·00037
5	0·38683	0·38686	0·38664	0·38649			0·00037
6	0·38683	0·38671	0 39661				0·00022
7	0·38673	0 38666					0·00007
8	0·38669						

Provedeme-li ještě součty (v mezích jako při (3) a (5)

$$\sum_m e^{-2m\sigma} \text{ a } \sum_m (-1)^m e^{-m\sigma},$$

jež jsou vlastně geometrickými řadami s kvocientem $e^{2\sigma}$ resp. $-e^{\sigma}$, a krátíme, pokud lze, dostaneme jednotný vzorec pro oba případy:

$$\xi = \frac{\sum\limits_m l_m - \dfrac{1-e^{\sigma}}{1+(-e^{\sigma})^n} \sum\limits_m (-1)^{k+m} e^{(k-m)\sigma} l_m}{n - \dfrac{(1-e^{\sigma})\left(1-(-e^{\sigma})^n\right)}{(1+e^{\sigma})\left(1+(-e^{\sigma})^n\right)}}. \quad (8')$$

Prakticky by se dle tohoto vzorce počítalo tak, že by se vypočetla nejprve hodnota

$$e^{\sigma} = \left[\left(\frac{s_1}{s_{n-1}}\right)^{n-2} \left(\frac{s_2}{s_{n-2}}\right)^{n-4} \cdots\right]^{\frac{6}{n(n-1)(n-2)}}$$

Tab. 5.

Počet bodů obratu	Počáteční bod obratu										Maximální vzájemná difference
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	40·779	40·779	40·778	40·780	40·782	40·781	40·779	40·778	40·778	40·779	0·004
4	40·780	40·779	40·780	40·781	40·782	40·780	40·778	40·777	40·778		0·005
5	40·778	40·780	40·780	40·780	40·780	40·780	40·779	40·778			0·002
6	40·780	40·782	40·780	40·782	40·780	40·780	40·780				0·002
7	40·779	40·779	40·780	40·779	40·780	40·780					0·001
8	40·780	40·779	40·780	40·779	40·780						0·001
9	40·780	40·780	40·780	40·779							0·001
10	40·780	40·779	40·779								0·001
11	40·779	40·778									0·001
12	40·779										

a příslušné její nutné mocniny, ovšem zvláště při větším n by byl výpočet značně zdlouhavý, proto si odvodíme raději vzorce přibližné. Při tom bude značiti u arithmetický průměr strany obsahující pozorování první, v arithmetický průměr strany druhé.

a) Při $\lim \sigma = 0$ dává vzorec náš pro liché n

$$\xi = \frac{u+v}{2}, \quad \text{tedy vzorec (4)}$$

pro sudé n podobně

$$\xi = \frac{u+v}{2}.$$

Výsledky tyto zvláště při sudém n jsou ovšem jen hrubým přiblížením.

Tab 6.

Počet bodů obratu	Počáteční bod obratu						Maximální vzájemná difference
	1	2	3	4	5	6	
3	40·794	40·771	40·785	40·777	40·780	40·776	0·023
4	40·837	40·740	40·809	40·763	40·792		0·097
5	40·793	40·772	40·785	40·776			0·021
6	40·825	40·749	40·799				0·076
7	40·794	40·770					0·024
8	40·814						

b) Použijeme-li pro sudý počet pozorování přibližné hodnoty

$$e^{m\sigma} = 1 + m\sigma$$

a pro lichý počet hodnoty

$$e^{m\sigma} = 1 + m\sigma + \frac{m^2\sigma^2}{2},$$

vynechávajíce ovšem členy, jež při každém přiblížení jsou proti ostatním členům *poměrně* malé, dostaneme po příslušných redukcích pro $n = 2k$

$$\xi = \frac{u+v}{2} - \frac{\sigma}{2}\left(\frac{u-v}{2}\right), \tag{9}$$

pro $n = 2k + 1$, zanedbáme-li ve výsledku ještě členy σ^2, podobně

$$\xi = \frac{u+v}{2} + \frac{\sigma}{4k(k+1)} \sum_{m=-k}^{m=k} (-1)^{k+m} m l_m \tag{10}$$

Dle posledních dvou vzorců, pro praktický počet velmi vhodných, sestaveny jsou pro uvedená naše pozorování tab. 5. a 6.

I při větším útlumu je docíleno pěkné shody, rozdíly jsou pouze na místě chyb pozorovacích. Snad je trochu při větším útlumu ještě přesahují, ale tomu bychom nezabránili ani přibráním ještě dalších mocnin σ, poněvadž zvláště při větším útlumu mohou vynechané členy míti vždy ještě poměrně značnou hodnotu.

Věstník literární.

Recense knih.

O. Bolza: **Lectures on the calculus of variations.** Chicago, University Press 1904. XV + 271 pp.

Obsahem této knihy jsou výzkumy posledních desítiletí, které směřují — podle vzoru Weierstrassova — k sestrojení přesných theorií o problémech variačního počtu. Stanovisko vyslovuje spisovatel v předmluvě: Klassické práce (od Eulera až asi do let šedesátých minulého století), které se omezují toliko na odvození několika podmínek, jimž hledané funkce mají vyhověti, byly podstatně doplněny a opraveny v mnohých věcech. Revise starších theorií vedla především k přesné formulaci problémů a k vyhledání nových podmínek nutných a pak podmínek postačujících, aby nějaká křivka dávala extrémní hodnotu omezeného integrálu; v geometrických úlohách zavedeno parametrické vyjadřování křivek a podrobně zpracovány případy, ve kterých koncové body hledané křivky mají ležeti na daných křivkách; v nejnovější době se konečně podařilo odvoditi theorem o existenci řešení pro nejjednodušší úlohy. O těchto věcech pojednává Bolzova kniha veskrze jasným a přehledným způsobem v sedmi kapitolách a omezuje se na případ, kdy funkce za integračním