qui a été trouvée empiriquement par M. Guye déjà en 1891. Dans cette relation c_1 et n représentent des constantes universelles.

Quant à la grandeur et l'énergie potentielle des molécules doubles, une comparaison avec les résultats des mesures fait voir que le rayon d'une molécule double est sensiblement le double du rayon de la molécule simple et que une molécule double livre à l'énérgie potentielle du gaz autant que deux molécules simples. Cela montve que ces doubles molécules là sont des couples de molécules qui s'y trouvent librement l'une auprès de l'autre.

La forme de la courbe caractéristique de Joule (No. 33) fondée sur l'équation d'état est representée à la fin de ce travail.

Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace.

Napsal **K. Petr.**

První příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace podal, jak známo, *Weierstrass* ve svých přednáškách (počínaje rokem 1861). Po prve uveřejněn byl od *P. du Bois-Reymonda* v Journal für r. u. a. Math., sv. 79. str. 29 (roku 1875) a od té doby jest často vykládán v učebnicích počtu infinitesimálního. Pokládán jest obyčejně za nejjednodušší z četných od té doby uveřejněných příkladů,*) jak ku př. výslovně praví *N. Nielsen***).

G. Peano uveřejnil v Math. Annalen, sv. 36 (r. 1890) práci (Sur une courbe, qui remplit toute une aire plaine), ve které ukazuje, že existují křivky o rovnici

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

---

*) Jsou to zejména práce: *Schwarz* (Beispiel einer stetigen, nicht differentierbaren Funktion z r. 1873), *Darboux* (Annales de l'Ecole normale, t. 4., 1875, str. 57.- 112.), *Dini*, Fondamenti per la teorica di funzioni di variabili reali, r. 1878, str. 147 a násl.), *Lerch* (Journal für r. u. a. Math. sv. 103., str. 126.—138., r. 1888).

**) V Elemente der Funktionentheorie (z r. 1911) praví doslovně na str. 101. citovaný spisovatel: Das erste vollständig behandelte und gewisz auch das einfachste Beispiel solcher Funktionen verdankt man *Weierstrasz* kde $f(t)$, $g(t)$ jsou funkce spojité v jistém intervalu, a kteréžto křivky procházejí každým bodem daného čtverce. Funkce $f(t)$, $g(t)$ jsou rovněž funkce nemající derivace v žádném bodě daného intervalu.*)

Postup Peanův dá se však ještě zevšeobecniti a zároveň podstatně zjednodušiti, jak v následujícím vyložím, a docílíme tím příkladu spojité funkce nemající v žádném bodě derivace nadmíru jednoduchého a nad to takového, že k jeho výkladu — nehledě k pojmům spojitosti a derivace — netřeba žádných jiných vědomostí, než věty z počátků arithmetiky.

Aby výklad byl co nejjednodušší, začnu se zvláštním případem a budu definovati funkci $y = f(x)$ následovně v intervalu $(0, 1)$. Každou hodnotu toho intervalu lze vyjádřiti zlomkem desetinným ve tvaru

$$x = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \ldots, \tag{1}$$

kde a_k jsou čísla celá intervalu $(0, 9)$; $0 \leq a_k \leq 9$.

Této hodnotě x přiřadím y výrazem

$$y = \frac{b_1}{2} \pm \frac{b_2}{2^2} \pm \frac{b_3}{2^3} \pm \ldots \pm \frac{b_k}{2^k} \pm \ldots, \tag{2}$$

kdež b_k jakož i znaménka $\pm$ jsou určena dle těchto zásad: Je-li a_k sudé, jest $b_k = 0$, je-li a_k liché, jest $b_k = 1$. Jestliže $b_k = 1$, pak v následujícím členu jest voliti protivné znaménko jako v členu k-tém (s b_k), vyjma v tom případě, kdy b_k jest přiřazeno číslu $a_k = 9$ a kdy jest voliti v následujícím členu znaménko totéž. Rovněž, když $b_k = 0$, jest voliti v následujícím členu znaménko totéž. Tak ku př.

$$f(0{\cdot}14372916) = \frac{1}{2} - \frac{0}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{0}{2^5} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} + \frac{0}{2^8},$$

$$f(0{\cdot}22\dot{2}\ldots\ldots) = \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \ldots = 0,$$

$$f(0{\cdot}99\dot{9}\ldots\ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 1.$$

*) Viz jasný výklad o tom v *L. Bierbach*, Differential- und Integr.-rechnung, sv. 1. (rok 1917) str. 104.—109.

Tím jest každé hodnotě x v intervalu (0, 1) přiřazena jedna hodnota y; neboť, patří-li ku x dvojí různá vyjádření pomocí zlomku desetinného, jak tomu při těch x, jež lze vyjádřiti pomocí konečného zlomku desetinného, jest příslušná hodnota pro y, ať si ji vypočteme na podkladě jednoho nebo druhého vyjádření čísla x desetinným zlomkem, vždy táž. Tak ku př. jest

$$0{\cdot}27 = 0{\cdot}26999\ldots$$

Jest však

$$f(0{\cdot}27) = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

$$f(0{\cdot}26999\ldots) = \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{1}{4}.$$

Tato okolnost se dá dokázati obecně zcela snadno; ostatně vyplývá též z důkazu o spojitosti funkce $f(x)$.

Funkce tak definovaná jest funkcí spojitou. Neboť je-li pro dvě hodnoty x, x' neodvisle proměnné

$$0 < x - x' < \frac{1}{10^k}, \tag{3}$$

jest dvojí možnost se zřetelem ku vyjádření čísel x, x' desetinnými zlomky:

1) Obě čísla x, x' shodují se v prvých k-1 desetinných místech (za tečkou desetinnou); jelikož pak ta část hodnoty $f(x)$, která přísluší výrazu

$$\frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \ldots$$

jest menší v absolutní hodnotě než $1 \,.\, 2^{-k+1}$, rovněž tak i při $f(x')$ a obě ty části (i při $f(x)$ i při $f(x')$) mají za předpokladu právě činěného totéž znaménko, jest v tomto případě

$$| f(x) - f(x') | < \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{4}$$

2) V x' jest na k-tém místě desetinném 9 a nechť jest (abychom hned nejobecnější případ měli na mysli) 9 na místě $k-1$, $k-2, \ldots k-\varrho$; v x jsou potom na těchto místech samé nully. Na místě $k-\varrho-1$ liší se cifry u x a x' o 1. Pak jest očividně

$$|f(x)-f(x')| = \left|\frac{1}{2^{k-\varrho-1}} - \frac{1}{2^{k-\varrho}} - \frac{1}{2^{k-\varrho+1}} - \dots \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^k} - \frac{\Theta}{2^{k-1}}\right|, \quad 0 \leq \Theta < 1,$$

$$= \left|\frac{1}{2^{k-\varrho-1}} - \frac{1}{2^{k-\varrho-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{\varrho+1}}\right) - \frac{\Theta}{2^{k-1}}\right|.$$

a tedy

$$|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2^k};$$

tím spíše pak jest platna i v tomto druhém případě nerovnina (4).

Jelikož pak pro všecka x, x' intervalu (0, 1), pro něž $|x - x'| < 10^{-k}$, jest splněn vztah (4), jest funkce $f(x)$ v intervalu (0, 1) spojitá.

Funkce $f(x)$ nemá derivaci v žádném bodě intervalu (0, 1). Dokažme to nejprve o bodech, jež jsou dány konečným desetinným zlomkem. Mějž tento zlomek celkem ϱ desetinných míst: jest tedy pro taková x v (1) $a_{\varrho+1} = a_{\varrho+2} = \dots = 0$. Pak jest patrně pro tato x

$$f\left(x \pm \frac{1}{10^k}\right) = f(x) \pm \frac{1}{2^k}, \quad f\left(x \pm \frac{2}{10^k}\right) = f(x)$$

pro všecka $k > \varrho$.

Klademe-li $h_k = \pm 1 \,.\, 10^{-k}$, jest tudíž

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = \pm \lim_{k=\infty} \frac{10^k}{2^k} = \pm \infty;$$

volíme-li však $h_k = \pm 2 \,.\, 10^{-k}$, jest

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = 0,$$

odtud jest učiněné tvrzení úplně patrno. Nelze-li však vyjádřiti x konečným desetinným zlomkem, učiníme

$$h_k = \frac{\varepsilon_k}{10^k} + \frac{\varepsilon_{k+1}}{10^{k+1}}.$$

Při tom jsou dány ε_k, ε_{k+1} následovně: Není-li žádné z čísel a_k, a_{k+1} rovno 9, jest voliti ε_k, ε_{k+1} rovny ± 1, při čemž znaménko jest libovolné a toliko, když a_k, a_{k+1} jest rovno buď 0 aneb 8, jest v prvém případě příslušné ε_k, ε_{k+1} učiniti rovným $+1$, v druhém pak případě rovným -1. Je-li a_k rovno 9 nechť jest $\varepsilon_k = -1$, $\varepsilon_{k+1} = 0$; je-li $a_{k+1} = 9$ a a_k různé od 9, jest $\varepsilon_k = 0$, $\varepsilon_{k+1} = -1$. Učiněná volba čísel ε_k, ε_{k+1} má za následek, že změna, která v hodnotě funkce $f(x)$ nastane, dosadíme-li $x + h_k$ místo x, bude toliko při číslech b_k, b_{k+1}, a jest bezprostředně jasno, že

$$| f(x + h_k) - f(x) | \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

I jest tedy

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k} = \pm \infty.$$

Rovněž snadnou volbou pro h_k bychom mohli docíliti, aby tato limita byla rovna nulle, což však přenechávám čtenáři, podotýkaje pouze že můžeme předpokládati, že a_k v (1) se od jistého indexu počínajíc nerovnají stále 9. Tím jest proveden důkaz, že $f(x)$ nemá derivaci ani v bodech, jež jsou dány nekonečným desetinným zlomkem.

Příklad právě podaný lze zevšeobecniti. Zůstáváme li ku př. i na dále při vyjádření čísla x zlomkem desetinným ve tvaru (1), můžeme funkci $y = f(x)$ definovati výrazem

$$y = \frac{b_1}{4^1} \pm \frac{b_2}{4^2} \pm \frac{b_3}{4^3} \pm \cdots \pm \frac{b_k}{4^k} \pm \cdots, \tag{5}$$

při čemž čísla b_k jest voliti ku př. na základě tabulky

a_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_k	0	1	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	$\bar{2}$	1	2	3

;

znaménko pak ve členu $k+1$-vém jest voliti protivně znaménku ve členu k-tém jenom tenkráte, jé-li $a_k = 2, 3, 6$ (ve kterémžto případě jsem nad příslušná b_k dal v tabulce právě napsané vodorovnou čárku). Obecně lze volbu čísel b_k provésti takto: Číslu $a_k = 0$ přísluší $b_k = 0$, pro $a_k = 9$ pak jest $b_k = 3$; dvěma a_k lišícím se o 1 přísluší rovněž dvě různá b_k lišící se 1; je-li a_k takové, že kdyby bylo o 1 větší, příslušelo by mu b_k o jednotku menší, pak ve členu $k+1$-vém jest bráti znaménko protivné znaménku ve členu k-tém (jinak jest zvoliti znaménko totéž).

Místo (2) a (5) bychom mohli konečně voliti výrazy tvaru

$$y = \frac{b_1}{6^1} \pm \frac{b_2}{6^2} \pm \frac{b_3}{6^3} \pm \ldots; \qquad y = \frac{b_1}{8^1} \pm \frac{b_2}{8^2} \pm \ldots$$

Rovněž nebylo by třeba vycházeti od soustavy desítkové při vyjadřování x; to jsou však věci vesměs na snadě ležící.

Exemple d'une fonction continue qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable.

Par K. Petr.

(Résumé de l'article précédent.)

Pour définir une telle fonction, la variable indépendante x étant dans l'intervalle (0, 1), nous commençons par convertir x en une fraction décimale

$$x = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \ldots \tag{1}$$

les a_k sont des entiers positifs, $0 \leqq a_k \leqq 9$.

A cette valeur de x, faisons correspondre l'expression y:

$$y = \frac{b_1}{2} \pm \frac{b_2}{2^2} \pm \frac{b_3}{2^3} \pm \ldots \pm \frac{b_k}{2^k} \pm \ldots,$$

où les quantités b_k et les signes $\pm$ sont définis au moyen de la règle suivante: si a_k est un nombre pair, on a $b_k = 0$; si a_k est impair, on a $b_k = 1$. Si $b_k = 1$, le signe qui figure devant b_{k+1} est contraire à celni qui figure devant b_k, sauf le cas, où b_k correspond à $a_k = 9$; dans ce cas, ainsi que dans le cas $b_k = 0$, il faut choisir, devant b_k et devant b_{k+1}, des signes égaux.

La fonction y ainsi définie est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x, cette valeur étant comprise dans l'intervalle (0, 1); ce fait est presqe évident, si l' on peut exprimer x par une fraction décimale finie, mais la démonstration n' offre aucune difficulté dans le cas général.

L'exemple qui vient d' être donné, peut être généralisé. En conservant la manière adoptée pour exprimer x par une fraction décimale (1), on peut définir une fonction $y = f(x)$ au moyen de l'expression

$$y = \frac{b_1}{4^1} \pm \frac{b_2}{4^2} \pm \frac{b_3}{4^3} \pm \cdots \pm \frac{b_k}{4^k} \pm \cdots,$$

où les nombres b_k sont choisis, par exemple, à l'aide du tableau suivant

a_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_k	0	1	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	$\bar{2}$	1	2	3

Le signe qui précède le terme b_{k+1} doit être contraire à celni qui précède b_k seulement dans les cas où $a_k = 2, 3, 6$ (dans ces cas, j'ai mis, dans le tableau, un trait horizontal sur le nombre b_k correspondant). En général, les b_k peuvent être choisis de la manière suivante: si deux a_k diffèrent d'une unité, il leur correspondent deux b_k qui diffèrent d'une unité; a_k étant tel que, s'il était plus grand d'une unité, le b_k correspondant serait plus petit d'une unité, il faut prendre, devant b_{k+1}, un signe contraire à ce qui figure devant b_k (dans tout autre cas, il faut prendre, devant b_{k+1} et devaut b_k, des signes égaux). Il est facile à généraliser ces résultats.

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše **M. Lerch.** *)

8.

Uvažujme integrály

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos ux\, dx}{(v+x)^s}, \quad B = \int_0^\infty \frac{\sin ux\, dx}{(v+x)^s}; \tag{17'}$$

v integrálu

$$A + iB = \int_0^\infty \frac{e^{uix}\, dx}{(v+x)^s}$$

užijme vyjádření

$$\frac{\Gamma(s)}{(v+x)^s} = \int_0^\infty e^{-\xi(v+x)} \xi^{s-1} d\xi$$

*) Viz minulý ročník »Časopisu« str. 1., 166., 312.