Jan Schuster

Přesnost určení bodu zpětným promítáním v úkolu Snelliově (Pothenotově)

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 2, 133--141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121766

Přesnost určení bodu zpětným protínáním v úkolu Snelliově (Pothenotově).

Dr. *Jan Schuster*.

1. V práci »O jisté transformaci determinantu«, uveřejněné v tomto časopise na str. 25 a násl., určena změna polohy pozorovatelova místa, když měření se vkreslí do mapy, kde poloha základních bodů nebyla určena správně, a to stanovena změna, odpovídající posunu zcela určitému co do směru i velikosti, a podobně změna od změny zorných úhlů.

V praksi však vzniká úkol, určiti vliv nahodilých chyb, nebo stupeň přesnosti, očekávaný při dané konfiguraci.

K tomu cíli užijeme výsledků citované práce (značme ji I a číslo rovnice). Vyjdeme-li z názoru, že všecky základní body mohou býti stiženy chybou téže řádové velikosti a stejně pravděpodobně ve všech směrech, platí pro průměrný čtverec posunu podle I (27):

$$D^2(\Delta x)^2 = \{\Sigma(n_k - 2y)\,[(m_{k+1} - m_{k+2})\,\Delta x_k + (n_{k+1} - n_{k+2})\,\Delta y_k\}^2,$$

($k = 1, 2, 3$, (mod 3), indexy však vždy menší než 4).

Uvážíme-li, že při tvoření průměrů odpadnou součinové členy, a značíme-li kvadratické průměry posunů základních bodů

$$\overline{\Delta x_k^2} = \overline{\Delta y_k^2} = \varepsilon^2, \qquad \overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2} = \varrho^2,$$

bude

$$D^2\varrho^2 = \varepsilon^2 \Sigma\,\{[(n_k - 2y)^2 + (2x - m_k)^2]\,.\,[(m_{k+1} - m_{k+2})^2 + (n_{k+1} - n_{k+2})^2]. \tag{1}$$

Ale hodnota druhého činitele, což je čtyřnásobný čtverec vzdálenosti dvou středů kruhů, na př. pro středy (2) a (3) kruhů nad stranami b a c základního trojúhelníka, odpovídajících obvodovým úhlům ψ a ω podle I (3) a (14)

$$\begin{aligned}
(m_2 - m_3)^2 + (n_2 - n_3)^2 &= [x_3 - x_2 + (y_3 - y_1)\operatorname{cotg}\psi + (y_2 - y_1)\operatorname{cotg}\omega]^2 \\
&\quad + [y_3 - y_2 + (x_1 - x_2)\operatorname{cotg}\psi + (x_2 - x_1)\operatorname{cotg}\omega], \\
&= a^2 + b^2\operatorname{cotg}^2\psi + c^2\operatorname{cotg}^2\omega - 4P\operatorname{cotg}\psi - 4P\operatorname{cotg}\omega + \\
&\quad + (-a^2 + b^2 + c^2)\operatorname{cotg}\psi\,.\operatorname{cotg}\omega \\
&= (\operatorname{cotg}\omega + \operatorname{cotg}\psi)\,(a^2\operatorname{cotg}\varphi + b^2\operatorname{cotg}\psi + c^2\operatorname{cotg}^2\omega - 4P) = \\
&= -D\,(\operatorname{cotg}\omega + \operatorname{cotg}\psi),
\end{aligned}$$

takže

$$\left.\begin{aligned}(m_2-m_3)^2+(n_2-n_3)^2&=-D\,(\operatorname{cotg}\psi+\operatorname{cotg}\omega)\\(m_3-m_1)^2+(n_3-n_1)^2&=-D\,(\operatorname{cotg}\omega+\operatorname{cotg}\varphi)\\(m_1-m_2)^2+(n_1-n_2)^2&=-D\,(\operatorname{cotg}\varphi+\operatorname{cotg}\psi)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

První činitel uvažovaného součtu není než čtyřnásobný čtverec poloměru r_a (resp. r_b, r_c), t. j. vzdálenost bodu $Q(x, y)$ od středu $S_k(x_k, y_k)$. Je tudíž

$$-D\varrho^2=4\varepsilon^2\,[r_a^2(\operatorname{cotg}\psi+\operatorname{cotg}\omega)+r_b^2(\operatorname{cotg}\omega+\operatorname{cotg}\varphi)+$$
$$+\,r_c^2(\operatorname{cotg}\varphi+\operatorname{cotg}\psi)],$$

Nebo ježto

$$\operatorname{cotg}\varphi+\operatorname{cotg}\omega=-\frac{\sin\varphi}{\sin\psi\sin\omega},\quad 4\,r_a^2=\frac{a^2}{\sin^2\varphi},\ \text{atd.}$$

plyne jednoduše

$$\varrho^2=\varepsilon^2\,\frac{a^2+b^2+c^2}{D\sin\varphi\sin\psi\sin\omega}.\tag{3}$$

Veličiny vystupující jsou tedy čtverce stran base, zorné úhly φ, ψ, ω a plocha trojúhelníka, určeného středy kružnic S_k.

Chyba roste, jsou-li úhly φ, ψ, ω malé, tedy bod vně trojúhelníka základního, nebo když se D velmi zmenší, což nastane na kružnici opsané základnímu trojúhelníku, neboť je-li

$$\alpha=\varphi,\quad\beta=\psi,\quad\gamma=\omega-180,$$

je

$$a^2\operatorname{cotg}\alpha+b^2\operatorname{cotg}\beta+c^2\operatorname{cotg}\gamma-4P=$$
$$=2ar\cos\alpha+2br\cos\beta+2cr\cos\gamma-4P=0.$$

Je-li bod Q velmi blízko kruhu opsaného bodům ABC, takže

$$\varphi=\alpha+\Delta\alpha,\quad\psi=\beta+\Delta\beta,\ \omega=180+\gamma+\Delta\gamma,$$

kde

$$\Delta\alpha+\Delta\beta+\Delta\gamma=0,$$

obdržíme pro hodnotu

$$-D=a^2\,[\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cosec}^2\alpha\,\Delta\alpha-2\operatorname{cosec}^2\alpha\operatorname{cotg}\alpha\,\Delta\alpha^2]$$
$$+\,b^2\,[\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cosec}^2\beta\,\Delta\beta-2\operatorname{cosec}^2\beta\operatorname{cotg}\beta\,\Delta\beta^2]$$
$$+\,c^2\,[\operatorname{cotg}\gamma-\operatorname{cosec}^2\gamma\,\Delta\gamma-2\operatorname{cosec}^2\gamma\operatorname{cotg}\gamma\,\Delta\gamma^2]-4P,$$

kde se členy konečného řádu a členy malé 1. řádu zruší, a zbude

$$D=8r^2\,(\operatorname{cotg}\alpha\,\Delta\alpha^2+\operatorname{cotg}\beta\,\Delta\beta^2+\operatorname{cotg}\gamma\,\Delta\gamma^2).$$

Obdržíme tedy přibližně výraz:

$$\varrho^2=\varepsilon^2\frac{a^2+b^2+c^2}{8r^2\,(\operatorname{cotg}\alpha\,\Delta\alpha^2+\operatorname{cotg}\beta\,\Delta\beta^2+\operatorname{cotg}\gamma\,\Delta\gamma^2)}.$$

ukazující, že $\varrho:\varepsilon$ je veličina velká prvního řádu.

Je-li bod Q velmi blízko některého směru, určeného stranami trojúhelníka ABC, na př. strany BC, bude φ velmi blízké 180^0 nebo

0^0, tedy $\sin\varphi$ velmi malá veličina. Pak bude $\psi+\omega$ blízko 180^0 nebo 360^0, tedy $\sin\varphi$ a $\sin\psi$ absolutně sobě velmi blízké. Ve všech případech bude jmenovatel ve (3) kladný. Hodnota D poroste nade všecky meze, ale součin $D\sin\varphi$ zůstane konečný, přibližně rovný $-a^2\cos\varphi \doteq -a^2$, a proto

$$\varrho^2 = \varepsilon^2 \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2\sin^2\psi}.$$

Pro patu výšky v_a na stranu a obdržíme tedy

$$\varrho^2 = \varepsilon^2 \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}.$$

Je-li Q daleko vně trojúhelníka na straně BC, roste ϱ/ε úměrně s kosekantou úhlu ψ.

Uvažujme nyní pro objasnění průběhu přesnosti případ, kdy ABC je rovnostranný trojúhelník, tedy

$$\varrho^2 = \varepsilon^2 \frac{3}{[\sqrt{3}-(\operatorname{cotg}\varphi+\operatorname{cotg}\psi+\operatorname{cotg}\omega)]\sin\varphi\sin\psi\sin\omega}$$

a sledujme body osy jdoucí bodem A. Pak bude $\psi=\varphi$, tedy $\varphi = 360-2\psi$ a

$$\varrho^2 = \frac{3\varepsilon^2}{-\left(\sqrt{3}-\dfrac{3\operatorname{cotg}^2\psi+1}{2\operatorname{cotg}\psi}\right)2\sin^3\psi\cos\psi} =$$

$$= \frac{3\varepsilon^2}{(\sqrt{3}\operatorname{cotg}\psi-1)^2\sin^4\psi} = \frac{3\varepsilon^2}{4\sin^2(60^0-\psi)\sin^2\psi}.$$

Tento výraz ukazuje, že ϱ má dva póly pro

$$\psi = 60^0-\omega, \quad \varphi = 240^0 \quad \text{a} \quad \psi = 0,$$

t. j. jeden na opsané kružnici, druhý v nekonečnu.

Minima nabude tam, kde má argument jmenovatele, totiž

$$\cos(2\psi-60^0)-\cos 60^0,$$

největší absolutní hodnotu. To nastane pro

$$2\psi = 240^0, 60^0, \text{ tedy pro } \psi = 120^0, 30^0.$$

První případ odpovídá středu trojúhelníka, kde

$$\varrho^2 = \frac{4\varepsilon^2}{3},$$

druhý dá

$$\varrho^2 = 12\varepsilon^2,$$

a příslušný bod leží souměrně k A podle strany a.

Obecné vyšetření minima ϱ jest ovšem velmi obtížné pro vysoký stupeň vzniklých rovnic. Lze je hledati blízko bodu nejmenšího součtu vzdáleností od vrcholů, pro který

$$\varphi = \psi = \omega = 120^0.$$

$$\varrho^2 = \varepsilon^2 \frac{8\,(a^2 + b^2 + c^2)}{3\,[4\sqrt{3}P + a^2 + b^2 + c^2]}.$$

2. Nyní se obrátíme k vyšetření střední chyby v určení bodů, způsobené chybami v určení směrníků. Označíme-li Φ, Ψ, Ω směrníky paprsků QA, QB, QC, resp. bude

$$\varphi = \Psi - \Omega,\; \psi = \Omega - \Phi,\; \omega = \Phi - \Psi + 360^0.$$

Při tvoření derivací užijeme výrazů I (18).

$$\left.\begin{aligned} -(x - x_1)\,D &= \frac{bc \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi}(n_2 - n_3) \\ -(y - y_1)\,D &= \frac{bc \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi}(m_3 - m_2) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

a z nich cyklicky podle indexů 1, 2, 3, stran a, b, c a úhlů φ, ψ, ω utvořených, takže k derivaci podle Φ, Ψ, Ω resp. užijeme výrazů s indexy 1, 2, 3.

Bude tedy

$$D^2 \frac{\partial x}{\partial \Phi} = \frac{bc \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi}\Big\{-D\,[(x_1 - x_3)\operatorname{cosec}^2\psi + (x_2 - x_1)\operatorname{cosec}^2\omega] - [y_3 - y_2 - (x_1 - x_3)\operatorname{cotg}\psi - (x_2 - x_1)\operatorname{cotg}\omega]\,.\,[b^2\operatorname{cosec}^2\psi - c^2\operatorname{cosec}^2\omega]\Big\}$$

$$D^2 \frac{\partial y}{\partial \Phi} = \frac{bc \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi}\Big\{-D[-(y_1 - y_2)\operatorname{cosec}^2\omega - (y_3 - y_1)\operatorname{cosec}^2\psi] - [x_2 - x_3 - (y_3 - y_1)\operatorname{cotg}\psi + (y_1 - y_2)\operatorname{cotg}\omega]\,.\,[b^2\operatorname{cosec}^2\psi - c^2\operatorname{cosec}^2\omega]\Big\}.$$

Utvořme součet čtverců obou těchto výrazů tak, že hned spojujeme stejnolehlé členy obou. Tím vzniknou tři členy:

$$I = D^2\{b^2\operatorname{cosec}^4\psi + c^2\operatorname{cosec}^4\omega - (b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{cosec}^2\psi\operatorname{cosec}^2\omega\}$$

$$II = (b^2\operatorname{cosec}^2\psi - c^2\operatorname{cosec}^2\omega)^2\,[a^2 + b^2\operatorname{cotg}^2\psi + c^2\operatorname{cotg}^2\omega - 4P(\operatorname{cotg}\psi + \operatorname{cotg}\omega) + (b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{cotg}\psi\operatorname{cotg}\omega],$$

$$III = 2D\,(b^2\operatorname{cosec}^2\psi - c^2\operatorname{cosec}^2\omega)\,[2P(\operatorname{cosec}^2\omega - \operatorname{cosec}^2\psi) + b^2\operatorname{cotg}\psi\operatorname{cosec}^2\psi - c^2\operatorname{cotg}\omega\operatorname{cosec}^2\omega + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}(\operatorname{cotg}\omega\operatorname{cosec}^2\psi - \operatorname{cotg}\psi\operatorname{cosec}^2\omega)].$$

Přepišme I na:

$$D^2 \{ (b^2 \operatorname{cosec}^2 \psi - c^2 \operatorname{cosec}^2 \omega) (\operatorname{cosec}^2 \psi - \operatorname{cosec}^2 \omega) + \\ + a^2 \operatorname{cosec}^2 \psi \operatorname{cosec}^2 \omega \} = I' + I''$$

a slučme I' se III, při čemž vytkněme společný faktor a nahraďme D jeho výrazem (I (4), (18)):

$$III + I' = D (b^2 \operatorname{cosec}^2 \psi - c^2 \operatorname{cosec}^2 \omega) [(\operatorname{cosec}^2 \psi - \operatorname{cosec}^2 \omega) \\ (-a^2 \operatorname{cotg} \varphi - b^2 \operatorname{cotg} \psi - c^2 \operatorname{cotg} \omega) + 2b^2 \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cosec}^2 \psi - \\ - 2c^2 \operatorname{cotg} \omega \operatorname{cosec}^2 \omega + (b^2 + c^2 - a^2) (\operatorname{cotg} \omega \operatorname{cosec}^2 \psi - \\ - \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cosec}^2 \omega)].$$

Výraz uvnitř hranaté závorky napravo přetvořme nyní, postupně upravujíce členy podle čtverců stran. Člen obsahující a^2 bude tedy:

$$a^2 [\operatorname{cotg} \varphi (\operatorname{cotg}^2 \omega - \operatorname{cotg}^2 \psi) - (\operatorname{cotg} \omega - \operatorname{cotg} \psi) (1 - \operatorname{cotg} \omega \operatorname{cotg} \psi)] \\ = a^2 (\operatorname{cotg} \omega - \operatorname{cotg} \psi) [\operatorname{cotg} \varphi (\operatorname{cotg} \omega + \operatorname{cotg} \psi) - 1 + \\ + \operatorname{cotg} \omega \operatorname{cotg} \psi] = 0.$$

Člen s b^2 je:

$$b^2 [\operatorname{cotg} \psi (\operatorname{cosec}^2 \psi + \operatorname{cosec}^2 \omega) + \operatorname{cotg} \omega \operatorname{cosec}^2 \psi - \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cosec}^2 \omega] = \\ = b^2 \operatorname{cosec}^2 \psi (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega)$$

a člen s c^2:

$$-c^2 [\operatorname{cotg} \omega (\operatorname{cosec}^2 \omega + \operatorname{cosec}^2 \psi) + \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cosec}^2 \omega - \operatorname{cotg} \omega \operatorname{cosec}^2 \psi] = \\ = - c^2 \operatorname{cosec}^2 \omega (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega).$$

Odtud $III + I' = D (b^2 \operatorname{cosec}^2 \psi - c^2 \operatorname{cosec}^2 \omega)^2 (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega)$.

Když ve druhém činiteli ve II. nahradíme při a^2 součinitel $1 - \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cotg} \omega$ výrazem $(\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega) \operatorname{cotg} \varphi$, vidíme, že lze $\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega$ vytknouti, a zbytek uvnitř závoky není než $-D$, což ukazuje, že

$$III + I' + II = 0,$$

a zbývá pouze I''. Máme tedy

$$D^2 \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2 \right] = \frac{a^2 b^2 c^2 \sin^2 (a - \varphi)}{\sin^2 \varphi \sin^2 \psi \sin^2 a}. \tag{5}$$

Těchto výrazů užijeme nyní k určení kvadratického průměru chyby, neboť

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial x}{\partial \Psi} \Delta \Psi + \frac{\partial x}{\partial \Omega} \Delta \Omega$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial y}{\partial \Psi} \Delta \Psi + \frac{\partial y}{\partial \Omega} \Delta \Omega$$

dají pro případ, že průměrné chyby úhlů jsou stejné,

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \overline{\Delta\Psi^2} = \overline{\Delta\Omega^2} = \sigma^2,$$

$$\varrho^2 = \overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2} =$$

$$= \sigma^2 \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \Psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \Omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Omega}\right)^2\right].$$

Tedy dosazením výsledku (5) a obdobných:

$$\varrho^2 = \sigma^2 \frac{a^2 b^2 c^2}{D^2} \frac{\sin^2(\alpha - \varphi) + \sin^2(\beta - \varphi) + \sin^2(\gamma - \omega)}{\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\omega} \tag{6}$$

nebo

$$\varrho^2 = \sigma^2 \frac{a^2 b^2 c^2}{D^2} \frac{1 + \cos(\alpha - \varphi)\cos(\beta - \psi)\cos(\gamma - \omega)}{\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\omega}.$$

Leží-li bod blízko opsané kružnice bodů základních, stane se ϱ nekonečným prvního řádu, neboť se jeho výraz blíží k

$$\varrho^2 = \sigma^2 \frac{2a^2b^2c^2}{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma} \frac{\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}{64r^4 (\operatorname{cotg}\alpha\, \Delta\alpha^2 + \operatorname{cotg}\beta\, \Delta\beta^2 + \operatorname{cotg}\gamma\, \Delta\gamma^2)^2}$$

$$= 2r^2 \sigma^2 \frac{\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}{(\operatorname{cotg}\alpha\, \Delta\alpha^2 + \operatorname{cotg}\beta\, \Delta\beta^2 + \operatorname{cotg}\gamma\, \Delta\gamma^2)^2}.$$

kde r značí poloměr kruhu opsaného trojúhelníku ABC.

Vzdaluje-li se bod Q do nekonečna, zmenšuje se φ, ψ, ω a při konečném činiteli v (6) roste sice D^2 do řádu druhého, ale kompensován součinem sinů, takže celkem ϱ/σ roste do nekonečna ve druhém řádu.

Jako v odstavci 1 sledujme průběh chyby ϱ na ose rovnostranného trojúhelníká, což dá:

$$\varrho^2 = \sigma^2 a^2 \frac{\sin^2(60^0 + 2\psi) + 2\sin^2(60^0 - \psi)}{16 \sin^4(60^0 - \psi)\sin^4\psi}$$

$$= \sigma^2 a^2 \frac{2\cos^2(60^0 - \psi) + 1}{8\sin^2(60 - \psi)\sin^4\psi}.$$

Abychom určili přibližný průběh, vytkněme hodnoty:

pro $\psi = 180^0$, t. j. pro vrchol A je $\varrho = \infty$
pro $\psi = 150^0$ $\quad \varrho = \sigma a \sqrt{2}$
pro $\psi = 120^0$ $\quad \varrho = \sigma a \,.\, \frac{2}{3}$
pro $\psi = 30^0$ $\quad \varrho = \sigma a \sqrt{20}$

vedle pólů pro $\psi = 60^0$ a $\psi = 0^0$.

Minimum dáno vymizením logaritmické derivace posledního výrazu, totiž:

$$\frac{\sin(120^0 - 2\psi)}{2\cos^2(60^0 - \psi) + 1} = 2\operatorname{cotg}\psi + \operatorname{cotg}(\psi - 60^0).$$

Tato rovnice se splní hodnotou $\psi = 120^0$, což je tedy vskutku minimum. Po odstranění odpovídajícího faktoru $\sin(\psi - 120^0)$ zbude rovnice

$$\frac{2\,[2\cos\psi + \cos(120^0 - \psi)]}{2\cos^2(60^0 - \psi) + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{\sin(\psi - 60^0)} + \frac{2}{\sin\psi}\right].$$

Čitatele nalevo možno přepsati na

$$4\sin 120^0 \sin(120^0 - \psi) = 2\sqrt{3}\sin(120^0 - \psi),$$

takže

$$\frac{4\sin(120^0 - \psi)}{2\cos^2(60^0 - \psi) + 1} = \frac{1}{\sin(\psi - 60^0)} + \frac{2}{\sin\psi}.$$

Když spojíme levou stranu s druhým členem strany pravé, obdržíme v čitateli

$$4\sin(120^0 - \psi)\sin\psi - 4\cos^2(60^0 - \psi) - 2 =$$
$$= 2\cos(120^0 - 2\psi) - 2\cos 120^0 - 2\cos(120^0 - 2\psi) - 4 = -3.$$

Rovnice se pak přepíše jednoduše na

$$3\sin(60^0 - \psi) - \sin\psi\,[2 + \cos(120^0 + 2\psi)] = 0.$$

V dalším jsme však odkázáni na metodu aproximativní. Patrně může rovnice míti kořen mezi 0^0 a 60^0, tedy vně kružnice opsané trojúhelníku základnímu.

Hodnota levé strany poslední rovnice činí

$$+0{\cdot}30458, \text{ resp. } -0{\cdot}35450 \text{ pro hodnoty } \psi = 31^0, 32^0,$$

takže lze hledati polohu minima při úhlu

$$\psi = 31^0\,27', \quad \text{jemuž odpovídá} \quad \varrho = \sigma a\,.\,4{\cdot}353.$$

Tato hodnota je vskutku menší než výše udaná pro $\psi = 30^0$, neboť $\sqrt{20} = 4{\cdot}47115$.

Tím jsme potvrdili, že průběh chyb od úhlů jest obdobný průběhu chyb způsobených polohami základních bodů, ale zákonitost je mnohem složitější.

Tím spíše uznáme, že by obecné určování polohy bodu s minimem chyby bylo příliš pracné. Avšak tolik je jisto, že pro body uvnitř trojúhelníka ABC, kde jsou φ, ψ, ω dosti velké, je chyba menší než vně.

Vytkněme jen ještě případ, kdy je bod Q na straně BC. Potom je $\sin\varphi = 0$, ale $D^2\sin^4\varphi = a^4$, $\psi + \omega = 180^0$ nebo 360^0 a tedy

$$\varrho^2 = \sigma^2 \cdot \frac{2b^2c^2}{a^2}\,\frac{1 - \cos a\cos(\beta - \psi)\cos(\gamma + \psi)}{\sin^4\psi},$$

což ukazuje, že při velké vzdálenosti bodu Q roste vliv chyb na ϱ/σ se čtvercem kosekanty zorného úhlu.

Dodatek pro geometrii trojúhelníka.

Z předchozích formulí plynou jednoduché vztahy mezi normálními souřadnicemi, vzdálenostmi bodů od vrcholů základního trojúhelníka a zornými úhly, v nichž se z oněch bodů spatřují strany.

Především dávají výrazy (4)

$$\left.\begin{aligned} \overline{QA}^2 &= \frac{b^2c^2\sin^2(\alpha-\varphi)}{D\sin\varphi\sin\psi\sin\omega} \\ \overline{QB}^2 &= \frac{c^2a^2\sin^2(\beta-\psi)}{D\sin\varphi\sin\psi\sin\omega} \\ \overline{QC}^2 &= \frac{a^2b^2\sin^2(\gamma-\omega)}{D\sin\varphi\sin\psi\sin\omega} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

pro vzdálenosti bodu Q od vrcholů jako funkce zorných úhlů.

K určení normálních souřadnic $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bodu Q, t. j. jeho vzdáleností od stran a, b, c, resp. základního trojúhelníka, vyjdeme od rovnic přímek, určených dvěma body, kde bod $(x, y, z) \equiv Q\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ má právě uvedené vzdálenosti, takže

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}\,a &= x\,(y_3-y_2) + y\,(x_2-x_3) - p_1 \\ \mathfrak{y}\,b &= x\,(y_1-y_3) + y\,(x_3-x_1) - p_2 \\ \mathfrak{z}\,c &= x\,(y_2-y_1) + y\,(x_1-x_2) - p_3, \end{aligned}$$

kde jsou p_1, p_2, p_3 minory determinantu pro plochu trojúhelníka ABC, patřící k jednotkám, při čemž

$$2P = p_1 + p_2 + p_3 = a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} + c\mathfrak{z}.$$

Řešme předešlé tři rovnice tak, že ze 2. a 3. určíme $x-x_1$ a $y-y_1$, ze 3. a 1. určíme $x-x_2$, $y-y_2$, z ostatních dvou $x-x_3$, $y-y_3$. Tím vzniknou výsledky:

$$\begin{aligned} 2P(x-x_1) &= b\mathfrak{y}\,(x_1-x_2) + c\mathfrak{z}\,(x_1-x_3) \\ 2P(y-y_1) &= b\mathfrak{y}\,(y_1-y_2) + c\mathfrak{z}\,(y_1-y_3) \\ 2P(x-x_2) &= c\mathfrak{z}\,(x_2-x_3) + a\mathfrak{x}\,(x_2-x_1) \\ 2P(y-y_2) &= c\mathfrak{z}\,(y_2-y_3) + a\mathfrak{x}\,(y_2-y_1) \\ 2P(x-x_3) &= a\mathfrak{x}\,(x_3-x_1) + b\mathfrak{y}\,(x_3-x_2) \\ 2P(y-y_3) &= a\mathfrak{x}\,(y_3-y_1) + b\mathfrak{y}\,(y_3-y_2) \end{aligned}$$

Tyto hodnoty dosadíme do rovnic na str. 28 [právě před *I* (13) uvedených], a obdržíme tím kotangenty zorných úhlů jako funkce normálních souřadnic. Na př. z první z oněch rovnic plyne $\cot g\,\varphi$, znásobená dvojnásobným obsahem trojúhelníka QBC, totiž $a\mathfrak{x}$ rovná se výrazu

$$(x-x_2)(x-x_3) + (y-y_2)(y-y_3) =$$
$$= -\frac{a^2bc}{2P}\,[\mathfrak{y}\mathfrak{z} + \mathfrak{x}\,(\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma)].$$

Platí tudíž rovnice

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cotg}\varphi &= -\frac{abc}{4P^2}\left[\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma\right]\\ \operatorname{cotg}\psi &= -\frac{abc}{4P^2}\left[\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} + \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma\right]\\ \operatorname{cotg}\omega &= -\frac{abc}{4P^2}\left[\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} + \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma\right].\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Naopak nám dovolí rovnice (7) určiti $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ jako funkce úhlů φ, ψ, ω. Je totiž dvojnásobný trojúhelník QBC roven jednak $a\mathfrak{x}$, jednak $\overline{QB} \,.\, \overline{QC} \,.\, \sin\varphi$, tedy

$$\mathfrak{x}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} = \mathfrak{y}\frac{\sin(\beta-\psi)}{\sin\psi} = \mathfrak{z}\frac{\sin(\gamma-\omega)}{\sin\omega} =$$

$$= \frac{abc}{D}\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\psi)\sin(\gamma-\omega)}{\sin\varphi\sin\psi\sin\omega}.$$

*

Degré de précision de la détermination d'un point dans le problème de la carte (ou de Pothenot).

(Extrait de l'article précédent.)

En se servant des résultats du mémoire »Transformation d'un déterminant etc.«, publié dans ce même journal, l'auteur calcule l'erreur moyenne en fonction des erreurs d'observation et des déplacements des points fondamentaux.