Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Jeřábek

Elementární odvození konstrukce tečny meze stínu vlastního otevřené zborcené plochy šroubové

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 4, 341--344

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121855

Elementární odvození konstrukce tečny meze stínu vlastního otevřené zborcené plochy šroubové.

Napsal *V. Jeřábek.*

Buďtež dány dva soustředné kruhy $K \equiv (o, r_a)$, $K' \equiv (o, r'_a)$[1]; první z nich pokládejme za průmět šroubovice hrdelní o výšce závitu v otevřené plochy šroubové, jejíž osa O stojí kolmo ve středu o kruhu K na jeho rovině π. Kruh druhý K' buď stopou řídícího kužele plochy šroubové, jehož vrchol nad průmětnou π má výšku $v_o = \frac{v}{2\pi}$.

Tečnou A kruhu K v bodě a zobrazme průmět jedné površky plochy šroubové. Přiřaďme bod a' kruhu K', který s bodem a jest podobně položen dle středu o, k površce vytknuté. Jsou-li poloměry oa, oa' směru téhož nebo protivného, jsou též površky sborcené plochy šroubové a pohyb šroubový smyslu stejného nebo protivného. Tím vznikají dva druhy ploch šroubových. Buďtež na př. poloměry oa, oa' směru téhož.

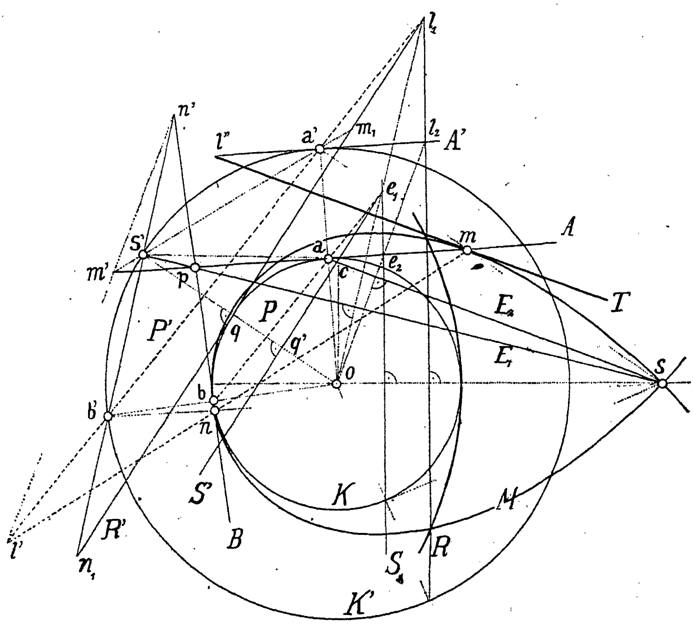
Je-li bod s přiřazen k paprskům světelným (pól paprsků světelných), jest bod m, v němž spojnice $a's$ a tečna A se protínají, jedním bodem křivky M, kterou zobrazen jest průmět meze stínu vlastního zborcené plochy šroubové. Jsou-li ob, ob' jiné polohy poloměrů oa, oa' a tečna B v bodě b průmětem jiné površky šroubové plochy, jest průsečík n spojnice $b's$ s B druhým bodem křivky M.

Sestrojme sečny ab, $a'b'$ a mn resp. kružnic K, K' a křivky M. První dvě sečny znamenejme P, P'. Vzhledem ke kruhu K buď průsečík p tečen A, B pólem přímky P a S polárou bodu s, pak průsečík e_1 polár P, S jest pólem přímky E_1 spojující body p, s. Spojnice oe_1 stojí tedy kolmo na poláře E_1 a protíná přímku P' v bodě l_1. Bodem tímto veďme přímku $R \parallel S$. Ježto přiřazený

[1]) Obrazec do textu vložený narýsoval ochotně pan prof. Dr. Roháček, začež mu vzdávám zasloužené díky. — Kruh, jehož střed jest o a poloměr r_a znamenán (o, r_a).

bod s jest pevný, má též jeho polára s polohu pevnou, a že $oe_1 : ol_1 = oa : oa' = r_a : r_a'$, jest poměr $oe_1 : ol_1$ stálý a přímka $R \perp os$ též pevná.

Zvolme nyní bod s' na kružnici K tak, aby spojnice ss' procházela bodem p; protněme sečnou $a's'$ tečnu A v bodě m' a sečnou $b's'$ tečnu B v bodě n'. Trojúhelníky mns, $m'n's'$ jsou v centrálné kollineaci pro střed p a osu P', neboť spojnice mm', nn', ss' homologických vrcholů procházejí středem p a průsečíky $(ms, m's') \equiv a'$,



$(ns, n's') \equiv b'$ homologických stran jsou na ose P'; protínají se tudíž i homologické strany mn, $m'n'$ v jednom bodě l' na ose P'.

Předpokládejme, že poloměry $oa' > oa$ jsou téhož směru. V tomto případě seče polára S' bodu s' kružnici K ve dvou bodech a prochází bodem e_1. Spojíme-li jeden z nich, na př. c, s bodem s', obdržíme trojúhelník pravoúhlý ocs', jehož odvěsna cs' dotýká se kruhu K v bodě c. Spustíme-li s bodu l_1 kolmici R' k os', bude $R' \parallel S'$. Body, v nichž R' a S' sekou poloměr os', znamenejme q, q'. Ježto $R' \parallel S'$, jest

$$oq' : oq = oe_1 : ol_1 = oa : oa' = r_a : r'_a, \text{ tedy}$$

$$oq \cdot r_a = oq' \cdot r'_a.$$

V trojúhelníku pravoúhlém ocs' jest

$$\overline{oc}^2 = oq' \,.\, os' \text{ čili } r_a^2 = oq' \,.\, r'_a,^2)$$

srovnáme-li rovnici tuto s předešlou, bude $oq = r_a$, což znamená, že bod q leží na kružnici K. V tomto bodě stojí však přímka R' kolmo na poloměru oq, pročež jest R' tečnou kružnice K v bodě q. Přímkou R' protněme sečnu $a's'$ v bodě m_1 a sečnu $b's'$ v bodě n_1. Trojúhelník pravoúhlý $m_1qs' \cong m'aa'$, protože mají stejné odvěsny $aa' = qs'$ a stejné úhly při vrcholech a', s', tedy $m_1s' = a'm'$, pročež i $a'm_1 = s'm'$. Z toho soudíme, že ve straně $a's'$ trojúhelníka $a'b's'$ jsou m_1, m' body isotomické, t. j. souměrné dle středu této strany. Obdobně lze shodnými trojúhelníky pravoúhlými n_1qs', $n'bb'$ dokázati, že $n_1s' = b's'$, takže i $b'n_1 = s'n'$. Máme tedy ve straně druhé $b's'$ trojúhelníka $a'b's'$ též dva body isotomické n_1, n'. Příčky m_1n_1, $m'n'$, které se v trojúhelníku $a'b's$ zovou isotomické, vytínají tudíž i v jeho třetí straně $a'b'$ body isotomické l_1, l', t. j. $a'l_1 = b'l'$.

Buď A' tečnou kruhu K' v bodě a' a T tečnou křivky M v bodě m. Za účelem konstrukce této tečny mysleme si nyní, že bod b v kružnici K neomezeně se přibližuje k bodu a. S ním zároveň přibližuje se v kružnici K' bod b' k bodu a' a bod n po křivce M k bodu m. Sečny P, P' a mn otáčejí se současně resp. kolem bodů a, a', m, a jejich mezními polohami jsou resp. tečny A, A' a T. Při otáčení řečených sečen přibližuje se bod e_1 po přímce S k bodu e_2 tečny A, bod l_1 po přímce R k bodu l_2 tečny A' a bod l' po jisté křivce (cissoidále) k bodu l'' tečny A'. Zaujmou-li zmíněné sečny polohy tečen A, A' a T, přijde bod e_1 do bodu e_2, bod l_1 do l_2 a l' do l''; při tom zaujme spojnice $oe_1l_1 \perp E_1$ polohu $oe_2l_2 \perp E_2 \equiv as$. Ježto a', l_2, l'' jsou mezními polohami bodů b', l_1, l' a protože $a'l_1 = b'l'$ ve všech polohách sečny P', jest též $a'l_2 = a'l''$ na tečně A'. Jsou tedy body l_2, l'' souměrny dle středu a'.

Tečnu T křivky M v bodě m lze tedy sestrojiti takto:

Tečnu A' protněme přímkou R nebo kolmicí spuštěnou se středu o na poláru as bodu e_2 v bodě l_2 a sestrojme pak k bodu l_2 souměrný bod l'' dle středu a'; spojnice $l''m$ jest tečnou křivky M v bodě m.

*

Une démonstration élémentaire d'une construction connue.

(Extrait de l'article précédent).

Étant donnés un point fixe s et deux cercles $K \equiv (o, \overline{oa})$, $K' \equiv (o, \overline{oa'})$ concentriques, aux rayons r_a, r_a', menons la tangente A

²) Je-li $oa > oa'$, neprotíná polára S' kružnici K, avšak body s', q' jsou též polárně sdruženy vzhledem ke kruhu K, jako dříve. Zůstává rovnice $r_a^2 = oq' \,.\, r'_a$ i v tomto případě v platnosti.

au point a du cercle K, laquelle coupe la droite $a' s$ au point m d'une courbe M. La courbe est, par suite, la projection de la limite de l'ombre propre d'un certain hélicoïde gauche. Pour construire la tangente T de la courbe M au point m, construisons des rayons $\overline{ob}$, $\overline{ob'}$ des deux cercles ayant le même sens, et un second point n de la courbe. Soit p le pôle de la sécante $P \equiv ab$ par rapport à K. Prenons, sur K', un point s' pour sommet du triangle $m' n' s'$ homologique au triangle mns par rapport au centre p et l'axe $P' \equiv ab$, et soit l' le point d'intersection (sur P') des côtés correspondants mn, $m' n'$. Les polaires S', P, S des points s', p, s par rapport au cercle K se coupent au point e_1, pôle de la polaire respective E_1. Soit l_1 le point homothétique à e_1 par rapport au centre o et pour $r_a : r'_a$ comme coefficient d'homothétie. La perpendiculaire $R' // S'$ abaissée du point l_1 sur le rayon $a' s'$ le coupe au point q, le côté $s' a$ au point m_1 et $b' s'$ au point n_1. La polaire S' coupe os' au point q'. Les points q', s' sont conjugués par rapport au cercle K, de sorte que $\overline{oq'} . \overline{os'} = r_a^2$ et que les points q, q' sont homothétiques par rapport au centre o, et pour $r_b : r_a$ comme coefficient d'homothétie. Il en suit $oq = r_a$; donc, R' touche K au point q. Les triangles congruents $a a' m'$, $q s' m_1$ donnent $a' m' = m_1 s'$, et, d'une manière analogue, $b' n' = n_1 s'$. Les couples de points $m . m'$, n, n' sont isotomiques dans les côtés $a' s'$, $b' s'$; par suite les droites isotomiques $m_1 n_1$, $m' n'$ découpent sur $a b$ des points isotomiques l_1, l'; donc, $\overline{a' l_1} = \overline{b' l'}$.

Si l'on fait tourner les rayons $\overline{ob}$, $\overline{ob'}$ jusqu'à ce qu'ils coïncident, respectivement, avec $\overline{oa}$, $\overline{oa'}$, le rayon $\overline{on}$ coïncide avec $\overline{om}$, et les sécantes P, P', mn coïncident avec les tangentes A, A', T des courbes K, K', M aux points a, a', m. En même temps, les points isotomiques l_1, l' coïncident avec les points l_2, l'' de la tangente A', symétriques par rapport au point a', de sorte que l_2 est le point commun de A', de R et de la perpendiculaire abaissée du point o sur as. Par-là est retrouvée la construction connue de la tangente T de la courbe M, comme la droite joignant le point m au point l'' symétrique, par rapport au centre a', au point l_2 point d'intersection de la tangente A' avec la perpendiculaire abaissée de o sur as.

O formě tarifů.

Napsal Dr. *Jaroslav Janko.*

V moderním životě politickém se vyskytují otázky a problemy, které jsou v bezprostředním vztahu k matematice, a jež jen matematik je s to náležitě řešiti, ač k jejich řešení býval přibírán jen zcela výjimečně a nahodile, protože se nenahlíželo, že dosavadní