Vincenc Jarolímek

O pravidelném patnáctiúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 231--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121867

si bod p obecněji, aby $\overline{ap} : \overline{bp} = \lambda$. V bodě p vztyčme jako prve kolmici a na ní vyznačme bod q dle poměru $\overline{pq} : \overline{ab} = k$.

Potom jsou souřadnice bodu q

$$\xi_q = \frac{x_2\lambda - x_1}{\lambda - 1} + k(y_2 - y_1),$$

$$\eta_q = \frac{y_2\lambda - y_1}{\lambda - 1} - k(x_2 - x_1).$$

Souřadnice všech ostatních vrcholů q obdržíme cyklickou záměnou. Sečtením všech ξ a η nabudeme

$$\sum_1^n(\xi) = \sum_1^n(x), \qquad \sum_1^n(\eta) = \sum_1^n(y),$$

pročež body s a s' jsou identické.

O pravidelném patnáctiúhelníku.

Napsal

Vincenc Jarolímek,

ředitel c. k. české realky v Ječné ulici v Praze.

V těchto řádcích chceme vyvinouti dvě zajímavé relace, týkající se pravidelného patnáctiúhelníka; při tom nechť značí a_n strany pravidelných n-úhelníků vepsaných do téže kružnice.

1. Budiž $\overline{ob} = \overline{od} = \overline{bd} = a_6$, $\overline{bc} = a_{10}$. Pak jest $\overline{cd} = a_{15}$, ježto $\widehat{bd}$ rovná se šestině, $\widehat{bc}$ desetině obvodu kruhu a

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}.$$

Učiňme $dj \parallel ch \perp kb$, tudíž

$$\overline{kd} = \overline{dj} = a_3, \quad \overline{ch} = a_5.$$

Posléze veďme $ce \parallel bo$. V $\triangle\, dec$ jest

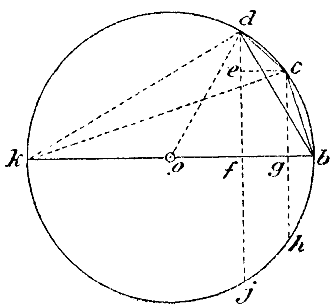
$$\overline{cd}^2 = a_{15}^2 = \overline{de}^2 + \overline{ec}^2 = \overline{de}^2 + \overline{fg}^2 = (df - cg)^2 + (fb - gb)^2,$$

tedy

$$a_{15}^2 = (\overline{df}^2 + \overline{fb}^2) + (\overline{cg}^2 + \overline{gb}^2) - 2\overline{df}\,.\,\overline{cg} - 2\overline{fb}\,.\,\overline{gb}$$

čili

$$(1) \qquad a_{15}^2 = \overline{bd}^2 + \overline{bc}^2 - 2\,.\,\frac{\overline{dj}}{2}\,.\,\frac{\overline{ch}}{2} - 2\,.\,\frac{\overline{ob}}{2}\,.\,\overline{gb}\,.$$



Avšak $\overline{bd}$ rovná se poloměru kružnice a_6, mimo to $\overline{bc} = a_{10}$, tedy, jak známo,

$$(2) \qquad \overline{bd}^2 + \overline{bc}^2 = a_6^2 + a_{10}^2 = a_5^2\,;$$

v $\triangle$ *kbc* jest pak

$$\overline{kb} : \overline{bc} = \overline{bc} : \overline{gb},$$

z čehož

$$(3) \qquad \overline{gb} = \frac{\overline{bc}^2}{\overline{kb}} = \frac{a_{10}^2}{2a_6}\,.$$

Substitucemi hodnot (2) a (3) do (1) vyjde

$$a_{15}^2 = a_5^2 - 2\,\frac{a_3}{2}\,.\,\frac{a_5}{2} - a_6\,\frac{a_{10}^2}{2a_6}$$

čili

$$(4) \qquad 2a_{15}^2 = 2a_5^2 - a_3\,.\,a_5 - a_{10}^2.$$

Rovnici (4) lze také psáti

$$2a_{15}^2 = a_5^2 - a_3\,.\,a_5 + a_5^2 - a_{10}^2\,;$$

že však zase

$$a_5^2 - a_{10}^2 = a_6^2\,,$$

jest také

$$(5) \qquad 2a_{15}^2 = a_5^2 - a_3 \,.\, a_5 + a_6^2 \,.$$

2. Ve čtyrúhelníku z tetiv *kbcd* jest dle věty Ptolemaeovy

$$\overline{kc} \,.\, \overline{bd} = \overline{cd} \,.\, \overline{kb} + \overline{bc} \,.\, \overline{kd}$$

čili

$$(6) \qquad \overline{kc} \,.\, a_6 = a_{15} \,.\, 2a_6 + a_{10} \,.\, a_3.$$

Ježto $\triangle\, kbc \sim \triangle\, cgb$, jest

$$\overline{kc} : \overline{kb} = \overline{cg} : \overline{cb}$$

nebo

$$\overline{kc} : 2a_6 = \frac{a_5}{2} : a_{10},$$

tedy

$$(7) \qquad \overline{kc} = \frac{a_5 \,.\, a_6}{a_{10}} \,.$$

Dosazením hodnoty (7) do (6) vyjde

$$\frac{a_5 \,.\, a_6^2}{a_{10}} = 2a_6 \,.\, a_{15} + a_3 \,.\, a_{10} \,,$$

z čehož konečně

$$(8) \qquad a_{15} = \frac{a_5 \,.\, a_6^2 - a_3 \,.\, a_{10}^2}{2a_6 \,.\, a_{10}} \,.$$

Dodatek. Je-li poloměr kružnice r, dostaneme substitucí známých hodnot

$$a_3 = r \,.\, \sqrt{3}, \qquad a_5 = r \,.\, \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \,,$$

$$a_6 = r, \qquad a_{10} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \,.\, r$$

do rovnice (4) nebo výhodněji do (8) po náležité redukci známý výraz

$$a_{15} = \frac{1}{4} r \,.\, (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}) = 0{\cdot}41582\, r.$$