Antonín Libický

O trojúhelníku, jehož strany tvoří řadu arithmetickou. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 2, 141--155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121921`

O trojúhelníku, jehož strany tvoří řadu arithmetickou.

Podává

Antonín Libický,
professor na Král. Vinohradech.

Předpokládejme o trojúhelníku ABC, že délky jeho stran a, b, c tvoří řadu arithmetickou, jejíž rozdíl buď d *); označíme-li $2m$ jeho stranu b, která má délku prostřední, bude strana nejkratší $a = 2m - d$ a nejdelší $c = 2m + d$. Ze známých vztahů o součtu a rozdílu kterýchkoliv dvou stran trojúhelníka plyne, že musí býti $d < m$. Je-li ve zvláštním případě $d = \frac{m}{2}$, jest $\triangle$ ABC pravoúhlým; podmínka tato vychází z rovnice

$$(2m + d)^2 = (2m - d)^2 + 4m^2,$$

která jest výrazem věty Pythagorovy pro takový trojúhelník.

Někdy bývá výhodno, vyjádřiti strany $\triangle$ ABC pomocí úhlu φ, daného rovnicí

$$\cos\varphi = \frac{d}{2m}. \tag{1}$$

Protože $d < m$, jest úhel ten vždy možný; krajní hodnoty jeho pro různé rozdíly d v uvedených mezích jsou $\varphi = R$ (pro $d = 0$) a $\varphi = 60^0$ (pro $d = m$). Potom lze psáti

$$\begin{aligned} a &= 2m - d = 2m\left(1 - \frac{d}{2m}\right) = 2m(1 - \cos\varphi) = 4m\sin^2\frac{\varphi}{2}, \\ b &= 2m = 4m\,.\,\frac{1}{2} = 4m\sin^2\frac{R}{2}, \\ c &= 2m + d = 4m\cos^2\frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Vizmež nejprve, jaké podoby nabývají základní věty trigonometrické pro trojúhelník, jehož strany tvoří řadu arithmetickou. Především věta sinová nám praví, že i siny úhlů ta-

*) Pokládáme tento rozdíl z příčin na snadě jsoucích za kladný.

kového trojúhelníka tvoří řadu arithmetickou. Rozdíl této řady d_1 má se k sinu některého úhlu, na př. β, jako rozdíl d ku protější straně b; jest tudíž

$$(3) \qquad d_1 = \frac{d}{2m} \sin\beta = \cos\varphi \sin\beta.$$

Poněvadž $\dfrac{2m}{\sin\beta} = 2r$, značí-li r poloměr kružnice trojúhelníku ABC opsané, jest též

$$(3a) \qquad d_1 = \frac{d}{2r}.$$

Z toho poznáváme, že úhly trojúhelníka, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, jsou v takovém vztahu, že z jednoho lze vypočítati oba ostatní. Podmínečnou rovnici, která platí o úhlech α, β, γ tohoto zvláštního trojúhelníka, odvodíme třeba takto:

Z věty sinové, napsané dle rovnic (2) ve tvaru

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin^2\frac{\varphi}{2} : \sin^2\frac{R}{2} : \cos^2\frac{\varphi}{2},$$

jde

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) : \left(\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{R}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\beta : \sin^2\frac{R}{2}.$$

Hledíce ku známým vzorcům

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} = 1, \qquad \sin^2\frac{R}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

přeměníme tuto úměru ve

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : 3 = \sin\frac{\beta}{2} : 1,$$

a z této úměry vychází hledaný vztah

$$(4) \qquad 3\sin\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Rovnici té lze dáti ještě jiné podoby; uvážíme-li, že

$$\frac{\beta}{2} = R - \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

tedy

$$\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

obdržíme též

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

čili

$$3\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = 1. \tag{4a}$$

Snadno odvodíme také tento tvar rovnice (4)

$$\sin\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \tag{4b}$$

Z rovnice (4a) vypočteme nejmenší úhel α trojúhelníka ABC, dán-li jeho úhel největší γ a naopak. Je-li vypočítati z daného úhlu β úhel α neb γ, použijeme jiné rovnice, kterou vyvodíme z věty Cagnoliovy. Kladouce v úměrách

$$(c-a):b = \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2},$$

$$(c+a):b = \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2},$$

za a, b, c po sobě $2m - d$, $2m$, $2m + d$, nalezneme

$$d:m = \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2},$$

$$2:1 = \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2},$$

a odtud

$$\begin{aligned} \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} &= \frac{d}{m}\cos\frac{\beta}{2} = 2\cos\varphi\cos\frac{\beta}{2}, \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} &= 2\sin\frac{\beta}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Známe-li úhel β, vyhledáme z druhé rovnice $\frac{\gamma-\alpha}{2}$ a poněvadž $\frac{\gamma+\alpha}{2}=R-\frac{\beta}{2}$, ustanovíme snadno oba úhly α a γ.

Dělením obou rovnic (5) vychází

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\cos\varphi\,;$$

z této rovnice vypočítáme úhel φ, dány-li jsou α a γ.

Je-li $\triangle ABC$ pravoúhlým, jest největší jeho úhel $\gamma=R$; tudíž dle (4a)

$$3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1,\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3},\quad \alpha=36^{0}52'12''.$$

Všechny trojúhelníky pravoúhlé, jichž strany tvoří řadu arithmetickou, jsou sobě podobny.

Pomocí vyvozených vzorců snadno se řeší základní úloha: řešiti trojúhelník, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, jsou-li dány jedna strana a jeden úhel. Vypočítáme nejprv uvedeným způsobem oba ostatní úhly a pak zbývající strany, při čemž můžeme použiti pomocného úhlu φ.

Podobně zjednoduší se známé vzorce trigonometrické plynoucí z věty cosinové, totiž

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{s-a},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{s-b},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{s-c},$$

kde značí

$$\varrho=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

poloměr kružnice trojúhelníku vnitř vepsané.

Dosadivše tu

$$s=3m,\quad s-a=m+d,\quad s-b=m,\quad s-c=m-d,$$

obdržíme pro tento poloměr výraz

$$\varrho=\sqrt{\frac{m^2-d^2}{3}}. \tag{6}$$

Lze tudíž z úseček $\varrho\sqrt{3}$, m a d sestrojiti trojúhelník pravoúhlý o přeponě m (jestiť vždy $m > d$). Budiž v tomto trojúhelníku ψ úhel ležící proti odvěsně $\varrho\sqrt{3}$; pro ten úhel platí

$$(7) \qquad \cos\psi = \frac{d}{m}, \quad \sin\psi = \frac{\varrho\sqrt{3}}{m}, \quad \operatorname{cotg}\psi = \frac{d}{\varrho\sqrt{3}}.$$

Krajní hodnoty úhlu ψ jsou: O pro $d = m$ a R pro $d = 0$. Z druhé rovnice (7) vyplývá

$$(6a) \qquad \varrho = \frac{m\sqrt{3}}{3}\sin\psi;$$

vložíce tuto hodnotu, jakož i $s - a = m + d$ do vzorce pro $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, obdržíme

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m\sqrt{3}\sin\psi}{3(m+d)} = \frac{\sqrt{3}\sin\psi}{3(1+\cos\psi)}$$

aneb, poněvadž

$$1 + \cos\psi = 2\cos^2\frac{\psi}{2}, \quad \sin\psi = 2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2},$$

též

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}\sin\frac{\psi}{2}}{3\cos\frac{\psi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}.$$

Obdobně najdeme pro poloviční úhly ostatní

$$(8) \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\psi,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}.$$

Znásobíce první a třetí z těchto rovnic, obdržíme opět rovnici (4a); k jinému vztahu mezi úhly α, β a γ trojúhelníka ABC přijdeme, sečteme-li převrácené hodnoty obou stran rovnice první a třetí. Jest totiž

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2},$$

tudíž

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{3}\left(\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right).$$

Součet $\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ na pravé straně této rovnice můžeme přeměniti takto:

$$\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}},$$

aneb, dbajíce známého vzorce goniometrického

$$\sin\psi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}},\text{*)}$$

též

$$\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{2}{\sin\psi}.$$

Tím obdržíme

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\psi}$$

čili, přihlížejíce ke druhému vzorci (8), konečně

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = 2\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

Jest tedy cotangenta polovičního prostředního úhlu trojúhelníka ABC arithmetickým středem cotangent obou polovičních úhlů ostatních. Jinak řečeno: V trojúhelníku, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, jsou též cotangenty polovičních úhlů vnitř-

---

*) Viz na př. ve Strnadově: „Geometrii pro vyšší gymnasia“ vzorec (34) na str. 190.

ních členy řady arithmetické. Řada tato jest ovšem klesající, je-li, jak předpokládáme, řada sinů celých úhlů rostoucí. Rozdíl její jest

$$d_2 = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sin\psi} - \operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}\right)$$

aneb, užijeme-li výše uvedeného vzorce pro $\sin\psi$, též

$$d_2 = \sqrt{3}\left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}\right) = -\sqrt{3}\,\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}.$$

Poněvadž

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}},$$

můžeme psáti

$$d_2 = -\sqrt{3}\operatorname{cotg}\psi,$$

a posléze, přihlížejíce ku třetímu vzorci (7),

$$d_2 = -\frac{d}{\varrho}. \tag{10}$$

Připojme tu ještě poznámku o prostředním úhlu trojúhelníka ABC. Rovnice

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\psi}$$

poučuje nás o tom, že musí $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} > \sqrt{3}$, ježto $\sin\psi < 1$; píšeme-li tuto nerovnost ve tvaru

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} > \operatorname{cotg} 30^0,$$

shledáváme, že jest $\beta < 60^0$, ježto β nepřesahuje 90^0. Je-li tedy daný úhel trojúhelníka ABC větší než 60^0, jest to největší jeho úhel; je-li daný úhel menší než 60^0, může to býti buď jeho úhel prostřední neb nej- menší.

Druhou základní úlohu: řešiti trojúhelník, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, dány-li jsou dvě strany jeho, lze provésti tak, že vypočítáme z daných stran veličiny m a d; jimi určen jest pomocný úhel ψ. Známe-li tento úhel, vyhledáme z rovnic (8) úhly α, β, γ.

Ku vypočtení *obsahu* $\triangle$ ABC užijeme vzorce

$$\triangle = \varrho s;$$

kladouce tu $\varrho = \frac{m\sqrt{3}}{3} \sin\psi$, $s = 3m$, obdržíme

$$\triangle = m^2\sqrt{3}\sin\psi. \tag{11}$$

Vzorce (6*a*), (8) a (11) poukazují k jisté souvislosti mezi $\triangle$ ABC a trojúhelníkem rovnostranným o straně $2m$, kterýž jest jedním krajním případem všech trojúhelníkův ABC, majících tutéž základnu $2m$ a příslušných různým hodnotám rozdílu d (je-li totiž $d = 0$). Abychom tuto souvislost poznali, položme prostřední stranou AC trojúhelníka ABC rovinu S, odchylenou od roviny R, v níž leží $\triangle$ ABC, o úhel $R - \psi$ a sestrojme v této rovině na straně AC trojúhelník rovnostranný ACM*) Výška tohoto trojúhelníka jest $v' = m\sqrt{3}$ a poloměr kružnice, jemu vnitř vepsané

$$\varrho' = \frac{v'}{3} = \frac{m\sqrt{3}}{3}.$$

Promítněme nyní vrchol M proti AC ležící na rovinu R; spojíme-li tento průmět M_1 s body A a C, obdržíme trojúhelník rovnoramenný ACM_1, který jest průmětem trojúhelníka rovnostranného ACM na R. Plocha tohoto průmětu rovná se dle (11) ploše trojúhelníka ABC; třetina jeho výšky na stranu AC spuštěné jest dle vzorce (6*a*) rovna poloměru ϱ.

Spojme dále bod A′, půlící stranu CM rovnostranného trojúhelníka ACM, s bodem A a promítněme také těžnici AA′ na rovinu R; průmětem bude těžnice AA'_1 trojúhelníka rovnoramenného ACM_1. U bodu A obdržíme trojhran, jehož hrany pro-

*) Příslušný výkres ku znázornění dalšího vyšetřování zhotoví si laskavý čtenář snadno.

cházejí body C, A' a A'_1; poněvadž rovina promítající těžnici AA' na R k této rovině jest kolmá, jest sférický trojúhelník tomu trojhranu příslušný pravoúhlým. Přepona jeho a jest

$$\sphericalangle A'AC = 30^0;$$

jedna odvěsna b jest úhel $A'_1AC = \beta'$, který tvoří těžnice AA'_1 rovnoramenného trojúhelníka ACM_1 se základnou AC a jeden úhel γ jest $R - \psi$, odchylka rovin R a S.

Známý vzorec sférické trigonometrie, platný pro trojúhelníky pravoúhlé:

$$\cos \gamma = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b$$

změní se v našem případě ve:

$$\sin \psi = \operatorname{cotg} 30^0 \operatorname{tg} \beta';$$

z něho plyne

$$\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} 30^0 \sin \psi$$

čili

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi .$$

Srovnajíce tento výsledek s druhou rovnicí (8) vidíme, že

$$\beta' = \frac{\beta}{2} .$$

Tudíž úhel, který tvoří v trojúhelníku rovnoramenném ACM_1 těžnice příslušná ku rameni se základnou, rovná se polovičnímu úhlu prostřednímu $\triangle$ ABC.

Jednoduché jsou také vztahy *poloměrů kružnic vepsaných vně* trojúhelníku ABC. Abychom je vyšetřili, opatříme si pro tyto poloměry ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 výrazy, ve kterých se vyskytují veličiny m a ψ. K tomu cíli užijeme vzorců

$$\varrho_1 = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} , \qquad \varrho_2 = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} , \qquad \varrho_3 = s \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} ,$$

jichž odůvodnění nepodléhá žádným obtížím; kladouce v nich nejprve $s = 3m$, nalezneme

$$(12) \quad \varrho_1 = 3m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} , \qquad \varrho_2 = 3m \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} , \qquad \varrho_3 = 3m \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} .$$

Nahradíme-li tu ještě

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

hodnotami, danými rovnicemi (8), obdržíme

$$(13) \quad \varrho_1 = m\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \quad \varrho_2 = m\sqrt{3}\sin\psi, \quad \varrho_3 = m\sqrt{3}\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}.$$

Poněvadž $\varrho_2 = m\sqrt{3}\sin\psi = v'\sin\psi$, jest prostřední poloměr ϱ_2 roven výšce trojúhelníka rovnoramenného ACM_1, o němž jsme výše pověděli, že jest průmětem rovnostranného trojúhelníka ACM na rovinu R.

Připomeneme-li si, že tato výška rovná se výšce trojúhelníka ABC spuštěné na stranu prostřední, můžeme říci: Poloměr rostřední kružnice vně vepsané trojúhelníku, jehož strany tvoří padu arithmetickou, rovná se prostřední výšce jeho.

Ze vzorců (13) a (6a) vyplývají tyto vztahy:

$$(14) \quad \begin{gathered} \varrho_2 = 3\varrho, \quad \varrho_1\varrho_3 = 3m^2 = v'^2, \\ \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{2}{\varrho_2}. \end{gathered}$$

O významu prvních dvou těchto rovnic netřeba se šířiti; třetí rovnice nám praví, že prostřední poloměr ϱ_2 jest harmonickým středem obou ostatních poloměrů ϱ_1 a ϱ_3. Tudíž převrácené hodnoty poloměrů kružnic vně $\triangle ABC$ opsaných tvoří též řadu arithmetickou. Rozdíl této řady jest:

$$d_3 = \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{3m}\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

aneb, poněvadž dle (10)

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = d_2 = -\frac{d}{\varrho},$$

$$(15) \quad d_3 = -\frac{d}{3m\varrho}.$$

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlým ($\gamma = R$), jest

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2},$$

tedy dle vyvozených vzorců

$$\varrho = \frac{m}{2}, \quad \varrho_1 = m, \quad \varrho_2 = \frac{3}{2} m, \quad \varrho_3 = 3m.$$

V tomto případě jest však $\frac{m}{2}$ rovno rozdílu d řady arithmetické, kterou tvoří strany trojúhelníka; proto jest též

$$\varrho = d, \quad \varrho_1 = 2d, \quad \varrho_2 = 3d, \quad \varrho_3 = 6\mathrm{d}.$$

Z těchto rovnic plyne úměra

$$\varrho : \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = 1 : 2 : 3 : 6.$$

Úloha. Řešiti trojúhelník, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, dány-li jsou dva poloměry kružnic vně vepsaných, na př. ϱ_1 a ϱ_3.

Z druhé rovnice (14) vychází

$$m = \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_3}{3}},$$

první neb třetí rovnice (13) poskytuje nám úhel ψ; znajíce m a ψ vypočítáme snadno všechny prvky trojúhelníka ABC.

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC ustanovíme ze známého vzorce

$$r = \frac{abc}{4\triangle},$$

dosadíme-li v něm

$$a = 4m \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad b = 2m, \quad c = 4m \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\Delta = m^2 \sqrt{3} \sin \psi.$$

Tím obdržíme

$$(16) \quad r = \frac{8m \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3} \sin \psi} = \frac{2m \sin^2 \varphi}{\sqrt{3} \sin \psi} = \frac{2}{3} m\sqrt{3}\, \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \psi};$$

výraz

$$\frac{2}{3} m\sqrt{3}$$

značí tu poloměr r' opsaný rovnostrannému trojúhelníku ABM o straně $2m$. Na základě rovnic (1) a (7) vyjádříme snadno $\sin^2\varphi$ a $\sin\psi$ veličinami m a d; i bude pak

$$(16a) \qquad r = \frac{4m^2 - d^2}{2\sqrt{3\,(m^2 - d^2)}}.$$

Ve vzorci (16) vyskytují se oba úhly φ i ψ; jeden z nich na př. ψ můžeme vyloučiti, majíce na zřeteli, že jest dle (1) a (7)

$$\cos\psi = 2\cos\varphi.$$

Zdvojmocníme-li a zavedeme-li $\sin\psi$, obdržíme

$$1 - \sin^2\psi = 4\cos^2\varphi,$$

z čehož

$$\sin^2\psi = 1 - 4\cos^2\varphi = 4\left(\frac{1}{4} - \cos^2\varphi\right).$$

Poněvadž jest

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2},$$

můžeme též psáti

$$\sin^2\psi = 4\,(\sin^2 30^0 - \cos^2\varphi).$$

Hledíce ku vzorci goniometrickému

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$$

nalezneme

$$\sin^2\psi = -4\cos(\varphi + 30^0)\cos(\varphi - 30^0),$$

a posléze, ježto

$$\cos(\varphi + 30^0) = -\sin(\varphi - 60^0),$$

$$(17) \qquad \sin^2\psi = 4\sin(\varphi - 60^0)\cos(\varphi - 30^0).$$

Tedy jest poloměr kružnice opsané též určen výrazem

$$(16b) \qquad r = r'\frac{\sin^2\varphi}{2\sqrt{\sin(\varphi - 60^0)\cos(\varphi - 30^0)}}.$$

Přihlédněme nyní k *výškám* trojúhelníka, jehož strany tvoří řadu arithmetickou. Ze známé úměry

$$a : b : c = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2} : \frac{1}{v_3}$$

plyne: Převrácené hodnoty výšek takového trojúhelníka tvoří řadu arithmetickou. Jinak řečeno: Prostřední výška v_2 trojúhelníka ABC jest harmonickým středem výšek v_1 a v_3.

Z rovnice

$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}\right) \tag{18}$$

můžeme vypočítati jednu výšku, dány-li jsou obě ostatní.

Položíce v rovnici

$$av_1 = 2\Delta$$

za a a Δ hodnoty

$$4m \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{a} \quad m^2\sqrt{3} \sin \psi,$$

obdržíme

$$v_1 = m\sqrt{3} \frac{\sin \psi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Podobným způsobem odvodíme

$$\begin{aligned} v_2 &= m\sqrt{3} \sin \psi, \\ v_3 &= m\sqrt{3} \frac{\sin \psi}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Ve vzorcích těch můžeme opět $\sin \psi$ nahraditi výrazem, plynoucím z rovnice (17).

Užijme nyní vyvozených vzorců, abychom ustanovili rozdíl d_4 řady arithmetické, kterou tvoří převrácené hodnoty výšek $\triangle$ABC; jestiť

$$2d_4 = \frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_1} = \frac{2\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}{m\sqrt{3} \sin \psi} = \frac{2 \cos \varphi}{m\sqrt{3} \sin \psi};$$

píšeme-li tu $\cos \psi$ místo $2 \cos \varphi$ a nahradíme-li ještě $\operatorname{cotg} \psi$ dle třetí rovnice (7) zlomkem

$$\frac{d}{\varrho\sqrt{3}},$$

obdržíme

$$(20) \qquad d_4 = \frac{d}{6\varrho m},$$

tedy jest co do absolutní hodnoty d_4 polovice rozdílu d_3.

Dělíce rovnici

$$\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_1} = \frac{\operatorname{cotg}\psi}{m\sqrt{3}}$$

rovnicí

$$\frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_1} = \frac{2}{v_2} = \frac{2}{m\sqrt{3}\sin\psi},$$

dostaneme ještě vzorec

$$\frac{v_1 - v_3}{v_1 + v_3} = \frac{\cos\psi}{2} = \cos\varphi = \frac{d}{2m}.$$

Úloha. Řešiti trojúhelník, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, dány-li jsou dvě jeho výšky, na př. v_1 a v_3.

Z poslední rovnice vyhledáme úhel ψ; známe-li tento úhel, najdeme pomocí druhé rovnice (19) m, když jsme dříve dle (18) vypočítali v_2.

Také bychom mohli použiti vzorce

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{v_3}{v_1},$$

který vznikne dělením první a třetí rovnice (19).

Přehled. Při posavadním vyšetřování trojúhelníka ABC vyskytly se nám tyto řady arithmetické:

1. řada délek jeho stran o rozdílu d;

2. řada sinů vnitřních úhlů o rozdílu

$$d_1 = \frac{d}{2r} = \frac{d\sqrt{3(m^2 - d^2)}}{4m^2 - d^2};$$

3. řada cotangent polovičních úhlů vnitřních o rozdílu

$$d_2 = -\frac{d}{\varrho} = -\frac{d\sqrt{3(m^2-d^2)}}{m^2-d^2};$$

4. řada převrácených hodnot poloměrů kružnic vně vepsaných o rozdílu

$$d_3 = -\frac{d}{3m\varrho} = -\frac{d\sqrt{3(m^2-d^2)}}{3m(m^2-d^2)};$$

5. řada převrácených hodnot jeho výšek o rozdílu

$$d_4 = \frac{d}{6\varrho m} = \frac{d\sqrt{3(m^2-d^2)}}{6m(m^2-d^2)}.$$

(Dokončení.)

Úlohy.

Úloha 31.

Rozdělíme-li šesticiferné číslo ve dvě skupiny po 3 cifrách, liší se jedna skupina od druhé opačným pořádkem cifer. Součet dvojmocí obou skupin jest o 46359 menší než trojnásobné číslo dané. Rozdělíme-li číslo toto ve 3 skupiny dvojmístné, mají se k sobě jako 4 : 11 : 7. Které jest to číslo?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 32.

Kterého čísla dvojmoc shoduje se s číslem tím ve dvou posledních číslicích?

Týž.

Úloha 33.

Který jest součet a) dvojmocí, b) čtvrtých mocnin všech kořenů rovnice

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0?$$

Týž.