O trajektoriích průsečíkových.

Napsal

Bedřich Procházka,
docent na c. k. české vysoké škole technické v Praze.

(Dokončení.)

Část druhá.

I. Jednoduchý pohyb otáčení neproměnného útvaru rovinného.

14. *O rychlostech při otáčení útvaru rovinného.*

Otáčí-li se neproměnný útvar rovinný kolem určitého středu, pak vytvořují všechny body soustředné křivky kruhové, jichž poloměry jsou dány vzdálenostmi jejich od středu otáčení. Při stejnoměrném otáčení jest dán vztah dráhy s libovolného bodu v čase t s rychlostí v se pohybujícího vzorem:

$$s = vt.$$

Probíhá-li bod a křivku kruhovou v poloměru r rychlostí v, pak všechny body na poloměru tomto se nalezající vytvořují podobné oblouky kruhové rychlostmi, které jsou poměrny k jich vzdálenostem od středu otáčení, tak že, je-li ω rychlost bodu téhož poloměru ve vzdálenosti rovné jednotce, máme pro rychlost v bodu a

$$v = \omega \cdot r. \tag{1}$$

Rychlost ω zove se *rychlostí úhlovou*.

Otáčí-li se rovinný útvar S kol středu a, pak rychlosti $\overline{aa_v}$ a $\overline{bb_v}$ dvou bodů a a b (obr. 18.), v tečnách ku příslušným křivkám kruhovým vytknuté, mají se k sobě jako vzdálenosti $\overline{ao}$, $\overline{bo}$ a bodu spadajícímu se středem otáčení přísluší rychlost rovna nulle. Za příčinou podobnosti trojúhelníků oaa_v a obb_v jsou také trojúhelníky oab a oa_vb_v podobny. Z toho plyne věta:

Rovinný útvar S_v *určený meznými body* a_v, b_v ... *rychlostí* $\overline{aa_v}$, $\overline{bb_v}$, ... *jest podoben útvaru pohybujícímu se* S, *jehož body* a, b, ... *tyto rychlosti mají, a bod* o *jest bodem dvojným těchto dvou podobných soustav.*

Mysleme si rychlosti $\overline{aa_v}$, $\overline{bb_v}$, $\overline{cc_v}$, ... bodů a, b, c, ... systemu S v stejném směru o 90^0 otočeny, tak že padnou na přímky $\overline{ao}$, $\overline{bo}$, $\overline{co}$,... (obr. 18.), obdržíme délky $\overline{aa_k}$, $\overline{bb_k}$, $\overline{cc_k}$,..., kteréž *kolmými rychlostmi**) respekt. bodu a, b, c..., zváti budeme.

Poněvadž se tyto rychlosti mají k sobě jako příslušné vzdálenosti od středu rotace, plyne věta:

Rovinný útvar S_k *mezných bodů* a_k, b_k, c_k .. *kolmých rychlostí jest podoben* a *podobně položen ku rovinnému útvaru* S, *jehož body* a, b, c . . . *tyto kolmé rychlosti mají, a střed otáčení jest středem podobnosti obou těchto rovinných útvarů.*

Je-li rychlost úhlová rovinného útvaru rovna jednotce, spadne mezný bod kolmých rychlostí do středu otáčení a útvar S_k smrští se v jediný bod, totožný se středem otáčení.

Přesvědčíme se, že zavedením kolmých rychlostí se mnohé konstrukce zjednoduší.

II. Trajektorie průsečíkové při otáčení dvou rovinných útvarů kolem různých středů.

15. *Trajektorie průsečíkové při pohybu rotačním.*

Trajektoriím průsečíkovým při současném posouvání dvou rovinných útvarů linearných ve dvou různých drahách odpovídají *trajektorie průsečíkové při současném otáčení dvou linearných útvarů rovinných kolem dvou různých středů.*

Mějme především na zřeteli případ nejjednodušší, kdy se otáčejí dvě přímky G, H respekt. rovinných útvarů ${}^1S$, ${}^2S$ kolem dvou pevných bodů ${}^1s$, ${}^2s$ určitého rovinného v klidu se nalezajícího útvaru Σ. Tu třeba rozeznávati případy, kdy přímky G, H svými příslušnými středy otáčení ${}^1s$, ${}^2s$ procházejí aneb jdou mimo tyto body.

Konstrukce tečny, normaly a středu křivosti trajektorie prů-

*) *Dr. L. Burmester:* L. d. K., pag 23.

sečíkové při pohybu otáčení dvou přímek kolem příslušných bodů, jimiž zároveň procházejí.

Konstrukce tečny. Předpokládejme, že se přímky G, H otáčejí respekt. kol bodů ${}^1s$, ${}^2s$ (obr. 19. *a*). Přijde-li v jisté době přímka G, při otáčení kol bodu ${}^1s$ do polohy ${}^1G$, dospěje přímka H současně při otočení kol bodu ${}^2s$ do polohy ${}^1H$; přímky ${}^1G$, ${}^1H$ protínají se v bodu ${}^1a$ křivky průsečíkové A.

Je-li však doba, po kterou se otáčení děje, nekonečně krátkou (dt), pak přijde bod přímky G s bodem a spadající při otáčení této přímky do soumezné polohy ${}^1a'$ a bod přímky H spadající momentaně s týmž bodem, dospěje při otáčení této přímky do soumezné polohy ${}^1a''$. Poněvadž jsou prvky $\overline{a^1a'}$, $\overline{a^1a''}$ nekonečně malé, můžeme je považovati za kolmé respekt. ku přímkám G, H a tudíž i přímky ${}^1G$, ${}^1H$ za rovnoběžné s přímkami G, H.

Sestrojíme-li ku čtyřúhelníku $a^1a'{}^1a^1a''$ (obr. 19. *b*) podobný a podobně položený čtyřúhelník $aa_v^Ga_va_v^H$ tak, že stejnolehlé strany se mají k sobě jako $dt:1$, pak jsou strany

$$\overline{aa_v^G} = \frac{\overline{a^1a'}}{dt} = {}^1v, \quad \overline{aa_v^H} = \frac{\overline{a^1a''}}{dt} = {}^2v.$$

a konečně jest úhlopříčna čtyřúhelníka tohoto:

$$\overline{aa_v} = \frac{\overline{a^1a}}{dt} = v.$$

Úsečka $\overline{aa_v^G}$ v kolmici ku přímce G představuje co do velikosti i směru rychlost ${}^1v$ bodu přímky G spadajícího s bodem a. Podobně úsečka $\overline{aa_v^H}$ v kolmici ku přímce H repraesentuje co do velikosti i směru rychlost ${}^2v$, kterou má bod přímky H spadající s bodem a, a konečně $\overline{aa_v}$ v tečně T_A křivky průsečníkové A udává velikost a směr rychlosti v, kterou se pohybuje bod a v této křivce.

Z toho plyne následovní konstrukce tečny křivky průsečníkové:

Přísluší-li bodu a jakožto bodu přímky G při otáčení kol jejího bodu ${}^1s$ rychlost $\overline{aa_v^G} \perp G$ a témuž bodu jakožto bodu

přímky H při otáčení kolem jejího bodu ^2s *rychlost* $\overline{aa_v^H} \perp H$, *pak obdržíme rychlost* $\overline{aa_v}$ *v křivce průsečníkové A se pohybujícího průsečíku a obou přímek G, H, když vedeme body* a_v^G, a_v^H *respekt. ku přímkám G, H rovnoběžky; tyto přímky protínají se v koncovém bodě* a_v *rychlosti* $\overline{aa_v}$ *a přímka tato jest zároveň tečnou křivky A.*

Konstrukce normaly. Použijeme-li na místě rychlostí $\overline{aa_v^G}$, $\overline{aa_v^H}$ rychlosti kolmé $\overline{aa_k^G}$, $\overline{aa_v^H}$ (obr. 20.) respekt. v přímkách G a H (článek 14.) obdržíme, jak ze shodnosti 4 úhelníků $aa_v^G a_v a_v^H$ (obr. 19b.) a $aa_k^G a_k a_k^H$ (obr. 20.) vyplývá, vztýčíme-li v bodech a_k^G, a_k^H respekt. ku přímkám G, H kolmice, které se protínají v bodu a_k, ve spojnici tohoto bodu s bodem a kolmou rychlost $\overline{aa_k} \perp \overline{aa_v}$ udávající zároveň normalu N_A křivky průsečíkové A.

Za příčinou zjednodušení konstrukce předpokládejme, že přímka G se momentaně otáčí rychlostí úhlovou $\omega_G = 1$, pak představuje úsečka $\overline{a^1s}$ kolmou rychlost bodu přímky G s bodem a spadajícího (článek 14.) a kolmou rychlost $\overline{aa_k^H}$ obdržíme, (obr. 21.) zvolíce rychlost úhlovou ω_H, s kterou se přímka H otáčí, rovnou $n \,.\, \omega_G$ dle rovnice 1. (článek 14.):

$$\frac{\overline{aa_k^H}}{\overline{a^2s}} = \omega_H = n \,.\, \omega_G = n. \tag{2}$$

Obdržíme tudíž normalu $N_A = \overline{aa_k}$ ku křivce průsečíkové A, vztýčíce ku a^1s kolmici ^1sa_k a ku aa_k^H kolmici $a_k^H a_k$ a jejich průsečík a_k s bodem a spojíce.

Zvolíme-li rychlost úhlovou ω_G, ω_H respekt. přímek G, H konstantní, pak jest také poměr

$$\frac{\omega_G}{\omega_H} = n$$

konstantní a v tomto případě můžeme také *střed křivosti* trajektorie průsečíkové sestrojiti.

Konstrukce středu křivosti. Střed křivosti s trajektorie průsečíkové určíme jakožto bod dotyčný normaly N_A s její křivkou obalovou t. j. s evolutou křivky A.

Abychom tento bod dotyčný určili, potřebujeme rychlosti dvou průsečíků, které pohybující se normala se dvěma křivkami tvoří.*)

Za takové dvě křivky zvolíme trajektorii A a pak křivku B, kterou vytvořuje bod a_k při pohybu normaly N_A.

Kolmou rychlost $\overline{aa_k}$, kterou se pohybuje bod a v trajektorii A, jsme právě určili, a zbývá konstruovati ještě kolmou rychlost bodu a_k v křivce B. Abychom tuto rychlost určili, považujeme bod a_k jakožto průsečík přímek ${}^1sa_k$ a $a_k^H a_k$, který se při rotaci přímek G, H také určitým způsobem pohybuje.

Poněvadž přímka sa_k stále při stejnoměrné rotaci přímky G k této kolmo stojí a proto tutéž rychlost úhlovou rovnou jednotce obsahuje, představuje úsečka $\overline{sa_k}$ kolmou rychlost bodu přímky sa_k s bodem a_k spadajícího.

Abychom také rychlost bodu přímky $a_k^H a_k$ s týmž bodem a_k spadajícího určili, budeme míti zření k tomu, že přímka $a_k^H a_k$ nejenom se otáčí kolem bodu ${}^2s$, nýbrž se současně s bodem a_k^H posouvá. Rychlost bodu přímky $a_k^H a_k$ spadajícího s bodem a_k plyne jakožto výslednice těchto obou rychlostí bodu a_k, které jemu přísluší při rotaci přímky $a_k^H a_k$ kolem bodu ${}^2s$, a při translaci ve směru přímky H.

Abychom prvou komponentu $\overline{a_k a_k'} = n \,.\, \overline{a_k {}^2s}$ určili, spojíme (obr. 21.) bod a_k s bodem ${}^2s$ a protneme tuto spojnici rovnoběžkou $a_k^H a_k'$ bodem a_k^H s normalou N_A vedenou v bodě a_k'.

Druhou t. j. translační rychlost $a_k a_k''$, která se rovná rychlosti translační bodu a_k^H v přímce H obdržíme následujícím způsobem:

Rychlost $\overline{a_k^H a_{k'}^H}$ bodu a_k^H jest dle rovnice

$$\overline{aa_k^H} = n \,.\, \overline{a^2s},$$

vyplývající z rovnice (2), (tohoto článku) rovna $(1 - n)$násobné rychlosti $\overline{a_k^H a_k}$, kterou se posouvá bod a v přímce H.

Abychom odůvodnili tento vztah:

*) Tamtéž, pag. 64.

$$\overline{a_k^H a_{k'}^H} = (1-n)\overline{a_k^H a_k},$$

přihlédněme k následnímu obecnějšímu případu: Přímka P (obr. 22.) jistého rovinného útvaru ^2S otáčí se kolem bodu p pevného rovinného útvaru ^1S a protíná pevné křivky A, B resp. v bodech a, b. Vyhledejme kolmou rychlost bodu c, jehož poloha na přímce pohyblivé P jest tím určena, že $\overline{ac} = \overline{pb}$.

Poněvadž rychlost bodu c jest výsledkem rotace kolem okamžitého středu otáčení a' pohyblivého útvaru rovinného ^2S a translace v přímce P, sestrojíme jeho kolmou rychlost na základě kolmých rychlostí, které náleží bodu c při prvém a druhém pohybu.

Když sestrojíme normalu $N_a \equiv aa'$ v bodu a křivky A a v bodu p vztýčíme kolmici $P' \equiv \overline{pa'}$ ku přímce P, pak obdržíme ve průsečíku a' těchto přímek okamžitý střed otáčenl pohyblivého útvaru rovinného ^2S. Předpokládejme, že se děje otáčení tohoto útvaru rovinného ^2S rychlostí rovnou jednotce, pak představuje úsečka $\overline{ca'}$ kolmou rychlost onoho bodu útvaru ^2S, který momentaně s bodem c spadá.

Poněvadž translační rychlost tohoto bodu ve směru přímky P se oné bodu b v téže přímce rovná, sestrojíme především tuto rychlost. Za tím účelem sestrojíme v bodu b normalu $N_b \equiv bb'$ křivky B, která protíná dříve sestrojenou přímku P' v bodu b'. Úsečka $\overline{pb'}$ představuje pak kolmou rychlost $\overline{cc'} \# \overline{pb'}$, kterou má bod přímky P spadající momentaně s bodem c.

Pomocí rovnoběžníka rychlostí $ca'c_kc'$ obdržíme v jeho úhlopříčně $\overline{cc_k}$ kolmou rychlost bodu c a zároveň normalu N_c křivky C bodem c vytvořené.

Jednodušeji však docílíme kolmou rychlost tuto, když úsečku pb' na přímku P' od bodu a' v témže směru přeneseme a nalezený bod c_k spojíme s bodem c. Při tom představuje úsečka $\overline{pc_k}$ kolmou rychlost, s kterou se bod c pohybuje v přímce P.

Když však jest poloha bodu c přímky P tak určena, že $\overline{ac} = -n.pa$, pak určují příslušné body b křivku B, kteráž jest vzhledem ku bodu ^2s jakožto středu podobnosti s křivkou A podobna a podobně položena a úsečka $pb' = n.\overline{pa'}$ představuje kolmou rychlost bodu b v přímce P (obr. 23.).

Nanesouce nyní tuto úsečku $\overline{pb'}$ od bodu a' tentokrát v opáčném směru na přímku P', obdržíme bod c_k a v úsečce $\overline{cc_k}$ kolmou rychlost bodu c. Úsečka $\overline{pc_k} = (1 - n)\overline{pa'}$ repraesentuje pak výslední rychlost, kterou se bod c v přímce P posouvá. Jestli však úsečka $\overline{ac} = -n \, . \, \overline{pa}$ zároveň představuje kolmou rychlost bodu a při rotaci přímky P kolem bodu p, pak obdržíme jak patrno kolmou rychlost $\overline{cc'_k}$, kterou se bod c v přímce P šine, když přímku $ce \perp ap$ sestrojíme a úsečku $\overline{ec'_k} = -n \, . \, \overline{ce}$ učiníme nebo když průsečíkem f přímek $cc_k \parallel aa'$ a ep vedeme přímku fc'_k rovnoběžně s přímkou ap.

Z konstrukce této vyplývá, že

$$\overline{cc'_k} = (1 - n)\overline{ce}.$$

Týž pohyb však vykonává bod a^H_k v přímce H (obr. 21.) se nalezající a proto obdržíme jeho translační rychlost $\overline{a^H_k a^H_{k'}} = (1 - n)\overline{a^H_k a_k}$ týmž způsobem, vedouce $a'_k a^H_k$, rovnoběžně ku přímce H až protne přímku $a_k a^H_k$.

Naneseme-li nyní úsečku $\overline{a^H_k a^H_{k'}}$ (obr. 21.) od bodu a_k na prodlouženou přímku $a^H_k a_k$, pak obdržíme rychlost translační $\overline{a_k a_{k''}}$ bodu a_k jakožto jeho druhou hledanou složku rychlosti.

Pomocí rovnoběžníka rychlostí $a_k a'_k a^1_k a''_k$, nad oběma složkami $\overline{a_k a'_k}$, $\overline{a_k a''_k}$ sestrojeného obdržíme výslednou rychlost $\overline{a_k a^1_k}$ bodu přímky $a_k a^H_k$ s bodem a_k spadajícího.

Vztýčíme-li nyní v bodě ${}^1s$ ku přímce $a_k {}^1s$ kolmici, která s přímkou G spadá, a spustíme-li s bodu a^1_k na přímku $a_k a^H_k$ kolmici $H' \equiv a^1_k a^2_k$, která zároveň s přímkou H jest rovnoběžna, pak obdržíme v průsečíku obou těchto kolmic bod a^2_k,*) který s bodem a_k spojen rychlost $\overline{a_k a^2_k}$ bodu a_k v křivce B vyjadřuje.

Jsou-li nyní obě kolmé rychlosti $\overline{a a_k}$, $\overline{a_k a^2_k}$ bodů a, a_k normaly N_A dány, pak vedeme (obr. 21.), abychom střed křivosti křivky A určili, $a_k a^3_k \perp N$, $aa^3_k \parallel a_k a^2_k$ a potom spojíme body a^2_k, a^3_k přímkou, která normalu N_A ve středu křivosti s křivky A protíná**).

16. Ačkoliv se pomocí kolmých rychlostí střed křivosti

---

*) Tamtéž, pag. 56.

**) Tamtéž, pag. 64—65.

průsečíkových snadněji dociluje, přece *budeme tento střed křivosti za příčinou mnohých zajímavých výsledků také pomocí obecných rychlostí sestrojovati.*

Když průsečíku a (obr. 24.) přímek G, H jakožto bodu přímky G přísluší rychlost $\overline{aa_v^G}$ a jakožto bodu přímky H rychlost $\overline{aa_v^H}$, pak obdržíme rychlost aa_v bodu a v trajektorii průsečíkové A se pohybujícího, když vedeme body a_v^G, a_v^H respekt. ku přímkám G, H rovnoběžky (konstrukce tečny trajektorie průsečíkové, článek 14.), které se protínají v bodu koncovém a_v rychlosti $\overline{aa_v}$ průsečíku a a přímka $\overline{aa_v}$ jest tečnou trajektorie průsečíkové A bodu a.

Předpokládejme především, že rychlost úhlová

$$\omega_G = 1, \quad \text{a} \quad \omega_H = n.\,\omega_G = n,$$

pak bude rychlost bodu a respekt jakožto bodu přímek G, H, vyjádřena úsečkami $\overline{aa_v^G} = \overline{a\,{}^1s}$ a $\overline{aa_v^H} = n.\overline{a\,{}^2s}$. (V obraze 24. bylo zvoleno $n = \frac{1}{3}$).

Abychom střed křivosti s křivky A v bodě jejím a určili, pokládáme jej za střed otáčení tečny T_A, která se rychlostí $\overline{aa_v}$ v sobě posouvá, a jejíž bod a_v se zároveň otáčí rychlostí $\overline{a_va_v^n} \perp T_A$ kolem bodu a*).

Určíme-li si rychlost $\overline{a_va_v^n}$, kterou se bod a_v tečny T_A kol bodu a otáčí, můžeme pak použíti známé ve článku 8. uvedené konstrukce ku docílení středu křivosti s_A křivky A.

Abychom tuto rychlost $\overline{a_va_v^n}$ v našem případě (obr. 24.) určili budeme následovně pokračovati:

Především určíme rychlost, kterou se pohybuje bod a_v jakožto průsečík přímek $a_v^Ga_v \parallel G$, $a_v^Ha_v \parallel H$. Za tím účelem odvodíme rychlosti bodů a_v^G, a_v^H, které se při otáčení přímek G, H také s jistými rychlostmi pohybují.

Abychom určili rychlost, kterou se pohybuje bod a_v^G, uvažme, že se tento bod na jednom rameni aa_v^G pravého úhlu ${}^1saa_v^G$ — jehož druhé rameno stále pevným bodem ${}^1s$ prochází a jehož

*) Tamtéž, pag. 24.

vrchol a v tečně T_G se posouvá, — se tak pohybuje, že úsečka $\overline{aa_v}$ proměnlivé úsečce $\overline{a^1s}$ stále rovna zůstává.

Kolmou rychlost bodu a_v^G určíme, přihlížejíce k následujícímu obecnějšímu případu:

V jistém pevném útvaru rovinném Σ (obr. 25.) nalézají se dvě křivky A, B a bod p, Pohyb jiného útvaru rovinného ^1S jest tím určen, že se vrchol a jistého neproměnlivého úhlu α po křivce A pohybuje, a že jedno z jeho ramen stále pevným bodem p prochází a křivku B v bodě b protíná. Na druhém rameni R úhlu α posouvá se zároveň bod c tak, že vzdálenost $\overline{ca}$ při tomto pohybu stále rovna zůstává úsečce $\overline{pb}$.

Poněvadž pohyb bodu c jest výsledkem otáčení rovinného útvaru ^1S úhel α obsahujícího kolem určitého okamžitého středu otáčení a' a pošinutí jeho v rameni R, obdržíme kolmou rychlost $\overline{cc_k}$ bodu c na základě rychlostí tohoto bodu, které na prvém a druhém pohybu závisly jsou.

Sestrojíme-li v bodu a křivky A normalu $N_a \equiv aa'$ a v bodu p vztýčíme ku přímce P kolmici $P' \equiv pa'$, obdržíme v průsečíku a' těchto přímek okamžitý střed otáčení a' rovinného útvaru ^1S. Předpokládáme-li, že úhlová rychlost otáčení této soustavy rovna jednotce, pak představuje úsečka $\overline{ca'}$ kolmou rychlost bodu c vzhledem ku pohybu otáčení rovinného útvaru ^1S kolem bodu a'.

Poněvadž rychlost pošinutí bodu c v rameni R úhlu α rovna rychlosti, jakou se posouvá bod b v rameni P, bude třeba tuto rychlost bodu b sestrojiti. Za tím účelem sestrojíme v bodu b křivky A normalu $N_b \equiv bb'$, která protíná již dříve sestrojenou přímku P' v bodu b'. V úsečce $\overline{pb'}$ máme pak kolmou rychlost bodu a v rameni P a když sestrojíme úsečku $\overline{cd} \perp R$ a rovnou úsečce $\overline{pb'}$, obdržíme kolmou rychlost bodu c v rameni R. Úhlopříčna $\overline{cc_k}$ rovnoběžníka $ca'c_kd$, z obou kolmých rychlostí bodu c sestrojeného, představuje pak výslednou rychlost kolmou bodu tohoto, a udává zároveň normalu Nc v bodu c křivky bodem tímto vytvořené C.

Z konstrukce té jest patrno, že úhel $b'a'c_k$ jest roveň úhlu α a že úsečka $\overline{a'c_k} = \overline{pb'}$ na rameni R kolmo stojí.

Z toho plyne, že obdržíme také kolmou rychlost $\overline{cc_k}$ bodu c a zároveň normálu Nc v bodu c křivky C tímto bodem vytvořené, když *sestrojíme normaly obou křivek A, B respekt. v bodech a, b a učiníme $pb' \perp pb$, $\sphericalangle b'a'c_k = \alpha$, a $\overline{a'c_k} = \overline{pb'}$.* Z tohoto pozorovaného pohybu útvaru ^1S (obr. 25.) vyplývá také následní zvláštní případ:

Když dáme při takovémto vytvoření křivky C oběma křivkám A, B spadnouti (obr. 26.) a úhel α úhlem pravým učiníme, pak spadnou také normaly N_a, N_b v jednu přímku, a body a', b' v jeden bod; a bod c_k obdržíme, když učiníme $\overline{a'c_k} \perp p'a'$.

Jest patrno, že zákon výtvarný této křivky C úplně souhlasí s oným té křivky, kterou bod a^G_v (obr. 24.) vytvořuje, a jejíž normalu jakožto kolmou rychlost dle toho následovně sestrojíme:

Sestrojíme v bodě a_k, jakožto bodu průsečném přímek $N_A \perp T_A$ a $^1sa_k \perp G$, kolmici $a_k a^G_{k'}$, na kterou naneseme úsečku $\overline{a_k a^G_{k'}} = \overline{^1sa_k}$. Pak obdržíme v úsečce $\overline{a^G_v a^A_{k'}}$ kolmou rychlost bodu a^G_v, ze které odvodíme obyčejnou rychlost $\overline{a^G_v a^G_{v'}} \perp \overline{a^G_v a^G_{k'}}$, která také bodu a_v přísluší, vyjadřena jsouc úsečkou $\overline{a_v a^G_{v''}} \;\#\; \overline{a^G_v a^G_{v'}}$. Zároveň otáčí se bod a_v kolem bodu ^1s s rychlostí $\overline{a_v a^G_{v'}} = \overline{^1sa_v}$; proto pohybuje se bod a_v s výslednou rychlostí $\overline{a_v a^G_{v'''}}$, kterou obdržíme jakožto úhlopříčnu rovnoběžníka rychlostí $a_v a^G_{v'} a^G_{v'''} a^G_{v''}$.

Téže konstrukce použijeme, abychom určili také rychlost $\overline{a_v a^H_{v'''}}$ bodu a^H_v. V bodu ^2s vztýčíme ku přímce H kolmici $^2s\,a'_k$, která normalu N_A protíná v bodu a'_k. V tomto bodě vztýčíme opět kolmici $a'_k a^H_{k'}$ ku prvé kolmici a naneseme na ni tentokrát úsečku $n\,.\,\overline{^2s\,a'_k}$ (protože úsečka $\overline{aa^H_k} = n\,.\,\overline{a\,^2s}$). Na spojnici $a^H_{k'} a^H_v$ vytkneme $\overline{a^H_v a^H_{k''}} = n\,.\,\overline{a^H_v a^H_{k'}}$ a obdržíme kolmou rychlost bodu a^H_v, z které pak obyčejnou rychlost $\overline{a^H_v a^H_{v'}} \perp \overline{a^H_v a^H_{k''}}$ odvodíme. Táž rychlost přísluší též bodu a_v a proto učiníme $\overline{a_v a^H_{v''}} \;\#\; \overline{a^H_v a^H_{v'}}$. Mimo to otáčí se bod a_v kolem bodu ^2s rychlostí $\overline{a_v a^H_{v'}} = n\,.\,\overline{a_v\,^2s}$; proto pohybuje se bod a_v resultující rychlostí $\overline{a^H_v a^H_{v'''}}$, kterou docílíme jakožto úhlopříčnu rovnoběžníku rychlostí $a_v a^H_{v'} a^H_{v'''} a^H_{v''}$.

Když pak docílenými body $a^G_{v''}$, $a^H_{v''}$ vedeme respekt. rovnoběžky G', H' ku přímkám G, H, obdržíme v průsečíku jejich bod a^1_v, který s bodem a_v, rychlost $\overline{a_v a^1_v}$ bodu a_v určuje.

Z rychlosti této aa^1_v odvoďme (obr. 24.) rychlost $a_v a^n_v$, kterou se bod a_v tečny T_A kol bodu a otáčí a spustme konečně s bodu a_v na přímku aa^n_v kolmici, která normalu N_A ve středu křivosti s křivky A protíná.

Jest patrno, že můžeme pokládati trajektorii průsečíkovou A za orthogonálný průmět průsečnice dvou pravoúhlých ploch šroubových, jichž osy ku průmětně kolmo stojí a jejichž výšky návitkové se k sobě jako $1:n$ mají.

Pomocí právě uvedených konstrukcí jest umožněno sestrojiti nejenom orthogonalný průmět tečny oné průsečnice, nýbrž pomocí rychlosti $\overline{a_v a^1}$, a středu křivosti s_A také rovinu křivosti a střed křivosti její. A sice udává nám úsečka $\overline{a_v a^1_v}$ směr stopy roviny křivosti v rovině průmětné a střed křivosti s můžeme pokládati za orthogonalný průmět středu křivky elliptické, která onu průsečnici obou ploch šroubových v bodě a oskuluje.

17. Konstrukce středu křivosti trajektorie průsečíkové pomocí rychlostí kolmých (článek 15.) užijeme v tom zvláštním případě, kdy $n = -\frac{1}{2}$ a když otočení přímek G, H současně od přímky ${}^1s^2s$ vychází. Pak jest trajektorie průsečíková těchto přímek ***hyperbola*** (obr. 27.), jejíž jedno ohnisko jest v bodu ${}^1s$ a jejíž jedním vrcholem jest bod ${}^2s$.*)

Zvolíce rychlost úhlovou přímky G rovnou jednotce, a učiníce $\overline{aa^H_k} = -\frac{1}{2}\overline{a^2s}$, obdržíme normalu $N_A \equiv \overline{aa_k}$ trajektorie průsečíkové A, když ku přímkám G, H resp. v bodech ${}^1s$, a^H_k, vztýčíme kolmice $\overline{{}^1sa_k}$, $\overline{a^H_k a_k}$, které se v bodě a_k protínají.

Abychom střed křivosti křivky A sestrojili, spojíme (článek 15.) obdržený bod s bodem ${}^2s$ a sestrojíme bodem a^H_k ku normale N_A rovnoběžku, která přímku $\overline{a_k{}^2s}$ v bodě a'_k protíná. Ro-

---

*) Tamtéž, pag. 61. Její hlavní osou jest délka $= \frac{2}{3}\overline{{}^1s^2s}$ a jejím poloparametrem $p = \overline{{}^1s^2s}$.

vnoběžka, tímto bodem ku přímce H sestrojená, protíná přímku $a_k a_k^H$ v bodě $a_{k'}^H$. Když dále z bodu $a_{k'}$ spustíme kolmici na přímku H a od tohoto bodu úsečku $\overline{a'_k a_k^1} = \overline{a_k^H a_{k'}^H}$ naneseme, obdržíme bod a_k^1, kterým ku přímce H vedeme rovnoběžku H', protínající přímku G v bodě a_k^2. Vedeme-li dále bodem a rovnoběžku aa_k^2 ku přímce $a_k a_k^2$ a vztýčíme v bodě a_k kolmici ku normale N_A, která přímku $a_k^2 a_k^3$ v bodě a_k^3 protíná, pak přímka $a_k^3 a_k^2$ protíná normalu N_A ve středu křivosti hyperboly A.

Pokládáme-li křivku A za orthogonalný průmět křivky průsečné dvou ploch šroubových pravoúhlých, jichž osy kolmo stojí ku průmětně a jejichž výšky návitkovité se mají k sobě jako $1:n$ a jejichž základní křivky respekt. přímkami G, H dány jsou, pak můžeme pomocí uvedených konstrukcí sestrojiti tečnu, rovinu křivosti a a střed křivosti jejich průsečnice.

18. Uvedené konstrukce středu křivosti můžeme užíti i v následním vzhledem ku předcházejícímu případu obecnějším příkladu.

Otáčení přímek G, H, které se respekt. v rovinných útvarech ${}^1S$, ${}^2S$ nalézají, děje se kolem bodů ${}^1s$, ${}^2s$, z nichž se jenom ${}^1s$ na příslušné přímce G nalezá, kdežto bod ${}^2s$ mimo přímku H leží (obr. 28.).

Předpokládejme jako dříve za příčinou zjednodušení, že oba útvary rovinné ${}^1S$, ${}^2S$ se se stejnou rychlostí úhlovou $\omega_G = \omega_H = 1$ otáčejí; pak představují úsečky $\overline{a\,{}^1s}$, $\overline{a\,{}^2s}$ kolmou rychlost bodu přímek G, H s bodem průsečným a stotožněného.

Abychom obdrželi normalu ku trajektorii průsečíkové A v bodu a, vztýčíme v bodu ${}^1s$ ku přímce G kolmici ${}^1sa_k$ a spustíme s bodu ${}^2s$ ku přímce H kolmici ${}^2sa_k$, tyto kolmice protínají se v bodu a_k, který s bodem a spojen kolmou rychlost bodu a a zároveň hledanou normalu N_A určuje.*)

Další konstrukce, táhnoucí se ku sestrojení středu křivosti, souhlasí úplně s prvé uvedenou konstrukcí. Poněvadž však jsme stejnou úhlovou rychlost rovinných útvarů ${}^1S$, ${}^2S$ předpokládali, zjednoduší se tyto konstrukce ještě do jisté míry.

Abychom tedy střed křivosti sestrojili, konstruujeme kolmou

*) Tamtéž, pag. 56.

rychlost, kterou se bod a_k jakožto průsečík kolmic ${}^1sa_k \perp G$, ${}^2sa_k \perp H$ ve křivce jím vytvořené B pohybuje.

Poněvadž se tyto přímky s touže stejnou rychlostí otáčejí, jakou se přímky G, H pohybují, obdržíme onu hledanou rychlost, když jako při konstrukci kolmé rychlosti bodu a v bodech ${}^1s$ a ${}^2s$ sestrojíme resp. ku přímkám G, H rovnoběžky ${}^1sa_k \equiv G$, ${}^2sa'_k \equiv H'$ které se protínají v bodě a'_k, který s bodem a_k kolmou rychlost $\overline{a_k a'_k}$ bodu a_k určuje (obr. 28.).

Na základě docílených kolmých rychlostí $\overline{aa_k}$, $\overline{a_k a'_k}$ dvou bodů a, a_k normaly N_A obdržíme střed křivosti s_A dle článku 15., vedeme-li $a_k a_k^2 \perp N_A$, $aa_k^2 \,||\, a_k a'_k$, a sestrojíme-li přímku $a'_k a_k^2$, která normalu N_A v žádaném bodě s_A protíná.

Jakožto příklad byl v obr. 29. vzat případ, kdy s přímkou ${}^1s{}^2s$ spadající poloze přímky G přísluší přímka H, která v rozpolovacím bodě této úsečky k ní kolmo stojí.

Když úhlové rychlosti přímek G, H jsou ve stejném smyslu stejné, pak vytvořuje jejich průsečík a *křivku Pascalovu* A (obr. 29.), která jest také určena v obraze sestrojenou křivkou L a polem svým ${}^1s$ jakožto *křivka úpatní*. Konstrukce normaly této křivky jakožto trajektorie průsečíkové úplně souhlasí s konstrukcí normaly této křivky jakožto křivky úpatní. A konstrukce středu křivosti této křivky A na základě jednoho i druhého výtvarného zákona jejího vedou nás k témuž bodu s_A.*)

Pokládáme-li křivku A za orthogonalný průmět průsečnice dvou pravoúhlých ploch šroubových, jichž osy kolmo stojí ku průmětně, výšky návitkové stejnými jsou a jejichž přímky základní jsou dány přímkami G, H, pak obdržíme pomocí těchto konstrukcí, tečnu, rovinu křivosti a střed křivosti oné průsečnice.

Jestliže obě přímky G, H se otáčejí v témže smyslu se stejnou rychlostí kolem bodů ${}^1s$, ${}^2s$, mimo ony přímek ležících (obr. 30.), pak obdržíme normalu $N \equiv aa_k$ bodem a vytvořené křivky, když body ${}^1s$, ${}^2s$ spustíme respekt. ku přímkám G, H kolmice ${}^1sa_k$, ${}^2sa_k$, které se protínají v bodě a_k, určujícím s bodem a normalu N_A.

Abychom obdrželi střed křivosti, vztýčíme dle dříve uve-

*) *A. Mannheim*: *„Géométrie cinematique"*, pag. 35.

dené konstrukce v bodech ${}^1s$, ${}^2s$ respekt. ku přímkám ${}^1sa_k$, ${}^2sa_k$ kolmice ${}^1sa'_k \equiv G'$, ${}^2sa'_k \equiv H'$, které se protínají v bodě a'_k, určujícím s bodem a_k kolmou rychlost $\overline{a_k a'_k}$ bodu a_k v křivce B se pohybujícího.

Sestrojíme-li dále $a_k a_k^3 \perp aa_k$, $aa_k^3 \parallel a'_k a_k$, obdržíme v průsečíku přímky $a'_k a_k^3$ s normalou N_A střed křivosti s_A křivky průsečíkové A.

Konstrukce této bylo v tom případě užito, kdy obě přímky G, H od svých příslušných středů otáčení stejnou vzdálenost mají a při svém pohybu neustále k sobě kolmo stojí (obr. 31.).

Také v tomto případě bude trajektorie průsečníková *křivkou Pascalovou*, jejíž normalu i střed křivosti můžeme tedy dvojím způsobem sestrojiti. V obr. 31. sestrojena normala N_A a střed křivosti s_A pro bod a a při tom bylo užito téhož označení jako dříve.

19. Mnohem složitější bude konstrukce středu křivosti trajektorie průsečíkové v obecnějším případu, kdy rychlosti úhlové obou útvarů rovinných ^{1}S, ^{2}S jsou *nestejnými* (obr. 32.).

Předpokládejme za příčinou zjednodušení jako dříve, že rovinný útvar ^{1}S se otáčí rychlostí úhlovou $\omega_G = 1$, pak představuje $\overline{a^1s}$ kolmou rychlost bodu přímky G spadajícího s bodem průsečným a přímek G, H, a kolmá rychlost bodu aa_k^H vyplyne, když zvolíme rychlost úhlovou ω_H rovinného útvaru ${}^2S$ rovnou $n \,.\, \omega_G$ z rovnice 2. (článek 15.)

$$\frac{\overline{aa_k^H}}{\overline{a^1s}} = n.$$

Abychom obdrželi normalu trajektorie průsečíkové A v bodu a, spustíme s bodů ${}^1s$, a_k^H respekt. ku přímkám G, H kolmice ${}^1sa_k$, $a_k^H a_k$, pak protínají se tyto přímky v bodě a_k, který spojen s bodem a poskytuje kolmou rychlost $\overline{aa_k}$ bodu a a tím také žádanou normalu N_A.

Při určování kolmé rychlosti bodu a_k vztýčíme ku přímce ${}^1sa_k$ kolmici $G' \parallel G$, protože úsečka $\overline{sa_k}$ udává kolmou rychlost bodu přímky ${}^1sa_k$, který s průsečíkem a_k přímek ${}^1sa_k$, $a_k^H a_k$ spadá. Jinak však vypadá konstrukce táž pro bod a_k jakožto bod přímky $a_k^H a_k$.

Tento bod podroben jest dvěma pohybům; předně rotaci kolem bodu ${}^2s$, a za druhé posouvá se zároveň s přímkou $a_k a_k^H$. Abychom tuto první složku $a_k a'_k$ určili, spojíme bod a_k (obr. 32.) s bodem ${}^2s$ a vytkneme na této spojnici úsečku $\overline{a_k a'_k} = n \,.\, \overline{a_k {}^2s}$. Druhou složku t. j. translační rychlost $a_k a''_k$ ve směru přímky H, která se rovná translační rychlosti bodu $a_{k'}^H$, v kterém přímka $a_k^H a_k$ protíná přímku H, obdržíme následovně:

Rychlost $\overline{a_{k'}^H a_{k''}^H}$ bodu $a_{k'}^H$ jest dle vztahu z rovnice 2. (článek 15.) vyplývajícího

$$\overline{aa_k^H} = n \,.\, \overline{a^2 s}$$

rovna $(1 - n)$násobné rychlosti $a_{k'}^H a_k$, kterou se posouvá bod a v přímce H.*)

Přenesouce úsečku $a_{k'}^H$, $a_{k''}^H$ (obr. 32.) od bodu a_k na prodlouženou přímku $a_k^H a_{k'}$, obdržíme rychlost translační $\overline{a_k a''_k}$ bodu a_k, jakožto druhou žádanou složku. Pomocí rovnoběžníka rychlostí $a_k a'_k a_k^1 a''_k$ obdržíme výslednou rychlost $\overline{a_k a_k^1}$ bodu přímky $a_k a_k^H$ s bodem a_k spadajícího. Spustíme-li nyní s bodu a_k^1 na přímku $a_k a_k^H$ kolmici $H' \parallel H$, pak obdržíme v průsečíku této přímky s dříve sestrojenou přímkou G' bod a_k^2, který s bodem a_k spojen rychlost $a_k a_k^2$ bodu tohoto určuje.

Na základě kolmých rychlostí $\overline{aa_k}$, $\overline{a_k a_k^2}$ bodů a, a_k normaly N sestrojíme střed křivosti křivky A (obr. 32.) vedouce $a_k a_k^3 \perp N$, $aa_k^3 \parallel a_k a_k^2$, a protnouce přímkou $a_k^2 a_k^3$ normalu N v bodě s_A.

20. Pozorujme konečně nejobecnější případ, když na místě dvou přímek *otáčejí se dvě křivky* G, H, nalézající se respekt. ve dvou útvarech rovinných ${}^1S$, ${}^2S$, otáčejících se respekt. kolem dvou pevných bodů ${}^1s$, ${}^2s$ roviny Σ (obr. 33.).

Abychom si z počátku konstrukci usnadnili, předpoklá-

*) Přímka H, na místě aby bodem ${}^2s$ procházela (článek 15.), dotýká se tentokráte při svém pohybu jisté kružnice K (obr. 32.), jejíž střed se nalézá v bodě ${}^2s$. Tato okolnost však nemá na určení kolmé rychlosti bodu $a_{k'}^H$ žádného vlivu a proto kolmá rychlost tohoto bodu v přímce H bude jako ve článku 16. rovna $(1 - n)$násobné rychlosti $\overline{a_{k'}^H a_k}$, kterou se bod a v přímce H posouvá.

dejme, že rychlosti úhlové rovinných útvarů ^1S, ^2S, v témž směru stejné jsou.

Když s bodů ^1s, ^2s spustíme respektive na tečny T_G, T_H v bodu průsečném a křivek G, H sestrojené kolmice ^1sa_k, ^2sa_k, pak protínají se tyto v bodu a_k, který s bodem a spojen kolmou rychlost bodu tohoto určuje.

Při konstrukci středu křivosti trajektorie průsečíkové A musíme však k tomu přihlížeti, že se tečny T_G, T_H při otáčení rovinných útvarů ^1S, ^2S kolem příslušných středů ^1s, ^2s, zároveň otáčejí kolem středů křivosti s_G, s_H, kteréž přísluší křivkám G, H v bodu a.

Proto se budou přímky $^1sa_k \perp T_G$, $^2sa_k \perp T_H$ otáčeti nejenom respekt. úhlovými rychlostmi $\omega_G = \omega_H = 1$, nýbrž mimo to rychlostmi ω_G^1, ω_H^1, kterými se otáčejí tečny T_G, T_H kolem příslušných středů křivosti s_G, s_H křivek G, H.

Poněvadž úsečky $\overline{^1sa_k}$, $\overline{^2sa_k}$ představují kolmé rychlosti, kterými se s průsečným bodem a křivek G, H spadající bod pohybuje respekt. v tečnách T_G, T_H jsou poslednější rychlosti úhlové:

$$\omega_G^1 = \frac{\overline{^1sa_k}}{\overline{s_G a}}, \quad \omega_H^1 = \frac{\overline{^2sa_k}}{\overline{s_H a}}.$$

Proto jsou výsledné rychlosti úhlové ω_G^2. ω_H^2 respekt. přímek ^1sa_k, ^2sa_k:

$$\omega_G^2 = \omega_G + \omega_G^1 = 1 + \frac{\overline{^1sa_k}}{\overline{s_G a}} = \frac{\overline{s_G a} + \overline{^1sa_k}}{\overline{s_G a}}$$

$$\omega_H^2 = \omega_H + \omega_H^1 = 1 + \frac{\overline{^2sa_k}}{\overline{s_H a}} = \frac{\overline{s_H a} + \overline{^2sa_k}}{\overline{s_H a}}.$$

Jest tedy kolmá rychlost $\overline{a_k a_{k'}^G}$, bodu a_k jakožto bodu přímky ^1sa_k kolem bodu ^1s se otáčející dle vzorce 1. (článek 14.)

$$\overline{a_k a_{k'}^G} = \omega_G^2 \,.\, \overline{^1sa_k} = \frac{\overline{s_G a} + \overline{^1sa_k}}{\overline{s_G a}} \,.\, \overline{^1sa_k}.$$

Tuto úsečku $a_k a_{k'}^G$ sestrojíme (obr. 33), vedouce $a_k 1 \perp {}^1sa_k$ a učiníce $\overline{a_k 1} = \overline{a_k^1 s}$; pak nanesouce $\overline{12} = s_G a$ a konečně vedouce $13 \,||\, a_k^1 s$, a $s3 \,||\, a_k 1$.

Přímka 23 protíná pak přímku $a_k{}^1s$ v bodu $a_{k'}^G$, který s bodem a_k určuje hledanou kolmou rychlost $\overline{a_k a^G_{k'}}$ bodu a_k přímky ${}^1sa_k$.

Nalezeným bodem $a^G_{k'}$ sestrojíme pak ku přímce ${}^1sa_k$ kolmici T'_G, která zároveň s tečnou T_G rovnoběžna jest.

Stejným způsobem sestrojíme kolmou rychlost $\overline{a_k a^H_{k'}}$ *) bodu a_k jakožto bodu přímky ${}^2sa_k$, a vedeme pak bodem $a^H_{k'}$ ku přímce ${}^2sa_k$ kolmici T'_H rovnoběžnou s přímkou T_H.

Přímky T'_G, T'_H protínají se v bodě a_k, který s bodem a_k určuje kolmou rychlost $\overline{a_k a'_k}$ bodu a_k.

Na základě kolmé rychlosti $\overline{aa_k}$ a $\overline{a_k a'_k}$ dvou bodů a, a_k normaly N_A sestrojíme střed křivosti s_A vytvořené trajektorie průsečíkové A jako dříve (článek 15.).

Jakožto příklad uvedeme následní případ:

Křivka kruhová G otáčí se kolem jednoho ze svých bodů ${}^1s$ a přímka H jakožto kružnice o nekonečně velikém poloměru se otáčí kolem bodu ${}^2s$, jímž zároveň prochází. První poloze křivky G, jejíž střed se nalezá na přímce ${}^1s{}^2s$ přísluší přímka $H \equiv {}^1s{}^2s$ a poloměr kružnice G rovná se vzdálenosti obou středů ${}^1s$, ${}^2s$.

Jak z obrazu 34. patrno, vytvoří se, zvolíme-li $\omega_G = 1$,

$$\omega_H = n = \frac{1}{2}$$

jakožto trajektorie průsečíková *křivka Pascalova*, kterou také pokládati můžeme za křivku úpatní tečen, jejíž křivkou základní jest křivka L a jejíž polem jest bod ${}^2s$.

Poněvadž jest $n = \frac{1}{2}$, bude

$$\overline{aa^H_k} = \frac{1}{2}\,\overline{a^2s}.$$

Spustíme-li s bodu ${}^1s$ kolmici ku tečně T_G a vztýčíme-li v bodě a^H_k kolmici ku přímce H, obdržíme v průsečíku a_k

*) $\overline{a_k a^H_{k'}} = \omega^2_G \,.\, \overline{{}^2sa_k} = \dfrac{\overline{s_H a} + \overline{{}^2sa_k}}{\overline{s_H a}} \,.\, \overline{{}^2sa_k}.$

těchto kolmic bod, určující s bodem a kolmou rychlost $\overline{aa_k}$ bodu a v trajektorii A.

Sestrojujíce střed křivosti s této křivky, přihlížíme k tomu, že jest bod a_k průsečíkem kolmic ${}^1sa_k$, $a_k^H a_k$ a odvodíme rychlost tohoto bodu vzhledem ku pohybu těchto přímek.

Kolmou rychlost bodu a_k jakožto bodu přímky ${}^1sa_k$ otáčející se kolem bodu ${}^1s$ sestrojíme dle vzorce právě uvedeného

$$\overline{a_k a_{k'}^G} = \frac{\overline{{}^1sa_k} + \overline{s_G a}}{\overline{s_G a}} \cdot \overline{{}^1sa_k}.$$

Sestrojíme za tím účelem přímku $a_k 1 \perp a_k{}^1s$ a učiníme $\overline{a_k 1} = \overline{a_k{}^1s}$. Pak naneseme v protivném směru úsečku

$$\overline{12} = \overline{s_G a}$$

a sestrojíme $13 \parallel a_k{}^1s$ a ${}^1s3 \parallel a_k 1$. Přímka 23 pak protíná přímku $a_k{}^1s$ v bodě $a_{k'}^G$. Tímto bodem vedena pak přímka $T'_G \parallel T_G$ kolmo ku přímce $a_k{}^1s$.

Vzhledem ku otočení přímky H s úhlovou rychlostí $n = \frac{1}{2}$ obdržíme tu bod a'_k, když dle článku 16. úsečku $\overline{a_k{}^2s}$ bodem a'_k rozpolíme. Bodem a'_k vedeme s přímkou H rovnoběžku, kteráž přímku $a_k^H a_k$ v bodě $a_{k'}^H$ protíná tak, že

$$\overline{a_k^H a_{k'}^H} = \frac{1}{2} \overline{a_k^H a_k}.$$

Vedeme-li bodem a'_k přímku

$$\overline{a'_k a_k^1} \# \overline{a_k^H a_{k'}^H},$$

obdržíme bod a_k^1, který, jak z konstrukce patrno, na přímku $a_k{}^1s$ padne.*) Proto se přímka H' tímto bodem a_k^1 vedená rovnoběžně ku přímce H stotožňuje s přímkou dříve sestrojenou ${}^1sa_k$.

Přímky G', H' protínají se v bodu a'_k, který s bodem a_k, rychlost $\overline{a_k a'_k}$ bodu a_k určuje. Znajíce kolmé rychlosti $\overline{aa_k}$, $\overline{a_k a'_k}$ dvou bodů a a a_k normaly N můžeme dříve uvedeným způsobem střed křivosti křivky A sestrojiti.

---

*) Konstrukce bodu a_k^1 v obraze 34. vynechána.

21. Zbývá jenom povšimnouti si toho případu, kdy rychlosti úhlové rovinných útvarů ^1s, ^2s obsahující křivky G, H kolem bodů ^1s, ^2s se otáčející jsou *nestejny*.

Předpokládejme, že rychlost rovinného útvaru ^1S jest rovna jednotce a rychlost soustavy ^2S rovna n (obr. 35.). Pak představuje úsečka $\overline{aa^H_k} = n \,.\, \overline{a^2s}$ kolmou rychlost bodu přímky H stotožněného s bodem a. Konstrukce bodu $a^G_{k'}$ a přímky T'_G pro tento rovinný útvar jest táž jako dříve. Jinak bude arciť třeba pokračovati pro rovinný útvar ^2S, jehož úhlovou rychlost jsme rovnou n zvolili.

Bod a_k otáčí se kolem bodu ^2s kolmou rychlostí

$$\overline{a_k a'_k} = n \,.\, \overline{a_k {}^2s}$$

a posouvá se ve směru tečny T_H rychlostí kolmou $\overline{a_k a''_k}$, která jest rychlosti

$$a^{H'}_k a^{H''}_k = (1 - n)\, \overline{a^{H'}_{k'} a_k}$$

průsečíku $a^{H'}_k$ přímky T_H a přímky $a^H_k a_k \perp T_A$ rovna (článek 19.).

Mimo to máme přihlížeti ku kolmé rychlosti bodu a_k, která náleží bodu tomuto, protože tato tečna T_H se rychlostí $\omega^1_H = \dfrac{\overline{a^H_k a_k}}{\varrho_H \,.\, a}$ otáčí.

Rychlost otáčení úhlového ω^2_H přímky $\overline{sa_k}$ se zřetelem ku oběma rotacím tečny $\omega_H = n$, a $\omega_{1H} = \dfrac{\overline{a^H_k a_k}}{s_H a}$ jest tedy

$$\omega^2_H = n + \frac{\overline{a^H_k a_k}}{s_H a} = \frac{n \,.\, \overline{o_H a} + \overline{a^H_k a_k}}{s_H a},$$

ze které rychlosti jako v předcházejícím případě kolmá rychlost $\overline{a_k a^H_k}$, bodu a_k vyplyne.

Z kolmých rychlostí $\overline{a_k a''_k}$, $\overline{a_k a^H_k}$ sestrojíme výslednou kolmou rychlost bodu a_k jakožto úhlopříčny parallelogrammu rychlostí a obdržíme bod a''_k, z kterého spustíme kolmici $T'_H \,||\, T_H$ ku přímce $a_k {}^2s$.

Průsečík a^1_k přímek T'_G, T'_H s bodem a_k určuje kolmou rychlost bodu a_k. Další konstrukce středu křivosti s_A pak souhlasí úplně s konstrukcemi středu křivosti v případech předcházejících (článek 15.).

III. Trajektorie průsečíkové vytvořené při současném pohybu posouvání a otáčení dvou rovinných útvarů.

22. Konstrukce tečen, normal a středů křivosti trajektorií průsečíkových vzniknuvších při dvou pohybech translačních nebo dvou pohybech rotačních, můžeme však také užíti i v případu trajektorií průsečíkových, které se vytvoří průsečíkem dvou linearných útvarů, jichž roviny se nestejně pohybují, jeden jest totiž podroben pohybu posouvání a druhý pohybu rotačnímu.

Jakožto příklad zvolme následovní jednoduchý případ:

Rovinný útvar ${}^1S$, obsahující přímku G, se posouvá v určitém směru s danou rychlostí a rovinný útvar ${}^2S$, v němž se přímka H nalézá, otáčí se s rychlostí úhlovou rovnou jednotce kolem bodu ${}^2s$, na této přímce se nalezajícího (obr. 36.).

Bodu průsečnému a přímek G, H nechť náleží jakožto bodu přímky G kolmá rychlost translační $\overline{aa_k^G}$, a jakožto bodu přímky H rychlost kolmá $\overline{a^2s}$.

Spustíce s bodu a_k^G kolmici na přímku G, obdržíme bod $a_{k'}^G$ určující s bodem a kolmou rychlost $\overline{aa_{k'}^G}$, kterou se pohybuje přímka G ve směru kolmém k ní.

Znajíce tuto rychlost, můžeme pokládati pohyb translační přímky G za pohyb otáčení kolem jejího nekonečně vzdáleného bodu ${}^1s_\infty$. Tím převedeme tento případ na vytvoření trajektorie průsečíkové při otáčení dvou přímek kolem dvou bodů a bude lze na tom základě sestrojiti dle článku 15. normalu a střed křivosti této křivky.

Abychom normalu ku vytvořené trajektorii průsečíkové sestrojili, vztýčíme v bodech $a_{k'}^G$, ${}^2s$ respektive ku přímkám G, H kolmice, které se protínají v bodě a_k. Úsečka $\overline{aa_k}$ představuje kolmou rychlost průsečíku a a zároveň hledanou normalu N_A.

Sestrojujíce střed křivosti, spojíme dle článku 15. bod a_k s bodem ${}^1s_\infty$ čili vedeme bodem a_k rovnoběžku s přímkou G a sestrojíme $a_{k'}^G a'_k \parallel N_A$, která přímku $a_k {}^1s_\infty$ v bodě a'_k protíná. Sestrojíme-li dále tímto bodem a'_k rovnoběžku s přímkou G, obdržíme v přímce $a_{k'}^G a_k$ bod $a_{k''}^G$, který se s bodem a_k stotožňuje. A připojíme-li ku rychlosti $a_k a'_k$ úsečku $\overline{a'_k a_k^1} \# \overline{a_{k'}^G a_{k''}^G}$, obdržíme bod a_k^1 padající na normalu N_A. Z konstrukce patrno, že $\overline{a_k a_k^1} = \overline{a a_k}$ a proto lze jednoduše tento bod a_k^1 sestrojiti přenesením délky $\overline{a a_k}$ od bodu a_k na normalu v témže směru. Bodem a_k^1 vedená přímka $G' \parallel G$ protíná pak přímku H v bodu a_k^2, který s bodem a_k rychlost $\overline{a_k a_k^2}$ bodu a_k určuje.

Na základě známých rychlostí dvou bodů a, a_k normaly N_A sestrojíme střed křivosti s_A trajektorie A spůsobem ve článku 15. uvedeným.

Kdyby úhlová rychlost přímky H nebyla rovna jedné, jak jsme ji v právě uvedeném případě zvolili, nýbrž rovna ku př. n, pak by se konstrukce středu křivosti stala složitější. Můžeme však tomu předejíti tím, že přece onu rychlost za jednotku zvolíme, změnice zároveň příslušně rychlost posouvání přímky G tím, že ji $\frac{1}{n}$ násobíme.

Konstrukci tečny a středu křivosti můžeme docíliti také pomocí *rychlostí obyčejných* následním způsobem:

Pohybuje-li se přímka G ve směru k ní kolmém s rychlostí $\overline{a a_v^G}$ a otáčí-li se přímka H s úhlovou rychlostí rovnou jedné, pak sestrojíme tečnu T_A, když bodem a_v^G vedeme rovnoběžku s přímkou G, a sestrojíce $\overline{a a_v^H} \perp\!\!\!= \overline{a\,{}^2s}$, bodem a_v^H vedeme přímku $a_v^H a_v$ rovnoběžnou s přímkou H. Přímky tyto se protínají v bodu a_v určujícím s bodem a tečnu T_A trajektorie průsečíkové A.

Zabývajíce se sestrojením středu křivosti křivky A, vyjděme dříve od přímky H a sestrojme dle článku 16. v bodě a normalu N_A a v bodě ${}^2s$ kolmici ${}^2s a_k$ ku přímce H. V průsečném bodě a_k sestrojíme $\overline{a_k a'_k} \perp\!\!\!= \overline{a_k\,{}^2s}$ a učiníme $\overline{a_v^H a_{v'}^H} = \overline{2a'_k a_v^H}$ a kolmo ku $a'_k a_v^H$ a bodem $a_{v'}^H$ vedeme pak přímku H' rovnoběžnou s přímkou H.

Podobě sestrojíme přímku G' se zřetelem k tomu, že posouvání přímky G pokládati můžeme za otáčení kolem jejího bodu nekonečně vzdáleného ${}^1s_\infty$. Bodem a_v sestrojíme přímku $\overline{a_v a_{v'}^G} \perp G$ a učiníme ji rovnou $2.\overline{a a_v^G}$. Bodem $a_{v'}^G$ vedená přímka G' rovnoběžná ku přímce G protíná přímku H' v bodě a'_v, který s bodem a_v rychlost $\overline{a_v a'_v}$ tohoto bodu udává. Bodem a'_v vedeme

$a'_v a^n_v \parallel T_A$ a bodem a_v sestrojíme $\overline{a_v a^n_v} \perp T_A$. Kolmice spuštěná s bodu a_v ku přímce $\overline{aa^n_v}$ protíná normalu N v bodu s_A.

Jest patrno, že považujeme-li křivku A za orthogonalný průmět průsečnice nějaké roviny s plochou šroubu pravoúhlého, můžeme uvedených konstrukcí užiti k určení tečny a středu křivosti této křivky.

23. Je-li přímka G zastoupena křivkou, pak užijeme s výhodou ku konstrukci tečny a středu křivosti průsečíkové trajektorie rychlostí obyčejných.

Předpokládejme, že se křivka G posouvá s rychlostí $\overline{aa^G_v}$ a přímka H nechť se otáčí kolem bodu ${}^2s$ na této ležícího úhlovou rychlostí rovnou jedné.

Sestrojujíce tečnu T_A vytvořené průsečíkové trajektorie A vedeme bodem a^G_v rovnoběžku s tečnou T_G[1]), v bodě a ku křivce G sestrojenou a bodem a^H_v ($\overline{aa^H_v} \perp\!\!\!\!= \overline{a^2s}$) sestrojíme rovnoběžku s přímkou H. Obě rovnoběžky protínají se v bodě a_v, který s bodem a určuje rychlost $\overline{aa_v}$ průsečíku a ve křivce A a tudíž i tečnu T_A této křivky.

Sestrojujíce dále střed křivosti s_A křivky A, stanovíme dle článku 12. přímku T'_G, a dle článku 16. přímku H' následovně:

Učiníme, sestrojujíce přímku T'_G, na tečně T_G úsečku $\overline{aa^G_{v'}} = a^G_r a_k$ a vedeme bodem a kolmici ku spojnici bodu s_G s bodem $a^G_{v'}$, kteráž přímku $a^G_{v'} a^G_{v''} \perp T_G$ v bodě $a^G_{v''}$ protíná. Sestrojíce dále $a_v a^G_{v'''} \# a^G_{v'} a^G_{v''}$ vedeme bodem $a^G_{v'''}$ rovnoběžku T'_G ku přímce T_G.

Abychom přímku H' sestrojili, sestrojíme dle článku 16. v bodu a normalu $N_A \equiv \overline{aa_k}$ trajektorie průsečíkové A a vztyčíme kolmici ${}^2sa_k$ v bodě ${}^2s$ ku přímce H. Obě tyto přímky protínají se v bodě a_k. V bodě tomto sestrojíme přímku $\overline{a_k a'_k} \perp\!\!\!\!= a_k{}^2s$. Konečně sestrojíce $a^H_v a^H_{v'} \perp a'_k a^H_v$, učiníme $\overline{a^H_v a^H_{v'}} = \overline{{}^2a'_k a^H_v}$ a vedeme bodem obdrženým $a^H_{v'}$ přímku H' rovnoběžně s přímkou H.

Přímky T'_G a H' protínají se v bodu a^1_v, který s bodem

[1]) Příslušný obraz jakož i obrazce ku všem následujícím článkům patřící pro jich jednoduchost a vzhledem ku dříve již provedeným konstrukcím vynechány.

a_v rychlost tohoto bodu určuje. Dle článku 8. sestrojíme dále $a_n a_v^1 \parallel T_A$ a $a_v a_n \perp T_A$ a bodem a sestrojíme ku přímce aa_n kolmici, která protíná normalu N_A v hledaném středu křivosti průsečíkové trajektorie A.

K témuž výsledku dospěli bychom, užijíce na místě rychlostí kolmých rychlostí obyčejných. Jelikož bychom musili ve druhém případě užiti mnohem složitějších konstrukcí, zůstaneme jenom na konstrukci prvé.

24. Dalším obecnějším případem jest, kdy se přímka G posouvá a přímka H otáčí kolem bodu ${}^2s$, který se na této přímce nenalezá.

Předpokládejme, že kolmá rychlost přímky G ve směru kolmém k ní jest $\overline{aa_a^G}$ a že přímka H se otáčí kolem bodu ${}^2s$ úhlovon rychlostí rovnou jedné.

Užijeme-li při konstrukci normaly rychlostí kolmých, pak souhlasí konstrukce ta s onou v případě uvedeném ve článku 22:

Vztyčíme totiž v bodě a_k^G kolmici ku přímce G a s bodu ${}^2s$ spustíme kolmici ku přímce H.

Obě kolmice protínají se pak v bodě a_k, který s bodem a_k kolmou rychlost bodu a a tudíž i normalu N_A průsečíkové trajektorie určuje.

K sestrojení středu křivosti křivky A použijeme konstrukcí uvedených vzhledem ku pohybu přímek G a H ve článcích 22. a 18.

Učiníme totiž na přímce N_A $a_k a_k^1 = \overline{aa_k}$ a bodem a_k^1 vedeme rovnoběžku G' ku přímce G, a bodem ${}^2s$ sestrojíme přímku $H' \parallel H$.

Přímky G', H' protínají se v bodu a_k^2, který s bodem a_k rychlost tohoto bodu určuje. Na základě známých rychlostí dvou bodů a, a_k normaly N_A, sestrojíme pak střed křivosti s_A průsečíkové trajektorie A, vedouce $aa_k^3 \parallel a_k a_k^2$, a $a_k a_k^3 \perp aa_k$, a spojíce body a_k^2, a_k^3 přímkou, která normalu N_A protíná v hledaném bodě s_A.

25. Složitější stane se konstrukce středu křivosti průsečíkové trajektorie vytvořené při pohybu posouvání a pohybu rotačním, když na místě přímky H otáčí se kol bodu ${}^2s$ nějaká křivka.

Předpokládejme ten příklad, že přímka G se posouvá ve směru kolmém k této přímce s kolmou rychlostí $\overline{aa_k^G}$ a křivka H se otáčí rychlostí úhlovou rovnou jedné.*)

Sestrojujíce normalu N_A tímto způsobem vytvořené trajektorie A, vztýčíme v bodu a_k^G kolmici ku přímce G jako v případě předcházejícím a spustíme kolmici s bodu ${}^2s$ ku tečně T_H, v bodě a ku křivce H sestrojené. Obě kolmice protínají se v bodě a_k, určujícím s bodem a normalu N_A, a zároveň kolmou rychlost $\overline{aa_k}$ bodu průsečného a vytvořujícího křivku A.

Abychom střed křivosti s_A této křivky sestrojili, sestrojíme přímky G' a H'. Přímku G' docílíme na základě důvodů uvedených ve článku 22., učiníce v právě sestrojené normale N_A $\overline{a_k a_k^1} = \overline{aa_k}$ co do směru i velikosti a vedouce pak bodem a_k^1 přímku $G' \parallel G$.

Sestrojujíce však přímku H', přihlížíme zároveň k tomu, že se tečna T_H při pohybu tom otáčí nejen s rychlostí $\omega_H = 1$ kolem bodu ${}^2s$, nýbrž zároveň kolem svého středu křivosti s_H s rychlostí ω_H^1 rovnou podílu $\dfrac{\overline{a_k{}^2s}}{\overline{as_H}}$, v kterém úsečka $\overline{a_k{}^2s}$ značí kolmou rychlost, s jakou se bod s bodem a spadající zároveň ve křivce H pohybuje.

Následkem tohoto obojího otáčení bude se otáčeti také přímka $\overline{a_k{}^2s}$ kolem bodu ${}^2s$ s rychlostí úhlovou ω_H^2 rovnající se algebraickému součtu obou úhlových rychlostí $\omega_H = 1$, a $\omega_H^1 = \dfrac{\overline{a_k{}^2s}}{\overline{as_H}}$, a proto

$$\omega_H^2 = 1 + \frac{\overline{a_k{}^2s}}{\overline{as_H}} = \frac{\overline{as_H} + \overline{a_k{}^2s}}{\overline{as_H}}.$$

Z toho plyne dále, že kolmá rychlost bodu a_k přímky

---

*) Tak jako v případu jednodušším, uvedeném ve článku 22. můžeme, kdyby úhlová rychlost křivky H nebyla rovna jedné, tuto na jednotku uvésti; musíme však zároveň změniti příslušně rychlost posouvání přímky G, tím že ji $\frac{1}{n}$ násobíme.

$a_k{}^2s$ otáčející se kol bodu ${}^2s$ s rychlostí úhlovou ω_H^2 bude dle vzorce 2. ve článku 15.

$$\overline{a_k a_{k'}^H} = \frac{\overline{as_H} + \overline{a_k{}^2 s}}{\overline{as_H}} \cdot \overline{a_k{}^2 s}.$$

Dle článku 20. sestrojíme bod $a_{k'}^H$ tím, že vedeme $\overline{a_k 1} \perp \overline{a_k{}^2 s}$ a naneseme $\overline{12} = \overline{as_H}$. Spojíme-li bod 2 s bodem 3, průsečným bodem přímek

$$13 \,||\, a_k{}^2 s, \quad {}^2s3 \,||\, a_k 1,$$

pak protíná přímka tato 23 přímku $a_k{}^2s$ v hledaném bodě $a_k^{H'}$. Bodem tímto vedená přímka rovnoběžná s přímkou T_H jest onou žádanou přímkou T'_H, která se protíná s přímkou dříve sestrojenou T'_G v bodě a_k^2, určujícím s bodem a_k rychlost tohoto bodu. —

Znajíce nyní kolmé rychlosti dvou bodů a, a_k normaly N_A sestrojíme střed křivosti s_A v tomto případě vytvořené průsečíkové trajektorie dříve uvedeným způsobem (článek 15.).

26. Ještě obecnější případ nastane, když oba se pohybující útvary G i H budou křivkami.

Nechť se křivka G posouvá kolmou rychlostí $\overline{aa_k^G}$ a křivka H kol bodu ${}^2s$ otáčí rychlostí úhlovou rovnou jedné.

Užívajíce kolmých rychlostí, pokračujeme při sestrojování normaly a středu křivosti v tomto nejobecnějším případu vytvořené trajektorie průsečíkové následovně:

Abychom normalu křivky této A sestrojili, odvodíme si především kolmou rychlost $\overline{aa_k^{G'}}$, jakou se posouvá křivka G ve směru kolmém ku tečně T_G v bodu a ku této křivce sestrojené, tím že spustíme s bodu a_k^G kolmici $a_k^G a_{k'}^G$ ku této přímce.

Kolmice tato protíná pak kolmici spuštěnou, s bodu ${}^2s$ na tečnu T_H, v bodu a ku křivce H sestrojenou, v bodu a_k, který s bodem a kolmou rychlost bodu a a zároveň normalu N_A určuje.

Abychom sestrojili v tomto případě přímku T'_G, uvažme, že přímka T_G se nejenom otáčí kolem svého bodu nekonečně vzdáleného ${}^1s_\infty$, nýbrž zároveň se otáčí určitou rychlostí úhlovou ω_G^1 kolem středu křivosti s_G křivky G. Následkem tohoto dvojího otáčení bude bod a_k podroben dvěma rychlostem $\overline{a_k a^G_{k'}}$ a $\overline{a_k a^G_{k''}}$.

Prvou rychlost vzhledem ku otáčení přímky G kolem jejího nekonečně vzdáleného bodu ${}^1s_\infty$ obdržíme, učiníce v normale N_A úsečku

$$\overline{a_k a^G_{k'}} = \overline{a a_k}$$

co do směru i velikosti.

Druhou rychlost $\overline{a_k a^G_{k''}}$ vzhledem ku otočení tečny T_G kolem středu křivosti s_G obdržíme, když úsečku $\overline{s_G a_k}$ hodnotou $\dfrac{\overline{a_k a^G_k}}{\overline{a s_G}}$ úhlové rychlosti ω_G^1, s kterou se tečna T_A otáčí, násobíme.

Úhlopříčna $\overline{a_k a^G_{k_1}}$ rovnoběžníka $a_k a^G_{k'} a^G_{k_1} a^G_{k''}$ sestrojeného z obou těchto rychlostí $\overline{a_k a^G_{k'}}$, $\overline{a_k a^G_{k''}}$, jest pak výslednou rychlostí bodu a_k vzhledem ku pohybu posouvání křivky G. Přímka bodem obdrženým $a^G_{k_1}$ rovnoběžně ku přímce T_G jest hledanou přímkou T'_G.

Přímka tato protíná pak přímku $T'_H \,||\, T_H$, kterou určíme způsobem v předcházejícím článku uvedeným, v bodě $a^2{}_k$, který s bodem a_k rychlost tohoto bodu udává.

Další konstrukce středu křivosti křivky A se úplně shoduje s předcházejícími konstrukcemi.

Jest zároveň zřejmo, že můžeme křivku A považovati za orthogonálný průmět průsečnice plochy posouvání válcové s plochou šroubovou druhu nejobecnějšího. Konstrukce normaly a středu křivosti můžeme pak užiti ku určení tečny a středu křivosti oné průsečnice.

Nejobecnější případ nastane, kdyby křivka G se posouvala v dráze křivé.

Jest zřejmo, že bychom i v tomto vzhledem ku určení tečny, normaly i středu křivosti nejsložitějším případu k cíli dospěli, používajíce k tomu konstrukce právě předcházející jakož i výsledků v dřívějších článcích uvedených.
