Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma

Zobecnění kinematického zobrazení

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 1, 7--24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122034

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1928

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Zobecnění kinematického zobrazení.

Dr. *Josef Klíma.*

1. Roku 1911 skoro současně uveřejnili *W. Blaschke*[1]) a *J. Grünwald*[2]) zvláštní zobrazení přímek v bodové páry roviny, jež současně zobrazuje jistý neeuklidovský prostor v euklidovskou kinematiku roviny. Zvolili dvě rovnoběžné stopní roviny ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ a třetí rovinu π s nimi rovnoběžnou a půlící jich vzdálenost za průmětnu.[3]) Libovolná přímka P protíná stopní roviny v bodech ${}^1p$, ${}^2p$, jež promítají se kolmo do π do bodů ${}^1p^0$, ${}^2p^0$, tyto průměty otočí se v průmětně kol stopníku $p \equiv (P\pi)$ o 90^0 ve smyslu kladném, takže bod ${}^1p^0$ přejde do »levého« obrazu p^l a ${}^2p^0$ do pravého obrazu p^p přímky P. Body $\underline{p^l \text{ a } p^p}$ jsou též Laguerovými zástupci imaginárních bodů přímky ${}^1p^0$, ${}^2p^0$, jež dány jsou reálnými zástupci ${}^1p^0$, ${}^2p^0$. Jinak mysleme si, že roviny ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ jsou reálnými zástupci dvou imaginárních rovin ${}^1\sigma^i$, ${}^2\sigma^i$, v nichž každé mysleme si svazek minimálních paprsků, jež mají své středy v kruhových bodech $+i$ a $-i$ průmětny π. Přímka P protíná z každého svazku toho jeden paprsek. Je-li o_∞ úběžný bod kolmice k π, tu levý obraz p^l přímky P je průsečík průmětny π s příčkou z o_∞ sestrojenou k minimálním paprskům svazků $({}^1\sigma^i +i)$, $({}^2\sigma^i, -i)$. protínající P a podobně p^p je stopník příčky z o_∞ k paprskům svazků $({}^1\sigma^i, -i)({}^2\sigma^i, +i)$ protínající přímku P. Příčky $\overline{o_\infty p^l}$. $\overline{o_\infty p^p}$ jsou též osy rotačních hyperboloidů obsahujících přímku P, jichž hrdlo je v π a imaginární poloosa rovna je vzdálenosti roviny π od ${}^1\sigma^i$ nebo ${}^2\sigma^i$

Svazky minimálních paprsků $({}^1\sigma^i, +i)$. $({}^2\sigma^i, -i)$ a $({}^1\sigma^i, -i)$ $({}^1\sigma^i, +i)$ lze uvažovati jako dvě soustavy tvořících přímek rozpadající se plochy 2^0. I lze projekci tuto uvažovati co zvláštní případ toho, kdy plocha 2^0 zde degenerovaná, bude plochou Z^2 nerozpadající se.

2. Plocha 2^0 Z^2 obsahuje dvě soustavy tvořících přímek, z nichž jednu (L) nazývejme »levou« a druhou (P) »pravou« soustavou,

---

[1]) »Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie«, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, roč. 1911.

[2]) »Ein Abbildungsprincip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft.« Zprávy o sezení vídeňské akademie roč. 1911.

[3]) Obecněji uvažuje *E. Müller - E. Kruppa*: Vorlesungen über darstellende Geometrie I. díl »Die linearen Abbildungen«, str. 240, že roviny ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ protínají se v středové rovině při centrálním promítání a průmětna π je harmonicky sdruženou k středové rovině vzhledem k stopním rovinám ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$.

o nichž předpokládejme, že jsou reálné a tedy Z^2 jednodílným hyperboloidem neb hyperb. paraboloidem. Mimo tuto plochu buď dán střed promítání o a jeho polární rovinu ω k ploše Z^2 zvolme za průmětnu. Zobrazení přímek A prostoru přímkového v páry bodové roviny ω lze docíliti podle předchozího následovně. Přímka A protíná plochu Z^2 ve dvou bodech ${}^1a, {}^2a$, jimiž jdou dvě tvořící přímky ${}^1L$, ${}^2L$ soustavy levé a dvě přímky ${}^1P$, ${}^2P$ soustavy pravé. Příčka A^l z o k ${}^1L$, ${}^2L$ protne ω v bodě a^l, který nazývejme »levým obrazem« přímky A a stejně příčka A^p z o sestrojená k ${}^1P$, ${}^2P$ seče rovinu ω v »pravém obraze« a^p přímky A. Polární rovina ω protíná plochu Z^2 v reálné kuželosečce O^2. Bod a^l je patrně též pólem spojnice průsečíků přímek ${}^1L$, ${}^2L$ s O^2 vzhledem k této kuželosečce a podobně bod a^p je pólem spojnice průsečíků $({}^1PO^2)$, $({}^2PO^2)$ vzhledem k O^2.[4]) Jestliže přímka A protíná plochu Z^2 v imag. bodech, pak přímky ${}^1L$, ${}^2L$ $({}^1P\,{}^2P)$ jsou imag. a dány eliptickou involucí v příslušné soustavě tvořících přímek, jež vytíná eliptickou involucí na kuželosečce O^2, jejíž střed je obrazem a^l (a^p). Protíná-li přímka A plochu Z^2 reálně (imaginárně) tu příslušné obrazy a^l, a^p jsou vně (uvnitř) kuželosečky O^2.

Jestliže přímka A je tečnou T plochy Z^2 v bodě t, tu přímky tvořící L a P bodem tím jdoucí protínají kuželosečku O^2 v bodech t^l a t^p, obrazech to tečny T. Všechny tečny plochy Z^2 v bodě t mají tytéž obrazy na O^2. Přímka L levé soustavy má levý obraz v bodě (LO^2), kdežto pravým obrazem je libovolný bod roviny ω. Jsou tudíž přímky levé soustavy singulárními přímkami vzhledem k pravým obrazům. Obráceně přímky tvořící pravé soustavy jsou singulárními přímkami vzhledem k levým obrazům.[4])

Přímka A, jež není singulární přímkou, má za obraz jediný orientovaný pár bodový a^l, a^p. Avšak nikoliv obráceně, dáno-li a^l, a^p neodpovídá jediná přímka A v prostoru, nýbrž dvě. Spojnice $\overline{oa^l}$ protíná plochu Z^2 ve dvou bodech ${}^1l, {}^2l$, jimiž jdou dvě tvořící přímky ${}^1L, {}^2L$ levé soustavy a přímka $\overline{oa^p}$ protíná dvě přímky ${}^1P, {}^2P$ pravé soustavy v bodech ${}^1p, {}^2p$. Přímky ${}^1L, {}^2L$, ${}^1P, {}^2P$ tvoří na Z^2 zborcený čtyřúhelník, který má dvě úhlopříčky A a A', z nichž prvá spojuje body $({}^1P\,{}^1L)$, $({}^2P\,{}^2L)$ a druhá $({}^1P\,{}^2L)$, $({}^2P\,{}^1L)$. Přímky A a A' jsou sdruženými polárami vzhledem k ploše Z^2. Koincidenčním útvarem v prostoru, t. j. souhrnem všech paprsků, jež mají oba obrazy splývající, je trs paprsků o středu o a paprskové pole ω, jakožto útvary polární vzhledem k Z^2. Jestli obrazy a^l, a^p jsou na

[4]) Je tudíž tato projekce přímkového prostoru zvláštním případem projekce uvažované *Eckhartem:* »Ueber die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie«, Zprávy vídeňské akademie, roč. 1923, str. 177 a v poslední době *F. Rehbockem* v pojednáních: »Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie« a »Projektive Aufgaben aus der darstellenden Geometrie des Strahlenraumes« v 5. a 6. seš. časopisu »Zeitschrift f. angew. Math. und Mechanik«, roč. 1926. Zmínka o této projekci je též v *Eckhart:* »Konstruktive Abbildungsverfahren«, str. 56.

kuželosečce O^2, pak jim odpovídá ∞^1 přímek v prostoru, jež jsou tečnami plochy Z^2 v průsečíku levé tvořící přímky, jdoucí a s pravou tvořící přímkou, jdoucí a^p. Splyne-li a^l s a^p na O^2, tu odpovídají obrazům těmto tečny v bodě tom k Z^2 sestrojené. Náležejí tudíž ke koincidenčnímu útvaru též tečny plochy Z^2 v bodech kuželosečky O^2.

3. Zaměníme-li orientaci páru a^l a a^p a označíme $a^l \equiv b^p$ a $a^p \equiv b^l$, tu příslušná přímka B protíná přímky pravé soustavy jdoucí body ${}^1l, {}^2l$ a přímky levé soustavy, jdoucí body ${}^1p, {}^2p$. Plocha Z^2 je pak v centrálné involutorní kolineaci o středu o a samodružné rovině ω, při čemž přímky levé soustavy přecházejí v přímky pravé soustavy a naopak. Budou tedy přímky B, B', odpovídající obrazům $b^l \equiv a^p$, $b^p \equiv a^l$ odpovídati přímkám A, A' v centrální involuci $(o\omega)$.

»*Přeorientování obrazů přímek, odpovídá v prostoru centrální involuce* $(o\omega)$.«

Přímky, jež mají týž levý obraz a^l vyplňují paprskovou lineární kongruenci o řídicích přímkách ${}^1L, {}^2L$ levé soustavy, jež jdou průsečíky ${}^1l, {}^2l$ přímky $\overline{oa^l}$ se Z^2. Jmenujeme tyto přímky, protínající tytéž dvě přímky levé soustavy »levorovnoběžnými« a stejně přímky protínající tytéž dvě přímky pravé soustavy »pravorovnoběžnými«, jež mají týž pravý obraz. Tak všechny tečny plochy Z^2 v bodech téže přímky levé soustavy jsou levorovnoběžnými, majíce týž levý obraz na O^2, kdežto pravý obraz probíhá kuželosečku O^2.

4. Buď dán v prostoru bod m, pak jím jde ∞^2 přímek, tvořící trs, jenž bude míti za obraz jistou příbuznost mezi levým a pravým polem obrazů přímek trsu toho. Polární rovina μ bodu m k ploše Z^2 protíná plochu tuto v kuželosečce M^2. Tečny z m k Z^2 zobrazují se v páry bodové na kuželosečce O^2. Zvolíme-li tři tyto páry $a^l a^p$, $b^l b^p$, $c^l c^p$ na O^2, jsou tím určeny tři tečné roviny plochy Z^2, jež se protínají v příslušném bodě m. Libovolnému bodu x, co levému obrazu přímky X, jdoucí bodem m, odpovídá v prostoru jediná přímka X, jež jde bodem m a náleží lineární kongruenci levorovnoběžných přímek, mající týž levý obraz x^l a tedy dostaneme jediný odpovídající bod x^p.

Řadě bodové R^l bodů x^l, odpovídá na ploše involuce přímek v levé soustavě a příčky odpovídajících přímek této tvoří lineární komplex podle vytvoření Chaslesova. Přímky tohoto komplexu, jdoucí bodem m, tvoří svazek paprskový, vytínající v pravé soustavě involuci a příčky k odp. párům z o tvoří opět svazek, který na ω vytíná řadu R^p pravých obrazů přímek trsu m, jež mají levé obrazy na přímce R^l. Je tedy přiřaděnost $x^l \longleftrightarrow x^p$ mezi obrazy přímek X' trsu m kolineací. Ježto pak body kuželosečky O^2 odpovídají si v této kolineaci, jako obrazy tečen plochy Z^2 jdoucí bodem m, dostáváme výsledek:

»*Body v prostoru zobrazují se jako kolineace reprodukující kuželosečku* O^2.«

Uvažujeme-li kuželosečku O^2 jako absolutní v rovině ω, lze to vysloviti též takto:

»*Body v prostoru zobrazují se v grupu pohybů hyperbolické roviny.*«

Na O^2 je projektivita určena třemi páry $a^l a^p$, $b^l b^p$, $c^l c^l$, jež má dva samodružné body $p \equiv p^p$, $q^l \equiv q^p$ v průsečících s osou $M \equiv (\mu\omega)$ projektivních řad na O^2. Pól m^c přímky M k O^2 je třetím samodružným bodem této kolineace a je centrálním průmětem bodu m z bodu o a splývajícími obrazy paprsku $\overline{om}$.

Jestliže bod m je v rovině ω, tu rovina μ jde středem o a bodu tomu odpovídá involutorní homologie pro střed $m \equiv m^c$ a osu μ^c, jež je polárou bodu m vzhledem k O^2. Řadě samodružných bodů na μ^c odpovídají paprsky svazku $(m\omega)$ a sice odpovídající bod a přímka jsou pólem s příslušnou polárou vzhledem k O^2.

Bod o má za obraz identitu $x^l \equiv x^p$. Je-li bod m na kuželové ploše (oO^2) mimo O^2, je jeho obrazem kolineace, jejíž všechny tři samodružné body splývají v bodě m^c na O^2.

Bod z plochy Z^2 zobrazuje se v dvojnásob singulární kolineaci v ω. Bodem tím procházejí na ploše Z^2, tvořící přímky L a P. Tečnám plochy v rovině (LP), jdoucím bodem z, odpovídá týž pár $s^l \equiv (LO^2)$, $s^p \equiv (PO^2)$. Libovolnému bodu x na tečně L^c k O^2 v bodě s^l odpovídají všechny body na tečně P^c k O^2 v bodě s^p co pravé obrazy a obráceně. Libovolnému bodu x' odpovídá bod s^p a naopak s je singulárním bodem v poli levých obrazů. V levém obraze je singulární přímka L^c s incidentním singulárním bodem s^l a v pravém P^c s s^p. Průsečík z^c tečen P^c a L^c je centrálním průmětem bodu z. Na O^2 vzniká projektivita singulární o singulárních bodech s^l a s^p.

Pro každý bod m v prostoru vzniká tak na kuželosečce O^2 projektivita jejích bodů a dostáváme tak současně zobrazení bodů prostoru v projektivity na kuželosečce, k němuž dospěl již *Stephanos*[5]) jiným způsobem.

5. Mysleme si v prostoru čtyři body s_i $(i = 1, \ldots, 4)$ téže přímky S, tu budou jim v rovině ω odpovídati čtyři kolineace (s_i), jež reprodukují kuželosečku O^2 a stanoví tudíž na kuželosečce O^2 čtyři projektivity. Buď a' libovolný bod na O^2, stanovme odpovídající jeho body v projektivitách na O^2, určených kolineacemi (s_i). Bodem a' jde na Z^2 přímka L levé soustavy a přímka P pravé soustavy. Polárné roviny σ_i bodů s_i k ploše Z^2 tvoří svazek rovin o ose S', poláře to k S vzhledem k Z^2, který je projektivní s řadou bodů s_i. Roviny ty sečou přímku L v bodech, jimiž jdoucí přímky pravé soustavy, vytínají na O^2 odpovídající body a_i^p v kolineacích (s_i). I je patrně

$$(a_1^p\, a_2^p\, a_3^p\, a_4^p) = (s_1\, s_2\, s_3\, s_4).$$

---

[5]) V pojednání »Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'éspace avec application à l'étude des rotations sphériques« v Mathematische Annalen roč. 1883, str. 299.

Stejně počítáme-li bod a^l k pravému obrazu a označíme-li jej b^p, tu třeba průsečíky přímky P s rovinami σ_i vésti na Z^2 přímky levé soustavy a dostaneme na O^2 body b_i^l a je opět

$$(b_1^l \dots b_4^l) = (a_1^p \dots a_4^p) = (s_1 \dots s_4).$$

Mysleme si v rovině ω libovolný bod x^l a určeme k němu odpovídající body x^p v kolineacích (s_i). Spojnice $\overline{ox^l}$ protíná na Z^2 dvě přímky $^1L, ^2L$ levé soustavy, k nimž z bodů s_i sestrojíme příčky T_i, které patrně jsou v druhé soustavě tvořících přímek hyperboloidu určeného přímkami $S, ^1L, ^2L$ co přímkami prvé soustavy. I vytínají přímky T_i na ^1L a ^2L řady ^1t_i a ^2t_i, jež jsou projektivní. Těmito body jdou na Z^2 přímky pravé soustavy ^1P_i, ^2P_i, jež tvoří na ploše té dvě projektivní řady, jejímiž samodružnými přímkami jsou ony dvě přímky pravé soustavy, jež protínají přímku S. Příčky z o k odpovídajícím přímkám těchto řad určují v ω odpovídající body x_i^p Roviny $(o\,^1P_i)$ a $(o\,^2P_i)$ opisují dva projektivní svazky druhé třídy, jež obalují tutéž kuželovou plochu (oO^2) a tedy svými průsečnicemi vytvářejí kuželovou 2^0, dvojnásob se dotýkající kuželové plochy (oO^2). Bodu x^l odpovídají vzhledem ke všem kolineacím (s_i), v něž zobrazují se body s_i přímky S, body x_i^p, jež jsou na kuželosečce S_p^2 dvojnásob se dotýkající kuželosečky O^2 v bodech, v nichž O^2 protínají přímky pravé soustavy, jež sečou přímku S. Pól společné dotyčné tětivy $\overline{^1p\,^2p}$ je pravým obrazem s^p přímky S. Dostáváme tudíž:

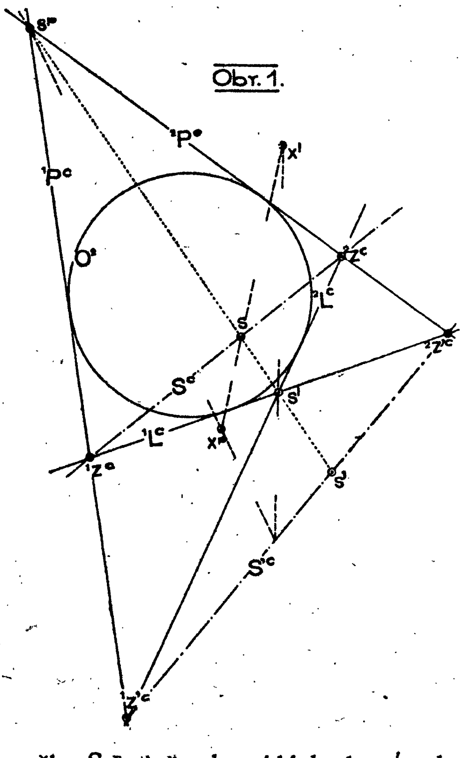
»Přímky, jež mají týž levý obraz x' neb jsou levorovnoběžné a protínají přímku S, mají pravé obrazy na kuželosečce S_p^2, dvojnásob se dotýkající kuželosečky O^2 a pól dotyčné tětivy je v pravém obraze přímky S.«

Ve smyslu neeuklidovské geometrie pro absolutní kuželosečku O^2 je S^2_p kružnicí o středu s^p.

Tutéž kuželosečku S_p^2 dostaneme k bodu x' pro libovolnou přímku osnovy 2^0 $(^1L\,^2LS)$. Tyto přímky protínají tytéž dvě přímky $^1P, ^2P$ pravé soustavy, ježto plochy Z^2 a $(^1L\,^2LS)$ mají dvě přímky jedné soustavy $^1L, ^2L$ společny a tedy podle Steinerovy věty též dvě přímky $^1P, ^2P$ druhé soustavy. Mají tudíž všechny přímky soustavy 2^0 $(^1L\,^2LS)$ tentýž pravý obraz s^p a ježto projektivita, jíž vytínají přímky druhé soustavy na $^1L, ^2L$, je pro všechny tyto přímky S táž, je též kuželosečka S_p pro všechny táž.

V obr. 1. dána kuželosečka O^2 v rovině ω splývající s nákresnou, tu k obrazům s^l. s^p libovolně zvoleným, náležejí v prostoru dvě přímky S a S', jichž centrální průměty z pólu o jsou diagonálami S^c a S'^c čtyřstranu určeného tečnami k O^2 z bodů s^l a s^p mimo diagonálu $\overline{s^l s^p}$. Průsečík s (s') přímky S (S') s ω je v průsečíku průmětu se spojnicí $\overline{s^l s^p}$. Z obrazu patrno, že body s, s' jsou harmonicky sdruženy nejen k O^2, ale i k páru $s^l s^p$. Vrcholy čtyřstranu, ležící na S^c (S'^c) jsou centrálními průměty průsečíků přímky

S (S') s plochou Z^2. Body s (s') jsou póly přímek $S^c(S'^c)$ vzhledem k O^2. Obsahuje-li plocha Z^2, jak předpokládáme, reálné přímky tvořící, pak páry s^l, s^p, jež jsou vně kuželosečky O^2, jsou obrazy přímek protínající reálně plochu a jsou-li uvnitř O^2, jsou obrazy přímek, protínajících Z^2 imaginárně, jak již uvedeno v odst. 2. Kdyby jeden obraz byl uvnitř a druhý vně kuželosečky O^2, pak příslušné přímky jsou konjugovaně imaginárné, mimoběžné.


Obr. 1.

Pro kuželosečku $S_2{}^p$, jež odpovídá bodu x^l v kolineacích, v něž se promítají body přímky S, dostaneme jeden bod x^p, sestrojíme-li k x bod harmonicky sdružený vzhledem k s a poláře S'^c, ježto stopníku s přímky S odpovídá centrální involuce ($s\ S'^c$). Podle obr. 1 též body s^l a s^p odpovídají si v této centrální involuci a tedy délky $\overline{s^l x^l}$ a $\overline{s^p x^p}$ jsou stejné ve smyslu hyperbolické geometrie o absolutní kuželosečce O^2. Je tudíž $S_2{}^p$ kružnicí o středu s^p a poloměru $\overline{s^l x}$.[6])

Naopak, myslíme-li si bod x^p na $S_2{}^p$, bude mu vzhledem k bodům na S odpovídati ∞^1 bodů x^l, jež jsou na kružnici $S_2{}^l$ o středu s^l a téhož poloměru rovném $\overline{s^p x^p}$. Odpovídající si tak kružnice

[6]) Na př. *Hlavatý:* »Úvod do neeuklidovské geometrie«, kapitola IV. a V.

S_2^p, S_2^l, protínají se na centrálním průmětu S^c, jehož body jsou splývající levý a pravý obraz přímek jdoucích bodem o a protínajících přímku S. Zároveň dostáváme větu:

»Aby dvě přímky $\overline{S}$ a $\overline{X}$ se protínaly, musí jich obrazy vyhovovati podmínce $\overline{s^l x^l} = \overline{s^p x^p}$ ve smyslu hyperbolické geometrie o absolutní kuželosečce O^2.«

Jestliže přímka S dotýká se plochy Z^2, tu kuželosečka S_2^p odpovídající bodu má s O^2 dotyk třetího stupně, neb je *horocyklem.*[6])

6. *Prochází-li přímka S středem promítání o,* pak bodu o odpovídá totožnost, průsečíkům ^1z, ^2z s plochou Z^2 odpovídají dvojnásob singulární kolineace, jichž singulární body v pravém obraze jsou v bodech $^1d, {}^2d$, v nichž přímky pravé soustavy jdoucí body $^1z, {}^2z$ protínají kuželosečku O^2. Body $^1d, {}^2d$ jsou též dvojnými body všech projektivit, jež stanoví na O^2 kolineace, jež jsou obrázy bodů přímky S. Procházejí totiž polárné roviny bodů přímky S toutéž přímkou $\overline{S' \equiv {}^1d\,{}^2d}$, obsaženou v ω. Buď s libovolný bod na $S \equiv o\,{}^1z\,{}^2z$. Zvolíme-li bod x' na O^2, budou mu v kolineacích $({}^1z)$, $({}^2z)$, (o), (s) odpovídati pravé obrazy ^1d, ^2d, x^l, x^p a podle dříve dokázané věty platí

$$({}^1d\,{}^2d\,x^l x^p) = ({}^1z\,{}^2z\,o s),$$

což je dvojpoměr projektivity určené na O^2 kolineací (s), odpovídající bodu s v prostoru. Zvolíme-li bod x' libovolně mimo O^2, pak odpovídající body x^p ve všech kolineacích, v něž se zobrazují body s řady S, jdoucí bodem o, vyplní kuželosečku dvojnásob se dotýkající O^2 v bodech $^1d, {}^2d$, která jde též bodem x. Řada bodů x^p na této kuželosečce je projektivní s řadou bodů na S. Společný pól obou kuželoseček k dotyčné tětivě $\overline{^1d\,{}^2d}$ je centrálním průmětem s^c paprsku S.

Promítají se tudíž odpovídající body x^l, x^p v kolineaci (s) z vrcholu ^1d samodružného trojúhelníka této kolineace paprsky, jež se stranami trojúhelníka toho tvoří dvojpoměr

$$^1d\,(s^c\,{}^2d\,x^l x^p) = ({}^1z\,{}^2z\,o s) = k.$$

Z bodu ^2d dostaneme obdobně

$$^2d\,(s^c\,{}^1d\,x^l x^p) = ({}^2z\,{}^1z\,o s) = \frac{1}{k}$$

a tedy je
$$s^c({}^1d\,{}^2d\,x^l x^p) = k^2.$$

Označíme-li

$$\overline{^1ds^c} \equiv {}^1P^c, \quad \overline{^2ds^c} \equiv {}^2P^c, \quad \overline{s^c x^l} \equiv X^l \text{ a } \overline{s^c x^p} \equiv X^p,$$

je úhel přímek X^l a X^p v uvedené již hyperbolické geometrii dán[6])

$$M(X^l X^p) = \frac{i}{2} \log ({}^1P^c\,{}^2P^c\,X^l X^p) = i \log k.$$

Dostáváme tudíž větu:

»*Body s prostoru zobrazují se v otáčení kol centrálního průmětu* s^c *bodu toho o úhel* $M(X^l X^p) = i \log k$, *je-li* k *dvojpoměr, jejž určuje střed promítání o a bod s se základní plochou* Z^2.«

Pro bod s v rovině ω je $k = -1$ a úhel $= -\pi$, což je symetrie podle středu s. Pro průsečíky ${}^1z$ a ${}^2z$ je $k = \infty$ resp. 0, příslušné kolineace jsou singulární. Pro bod s' harmonicky sdružený k s vzhledem k o a ω je $k' = ({}^1z\,{}^2zos') = ({}^2z\,{}^1zos) = \frac{1}{k}$ a tedy příslušný úhel $M' = -M$. Kolineace (s) a (s') jsou inversní, t. j. odpovídající páry bodové $x^l \longleftrightarrow x^p$ jsou přeorientovány.

Místem bodů, k nimž patří týž úhel otočení je plocha druhého stupně, dotýkající se plochy Z^2 podél O^2 a sice bodům plochy té od roviny ω na jednu stranu odpovídá úhel $+M$ a na druhou $-M$.

7. K libovolnému trsu paprskovému s je vzhledem k Z^2 polární pole paprskové σ a toto má totéž zobrazení jako bod s. Dostáváme tudíž:

»*Roviny* σ *zobrazují se v kolineace* (σ) *reprodukující kuželosečku* O^2, *jejíž samodružné body jsou v průsečících* $(O^2\sigma)$ *a v pólu* s^c *této průsečnice* $(\omega\sigma)$ *vzhledem k* O^2. *Ve smyslu hyperbolické geometrie je to otočení kol* s^c *o úhel* $M = i \log k$, *kde* k *je dvojpoměr náležející pólu* s *roviny* σ.«

Obrazy bodů a rovin jsou zde stejné. Tečné roviny τ plochy Z^2 zobrazují se v dvojnásob singulární kolineace, jež též zobrazují příslušný bod dotyku; singulární body jsou v průsečících tečné roviny τ s O^2 a sice průsečík s levou tvořicí přímkou obsaženou v τ je singulární bod v levém obraze a průsečík O^2 s pravou tvořící přímkou v τ je singulárním bodem v pravém obraze. Tečny v singulárních bodech k O^2 jsou singulárními přímkami. Roviny σ, jdoucí středem o promítání, zobrazují se v centrální involuce reprodukující O^2 o ose $(\omega\sigma)$.

8. Paprskový svazek $(a\beta)$, o středu a a rovině β, zobrazuje se se svým polárním svazkem $(b\alpha)$ vzhledem k Z^2, ve dvě projektivní řady bodové A^l, A^p, v nichž odpovídají si průsečíky s kuželosečkou O^2 a tedy ve smyslu hyperbolické geometrie v řady shodné. Řady tyto odpovídají si ve dvou O^2-kolineacích a sice (a) a (b), kde b je pól roviny β.

Dvě O^2-kolineace (a), (b) mají obecně společný jeden pár x^l, x^p odpovídajících si bodů mimo O^2,[7]) jenž je obrazem spojnice $X \equiv \overline{ab}$ nebo průsečnice X' polárných rovin α, β bodů a, b vzhledem k Z^2. Jestli kolineace ty mají společné dva páry odpov. si bodů $x^l\ x^p$, y^l, y^p mimo O^2, pak odpovídají si též průsečíky spojnic $\overline{x^l y^l}$ a $\overline{x^p y^p}$

[7]) Další dva páry společné jsou na O^2 a odpovídají přímkám, jež body a, b spojují s dotyčnými body tečných rovin sestrojených přímkou $\overline{ab}$ k ploše Z^2. Jest-li spojnice $\overline{ab}$ dotýká se plochy Z^2, pak všechny tři páry splynou v témž páru na O^2.

s O^2 a tedy všechny body těchto spojnic a páry odpovídajících si tak bodů jsou obrazy svazku paprskového $(a\beta)$ nebo (ba).

»*Incidence bodu s rovinou vyjádřena v obraze tím, že obě O^2-kolineace, zobrazující útvary ty, mají ∞ párů společných, ležících na dvou odpovídajících si přímkách.*«

Různé věty týkající se vzájemné polohy útvarů v prostoru, skýtají věty o O^2-kolineacích. Na příklad:

Tři body (roviny) obecně položené určují rovinu (bod).	Tři O^2-kolineace určují obecně jedinou O^2-kolineaci, jež s každou z těchto má ∞^1 párů odpovídajících si bodů společných.
Rovina (bod) a v ní neležící (jím nejdoucí) přímka určují bod (rovinu).	Dána-li O^2 kolineace a v ní neobsažený pár $x^l x^p$, tu lze určiti dvě jiné O^2 kolineace, v nichž odpovídají si x x^p a jež s prvou O^2 kolineací mají společné dvě řady odpovídajících si bodů.
Čtyři mimoběžky $ABCD$ v prostoru mají obecně dvě příčky XY.	Ke čtyřem párům obrazů $a^l a^p$, $b^l b^p$, $c^l c^p$, $d^l d^p$ lze obecně určiti 16 párů bodových $x^p x^l$, by $\overline{x^l a^l} = \overline{x^p a^p}, \ldots$ ve smyslu hyp. geometrie.

Při dvou posledních větách vpravo třeba uvážiti, že páru $a^l a^p$ odpovídají dvě přímky A, A' konjugované k Z^2 atd. I lze kombinovati různě vždy jednu přímku z každého páru a určovati pak jich společné příčky. Při tom třeba pamatovati, že příčky čtyř přímek jsou konjugovány k Z^2 s příčkami čtyř jich polár a tedy mají týž obraz. Atd.

9. Provedeme-li po sobě dvě O^2-kolineace (a) a (b) patřící k bodům a, b, dostaneme co výsledek neb součin opět O^2-kolineaci (c), jejímž prostorovým obrazem je bod c. Jak z bodů a, b dostaneme bod c[5])? Body libovolné přímky R v prostoru mají za obrazy O^2 kolineace, jež mají společný pár odpovídajících si bodů r^l, r^p, jenž je obrazem přímky R. Těchto ∞^1 O^2-kolineací nazývá se *svazkem*. Budiž mimo to ještě jedna O^2-kolineace (a) neobsažená v tom svazku. Je-li b libovolný bod na R, tu součin $(a).(b)$ bude kolineace (c), jež obsahuje pár ${}^1r^l$, ${}^1r^p \equiv r^p$, jest-li v (a) bodu ${}^1r^l$ odpovídá bod r^l. Tento pár ${}^1r^l$, ${}^1r^p$ ale obsahují všechny O^2-kolineace (c), probíhá-li (b) svazek (R). Tvoří tudíž (c) opět svazek $({}^1R)$ a body c jsou na přímce ${}^1R$. Mezi body b a c při pevném a je tudíž kolineace. Splyne-li přímka R s přímkou ${}^1L$ (${}^2L$) levé soustavy, již protíná spojnice $\overline{oa}$, pak svazek (R) je svazkem singulárních O^2-kolineací o společném singulárním bodu ${}^1s^l$ (${}^2s^l$) a singulární přímce

${}^1L^c({}^2L^c)$ v levém poli obrazů. Bod a^c je na ${}^1L^c({}^2L^c)$ a má tudíž (a) v ${}^1s^l({}^2s^l)$ dvojný bod. Je patrno, že součinem $(a)\,(b)$, je-li b na ${}^1L\,({}^2L)$ je táž singulární O^2-kolineace (b). Jsou tudíž body b a c při pevném a ve zborcené kolineaci o osách ${}^1L$, ${}^2L$. Bodu o odpovídá identita v obraze a proto počítáme-li bod o, co b, odpovídá mu co c bod a, čímž kolineace ta určena. V této zborcené kolineaci plocha Z^2 odpovídá sama sobě a sice přímky pravé soustavy jsou samodružnými, i odpovídají si též polárné roviny odpovídajících si bodů vzhledem k Z^2. Odpovídá tudíž rovině ω prostoru b polárná rovina α bodu a k Z^2 v prostoru c. Body b v rovině ω zobrazují se (odst. 4) v centrální involuce a je-li b_ω jeden bod ten, tu platí

$$a\,.\,b_\omega = c_\alpha, \quad \text{z čehož} \quad b_\omega = a^{-1} c_\alpha, \quad \text{tedy:}$$

„Body, jichž součinem s daným bodem a je bod v ω, jsou v rovině α' homologické v centr. involuci $(o\omega)$ k polární rovině α bodu a vzhledem k Z^2“ (odst. 3).

Ve svazku O^2-kolineací existuje tudíž obecně jedna O^2-kolineace, jež s jinou O^2-kolineací neobsaženou ve svazku, má za součin centrální involuci, odpovídá průsečíku řady bodové, jejímž obrazem je svazek, s rovinou α'.

Obráceně, je-li bod b a tedy (b) pevné, tu je mezi body a a $c = a\,.\,b$ též zborcená kolineace, jejíž osy jsou v pravých tvořících přímkách, protínající spojnici $\overline{ob}$, při čemž bodu o co a odpovídá bod b co c.

Z toho plyne následující konstrukce bodu $c = a\,.\,b$, dány-li body a a b. Spojnice oa protíná dvě přímky ${}^1L, {}^2L$ levé soustavy a ob protíná dvě přímky ${}^1P, {}^2P$ pravé soustavy. Příčka z a sestrojená k ${}^1P, {}^2P$ a příčka z b k ${}^1L, {}^2L$ se protínají v hledaném bodě c, který je na ploše 2^0, určené přímkami ${}^1L{}^2L{}^1P{}^2P$ a bodem o.

10. Dán-li bod $c = a\,.\,b$, tu body a, b jsou opět v kolineaci K^c, jak patrno z jich obrazů. Probíhá-li (a) svazek o páru odpovídajících bodů r^l, r^p, tu (b) probíhá svazek o základních bodech ${}^1r^l \equiv r^p$ a ${}^1r^p$, jenž v kolineaci (c) odpovídá bodu r^l. Je-li (a) singulární O^2-kolineací, je též (b) singulární kolineací, ale probíhá-li a přímku levé soustavy a příslušné singulární kolineace mají týž levý singulární bod, tu (b) mají týž pravý singulární bod, jenž dostane se transformací (c) z levého singulárního bodu. Jestliže svazek kolineací (a) má týž pravý singulární bod, tu (b) má v bodě tom týž levý singulární bod.

V kolineaci mezi body a, b odpovídá si plocha Z^2 a to tak, že přímky jedné soustavy přecházejí v přímky druhé soustavy. Jelikož bodu o odpovídá identita, bude bodu tomuto co a odpovídati bod c co b. Přímce levé soustavy odpovídá přímka pravé soustavy, protínající se s ní na kuželosečce, v níž polárná rovina γ bodu c protíná Z^2. Kdežto pravé soustavě počítané prostoru a odpovídající přímky levé soustavy protínají se na O^2. Kolineace K^c převádí v obou směrech přímky ${}^1L$, ${}^1P$, resp. ${}^2L$, ${}^2P$, jež jsou v téže tečné rovině jdoucí k ploše Z^2 přímkou oc. Přímky Q, jež protínají přímky ${}^1L$, ${}^2L$ mají týž levý obraz q v bodě $c^c \equiv ({}^1L^c\, {}^2L^c)$ a ježto bod ten je samodružným v (c), budou přímky v kolineaci K^c odpovídající přímkám Q míti týž pravý obraz v tomtéž bodě c^c t. j. budou protínati přímky ${}^1P$, ${}^2P$. Body $({}^1P\,{}^1L)$, $({}^2P\,{}^2L)$ jsou samodružnými body kolineace K^c a druhé dva jsou na poláře spojnice těchto vzhledem k Z^2, t. j. na přímce $\overline{oc}$. Na této přímce $\overline{oc}$ odpovídající body tvoří involuci, ježto pár $({}^1L\,{}^2P)$, $({}^2L\,{}^1P)$ odpovídá si involutorně. Druhý pár této involuce je o, c, čímž samodružné body ${}^1m$, ${}^2m$ určeny a jich obrazy jsou jediné dvě O^2-kolineace, jichž dvojmocí je (c), nepřihlížíme-li k singulárním kolineacím, náležejícím k druhým dvěma samodružným bodům.

Jest-li bod c je na Z^2 pak (c) je singulární o singulárních bodech s^l a s^p na O^2 se singulárními přímkami L^c, P^c, tečnách to k O^2 v singulárních bodech. Libovolnému bodu a přísluší co obraz O^2 kolineace (a), jejíž levé pole přechází kolineací (c) v pravé pole kolineace (b) a levé pole při (b) je totožno s pravým při (a). Přímce L^c odpovídá při (a) přímka L'^c, jež s P^c dává singulární kolineaci (b). Libovolnému bodu a odpovídá tudíž bod b na Z^2, jenž je na pravé tvořící přímce P bodu c a levá jeho tvořící přímka protíná se na O^2 s pravou tvořící přímkou protínající se s levou přímkou bodu c na polárné rovině bodu a. Všem bodům téže tečné roviny v bodě přímky L mimo body na L odpovídá týž bod na P. Mezi přímkami na ploše Z^2 je singulární projektivita a sice levým přímkám odpovídá táž přímka pravá P, jdoucí bodem c, jen levé přímce L bodu c odpovídá libovolná přímka pravá. Pravým přímkám odpovídají přímky levé, protínající se s nimi na kuželosečce O^2. Je-li bod a na Z^2, je (a) singulární o singulárních bodech v dotyčných bodech singulárních přímek ${}^1L^c$, ${}^1P^c$, centr. to průmětech z o přímek ${}^1L$, ${}^1P$, jdoucích bodem a na Z^2. Přímka L^c přejde kolineací (a) v přímku ${}^1P^c$, jež co singulární v levém poli se sing. přímkou P^c v pravém poli určuje kolineaci (b). Odpovídá tudíž bodu a na Z^2 bod b na P a sice průsečík této s přímkou levou, protínající se s pravou, jdoucí bodem a, na O^2. Takže body a na téže pravé přímce mají týž bod na P za odpovídající. Jestliže ale bod a je na přímce L, jdoucí bodem c, tu jeho odpovídající bod b je kterýkoliv bod tečné roviny v bodě přímky P, v němž tato je protata levou přímkou, protínající se s pravou přímkou bodu a na O^2. Kolineace tato je singulární a sice na přímkách L a P, jdoucích bodem c, jsou dvě projektivní řady. Libovolnému bodu řady L odpovídá kterýkoliv bod v tečné rovině sestrojené k Z^2 v odpovídajícím bodě řady na P a naopak. Projektivita na těchto přímkách vyťata přímkami, jež sečou se na kuželosečce O^2.

Z konstrukce bodu $c = a \,.\, b$ z bodů a, b (odst. 9) vyplývá, že bod ten je harmonicky sdružen s bodem $c' = b \,.\, a$ vzhledem k rovině (oab) a pólu této roviny k ploše Z^2 a oběma bodům přináleží totéž k a tedy (c) a (c') jsou rotace o týž úhel (odst. 4).

11. Svými obrazy s^l, s^p (obr. 1) byla přímka S určena dvojznačně. Stopníky s, s' obou vyhovujících přímek S, S' na rovině ω jsou body na spojnici $s^l s^p$, jež k těmto obrazům i kuželosečce O^2 jsou harmonicky sdruženy. Zvolíme-li bod s co stopník přímky určené obrazy s^l, s^p, je tím přímka S určena jednoznačně. Jaký je vztah mezi poli $[s^l]$, $[s^p]$, $[s]$. Předpokládejme, že bod s je pevný, tu s^l, s^p jsou v centrální involuci, jež je obrazem bodu s, střed involuce je v bodě s a osou je polára bodu toho k O^2.

Jestliže bod s^l je pevný, tu ke každému s^p patří dva body s, s', ale bodu s odpovídá jediný bod s^p. Probíhá-li bod s přímku M, pak bod s^p podle odst. 5 probíhá kuželosečku M^2, dvojnásob se dotýkající kuželosečky O^2 v průsečících M s O^2, jež jde též bodem s^l. Dvěma přímkám M, N odpovídají tak dvě kuželosečky M^2, N^2, dvojnásob se dotýkající O^2, jež vedle bodu s^l mají ještě tři body společné, z nichž jen jeden je na spojnisi s^l s (MN) a odpovídá bodu (MN), kdežto dva další průsečíky jsou body, jimž odpovídají na M, N různé body s, jichž spojnice jde bodem s^l. Probíhá-li bod s^p přímku R^p, tu odpovídající páry s, s' probíhají kuželosečku R^2, tvoříce na ní involuci o středu s^l, projektivní s řadou bodů na R^p Kuželosečka R^2 jde body dotyku tečen sestrojených z s^l k O^2 a dotýká se přímek spojujících s^l s průsečíky $(R^p O^2)$ v těchto průsečících. To vyplývá též z prostoru. Svazek přímek, promítající řadu bodovou R^p z bodu o, vytíná v pravé soustavě tvořících přímek na Z^2 involuci, jež na přímkách ${}^1L$, ${}^2L$ levé soustavy, jež sečou $\overline{os^l}$, vytínají páry involuce, jichž spojnice jsou přímkami v prostoru o daných obrazech a jich stopníky na ω dají křivku R^2. Spojnice odpovídajících párů projektivních involucí na dvou mimoběžných přímkách, vytvářejí obecně zborcenou plochu 4^0, jež ale zde rozpadá se v plochu Z^2 a plochu 2^0, jdoucí přímkami ${}^1L$, ${}^2L$ a přímkami pravé soustavy, jdoucími body $(R^p O^2)$ a její přímky po dvou jsou konjugovány vzhledem k Z^2.

»*Při daném obrazu s^l jsou pole* $[s]$ *a* $\cdot[s^p]$ *v* $[2, 1]$*-značné příbuznosti v obou směrech kvadratické a »perspektivné« pro střed s^l.*«

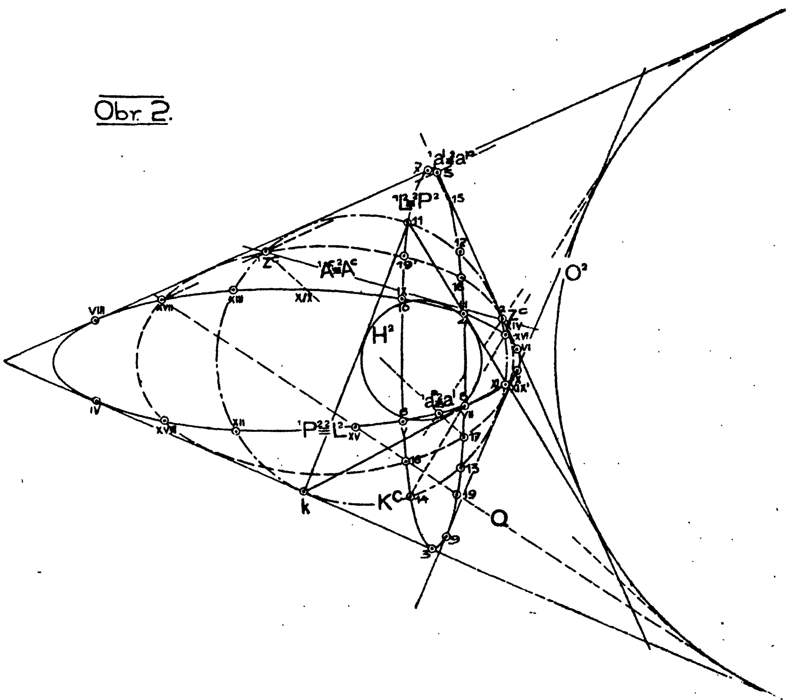
V dvojnásobném poli $[s^p]$ je O^2 křivkou přechodu, t. j. jejím bodům odpovídají splývající body v témže bodě a spojnice jich jde bodem s^l. Bodům s^p na téže straně kuželosečky jako bod s^l odpovídají reálné body s, na opačné imaginárné.

Obdobný vztah panuje mezi poli bodovými $[s]$ a $[s^l]$ při pevném s^p.

12. Přímková plocha **P** n-tého stupně vytíná mezi levými přímkami plochy Z^2 involutorní příbuznost $[n]$-značnou, při čemž odpovídají si ony přímky, jež protínají tutéž tvořící přímku plochy **P**. Paprskový svazek o středu o a libovolné rovině, vytíná v soustavě levých přímek kvadratickou involuci, jež má s involutorní příbuzností $[n]$ společných n párů odpovídajících si přímek. Je tedy le-

vým obrazem plochy **P** křivka P^l n-tého stupně a podobně pravým obrazem křivka téhož stupně P^p. Body těchto křivek jsou obecně v příbuznosti jednoznačné a jsou tudíž téhož rodu. Průsečná křivka (**PZ**^{2}) je stupně $2n$ a tu na **P** existuje podle *Segreova* vzorce[8]) $2n$ přímek tvořících, jež dotýkají se této křivky a tedy plochy **Z**^{2}. Tyto přímky mají své obrazy na kuželosečce O^2 a tedy projektivita mezi body křivek P^l a P^p musí býti taková, že odpovídá sobě $2n$-průsečíků levého obrazu s O^2 s $2n$-průsečíky pravého obrazu s O^2.

Obr. 2.



»*Přímková plocha n^0 má za obrazy dvě projektivní křivky n^0, jichž průsečíky s kuželosečkou O^2 si odpovídají.*«

Týž obraz má plocha **P**′, polárně sdružená k **Z**^{2}. Jestliže plocha **P** je polárně reciprokou k **Z**^{2}, pak obrazy plochy té jsou křivky stupňů polovičních, ježto obrazy dvou polárně sdružených přímek tvořících jsou v témž páru bodovém.

Tvořící přímky rozvinutelné plochy zobrazují se ve dvě isometrické křivky vzhledem k absolutní kuželosečce O^2, ježto odpovídající si elementy obou křivek musí býti stejné (odst. 5), co vzdálenosti obrazů soumezných vzájemně se protínajících tvořících přímek. Kuželové neb válcové plochy zobrazují se ve dvě shodné

---

8) Pascal: Repertorium der höheren Mathematik, II. díl, 2. část, str. 730.

řady na dvou křivkách, z nichž jedna přechází v druhou pohybem, zobrazujícím vrchol plochy té.

Obrazem jedné soustavy přímek na ploše druhého stupně $\mathbf{P}^2$ jsou dvě kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^1P^2$, jichž body jsou projektivně přiřaděny tak, že průsečíky s O^2 si odpovídají. Ježto čtyři prvé body kuželosečky ${}^1L^2$ lze na O^2 zvoliti ∞^4 a tři body druhé kuželosečky ${}^1P^2$ na O^2 ∞^3 způsoby, kdežto čtvrtý průsečík s O^2 je již určen a čtyřmi body lze vždy proložiti ∞^1 kuželoseček, lze takých párů projektivních kuželoseček zvoliti ∞^9, což odpovídá mohutnosti ploch 2^0 v prostoru.

Druhá soustava přímek tvořících plochy $\mathbf{P}^2$ zobrazuje se ve dvě jiné kuželosečky ${}^2L^2$, ${}^2P^2$, jichž projektivní řady vyhovují téže podmínce jako při prvé soustavě. Lze ukázati, že kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^2L^2$ a O^2 náležejí téže řadě kuželoseček, t. j. že dotýkají se těchže čtyř tečen a stejně ${}^1P^2$, ${}^2P^2$ a O^2 náležejí jiné řadě.

Uvažujme nejprve v obr. 2 případ, že plocha $\mathbf{P}^2$ je v involutorní homologii o středu o a rovině samodružné ω jako plocha $\mathbf{Z}^2$. V tomto případě budou splývati ${}^1L^2 \equiv {}^2P^2$ a ${}^2L^2 \equiv {}^1P^2$. Průsečná křivka 4^0 K ploch $\mathbf{Z}^2$ a $\mathbf{P}^2$ bude míti za centrální průmět z o na ω kuželosečku K^c, jež prochází průsečíky kuželoseček O^2 a H^2, v nichž rovina ω protíná plochy $\mathbf{Z}^2$ a $\mathbf{P}^2$ a které tvoří pro toto centrální promítání příslušný obrys. Tvořící přímka ${}^1A$ prvé soustavy na $\mathbf{P}^2$ má průmět v tečně ${}^1A^c$ kuželosečky H^2 a protíná kuželosečku K^c v bodech ${}^1z^c$, ${}^2z^c$, jež jsou centr. průměty průsečíků přímky A s plochou $\mathbf{Z}^2$. Průměty přímek levé soustavy, jdoucích těmito body na $\mathbf{Z}^2$, jsou v příslušných tečnách kuželosečky O^2, jdoucí body ${}^1z^c$, ${}^2z^c$ a jež protínají se v levém obraze ${}^1a$ přímky ${}^1A$. Druhé možné tečny z ${}^1z^c$ a ${}^2z^c$ k O^2 protínají se v příslušném pravém obraze ${}^1a^p$ téže přímky ${}^1A$. Probíhá-li přímka ${}^1A$ prvou soustavou plochy $\mathbf{P}^2$, budou body ${}^1a^l$ resp. ${}^1a^p$ opisovati dvě projektivné kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^1P^2$, jichž průsečíky s O^2 si odpovídají. V obr. 2 vyznačeny příslušné si body obou kuželoseček stejnými ciframi a sice na ${}^1L^2$ arabskými a na ${}^1P^2$ římskými. Libovolná tečna Q kuželosečky O^2 protíná tyto obě kuželosečky a sice každou v reálných dvou bodech, pokud seče kuželosečku K^c ve dvou reálných bodech. Jestliže Q stane se společnou tečnou kuželosečky K^c a O^2, tu splynou oba průsečíky přímky té s kuželosečkami ${}^1L^2$, ${}^1P^2$ a tedy kuželosečky ty mají s O^2 a též K^c společné tečny. Kuželosečka K^c protíná kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^1P^2$ v odpovídajících si bodech a to platí pro všechny kuželosečky řady určené kuželosečkami O^2 a K^c, mezi jiným též o kuželosečkách řady, jež přešly v diagonály čtyřstranu opsaného oběma kuželosečkám.

Průsečíkům kuželoseček ${}^1P^2$, ${}^1L^2$, počítaným ke kuželosečce ${}^1L^2$, odpovídají v projektivitě té dotyčné body kuželosečky ${}^1P^2$ se společnými tečnami, jako průsečíky kuželosečky ${}^1P^2$ se soumeznou kuželosečkou řady. Naopak bodům těm, počítaným ke kuželosečce

${}^1P^2$, odpovídají dotyčné body kuželosečky ${}^1L^2$ se společnými tečnami. Toto vyplývá z věty (obr. 2):

»Tečny sestrojené ke kuželosečkám svazku $(H^2 K^c)$ z libovolného bodu k, protínají kuželosečku K^c svazku, bodem k jdoucí v párech bodových, jichž spojnice obalují kuželosečku svazku O^2, která dotýká se tečny sestrojené ke K^c v bodě k.«

Tečny ty tvoří ve svazku k involutorní příbuznost [2]-značnou a tedy na K^c vzniká též involutorní příbuznost [2]-značná, spojnice pak odpovídajících bodů obalují kuželosečku, jež musí jíti základními body svazku a dotýkati se tečny v bodě k ke K^c, jakožto spojnice průsečíků kuželosečky K^c s tečnami k téže sestrojené z k.

Uvažujeme-li ${}^1A^c$ co průmět přímky druhé soustavy ${}^2A$, jež je k prvé homologická v centrální involuci $(o\omega)$, tu přeorientuje se pár ${}^1a^l, {}^1a^p$ v ${}^2a^p \equiv {}^1a^l$ a ${}^2a^l \equiv {}^1a^p$ a tedy druhá soustava přímek tvořících na $\mathbf{P}^2$ zobrazuje se v tytéž řady projektivné na kuželosečkách ${}^2P^2 \equiv {}^1L^2$ a ${}^2L^2 \equiv {}^1P^2$. Ježto přímky různých soustav jsou různoběžné, musí délky, na př. $\overline{5VI}$ a $\overline{V6}$ býti ve smyslu hyperbolické geometrie stejné pro kuželosečku absolutní O^2. Mezi body kuželoseček ${}^1L^2$, ${}^1P^2$ dostaneme tak zobecněnou *Ivoryho* příbuznost, jež platí pro konfokální kuželosečky.

Dána-li obecně položená plocha $\mathbf{P}^2$, pak lze určiti kolineaci, jež reprodukuje plochu $\mathbf{Z}^2$ a převádí plochu $\mathbf{P}^2$ v jinou, která je v involutorní homologii $(o\omega)$. Buďtež x, ξ vrchol a rovina protější stěny společného polárního čtyřstěnu ploch $\mathbf{P}^2$ a $\mathbf{Z}^2$. Proveďme takou kolineaci, aby třem bodům kuželosečky $(\xi \mathbf{Z}^2)$ odpovídaly tři body kuželosečky $O^2 \equiv (\omega \mathbf{Z}^2)$ a přímky tvořící těchže soustav body těmi jdoucí nechť si odpovídají. Tu plocha $\mathbf{Z}^2$ přejde v sebe a plocha $\mathbf{P}^2$ přejde v jinou ${}^1\mathbf{P}^2$, jež má bod o a rovinu ω za pól s rovinou polárnou. Při této kolineaci pole levých obrazů tvořících přímek plochy $\mathbf{P}^2$ a ${}^1\mathbf{P}^2$ jsou v kolineaci, jež reprodukuje kuželosečku O^2 a stejně pole pravých obrazů. Budou tudíž kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^2L^2$, na nichž jsou levé obrazy obou soustav tvořících přímek obecně položené plochy 2^0 s kuželosečkou O^2 v téže řadě a podobně kuželosečky pravých obrazů ${}^1P^2$, ${}^2P^2$ jsou s O^2 v řadě. Ježto oba tyto páry obrazů vznikly pohybem z těchže dvou kuželoseček ve smyslu hyperbolické geometrie, jsou kuželosečky ty shodné atd.

Jestliže plocha $\mathbf{P}^2$ dotýká se základní plochy $\mathbf{Z}^2$ podél kuželosečky, tu oba obrazy obou soustav splynou s kuželosečkou O^2 a příslušné řady bodové jsou na této projektivné a pro obě soustavy shodné.

Plocha $\mathbf{P}^2$, jež má se $\mathbf{Z}^2$ společné dvě tvořící přímky jedné soustavy, obsahuje též dvě tvořící přímky druhé soustavy. Kuželosečky ${}^1L^2$ a ${}^2P^2$ přejdou v bod a kuželosečky ${}^1P^2$ a ${}^2L^2$ v kuželosečky, jež se dvojnásob dotýkají kuželosečky O^2 a sice prvá v bodech, v nichž polára bodu ${}^2P^2$ vzhledem k O^2 tuto protíná a druhá obdobně v průsečících s polárou bodu ${}^1L^2$. Atd.

13. *Zobrazení paprskových kongruencí.* Libovolnému bodu x^l co levému obrazu paprsku kongruence, bude odpovídati obecně určitý počet bodů co pravých obrazů x^p přímek kongruence, jež současně náležejí lineární kongruenci o řídících přímkách ${}^1L$, ${}^2L$, jež náležejí levé soustavě na Z^2 a protínají ox_l. Ježto kongruence stupně m a třídy n, neboli $[m, n]$, má podle věty Halphenovy s lineární kongruencí $(m+n)$ společných přímek, odpovídá tolikéž bodů x^p bodu x^l. Stejnou příbuznost dostaneme obráceně.

»*Kongruence $[m, n]$ zobrazuje se v příbuznost $[m+n, m+n]$-značnou mezi polem levých a pravých obrazů.*«

Tak pro lineární kongruenci dostaneme příbuznost $[2, 2]$-značnou. Probíhá-li bod x^l přímku Q, tu přímky ${}^1L$, ${}^2L$, v předchozím vytknuté, budou na Z^2 tvořiti involuci kvadratickou a příčky odpovídajících si přímek vyplňují podle Chaslesova vytvoření lineární komplex. Tento komplex má s kongruencí $[m, n]$ společnou plochu stupně $m+n$ a ta podle odst. 12 má za pravý obraz křivku $(m+n)$ stupně. Je tedy příbuznot $[m+n, m+n]$-značná obou polí, jež je obrazem kongruence, stupně $m+n$.

14. Máme-li konečně *paprskový komplex* n^0, tu bude se zobrazovati v jistou příbuznost bodo-křivkovou mezi poli levých a pravých obrazů. Zvolíme-li si bod x^l co levý obraz paprsku komplexu, tu lineární kongruence levorovnoběžných přímek o obrazu levém x^l má s komplexem daným společnou přímkovou plochu stupně a třídy $2n$. Přímková tato plocha má řídící přímky ${}^1L$, ${}^2L$ lineární kongruence za n-násobné řídící přímky a se soustavou pravou na Z^2 má $2n$ přímek společných, jež jsou společny této soustavě a danému komplexu. Pravým obrazem této plochy je křivka stupně $2n$, jež dotýká se O^2 v průsečících této s přímkami pravé soustavy, náležejícími komplexu.

»*Obrazem komplexu paprskového n^0 je příbuznost bodo-křivková mezi poli obraznými a sice stupně $2n$, při čemž křivky téhož pole dotýkají se kuželosečky O^2 v těchže $2n$ bodech.*

Lineární komplex zobrazuje se tudíž v příbuznost bodo-kuželosečkovou. V levé soustavě na Z^2 jsou obecně dvě přímky ${}^1L$, ${}^2L$, náležející komplexu a podobně v pravé soustavě jsou přímky ${}^1P$, ${}^2P$ komplexu. Bodu x^l levého pole odpovídá kuželosečka $X_p{}^2$ v pravém poli, jež dotýká se kuželosečky O^2 v průsečících s ${}^1P$, ${}^2P$. Zvolíme-li na $X_p{}^2$ bod x^p libovolně, bude mu odpovídati kuželosečka $X_l{}^2$, jež jde bodem x^l a dotýká se O^2 v průsečících s ${}^1L$, ${}^2L$. Bodům kuželosečky $X_l{}^2$ odpovídá táž kuželosečka $X_p{}^2$ a naopak. Mezi svazky dvojnásob se dotýkajících kuželoseček $X_l{}^2$ a $X_p{}^2$ je projektivita, při níž odpovídá sama sobě kuželosečka O^2. Průsečíky odpovídajících si kuželoseček jsou splývajícími obrazy paprsků komplexu, jdoucích jednak bodem o a jednak ležících v rovině ω. Průsečíky ty jsou tudíž na dvou přímkách, z nichž jedna je stopou nulové roviny bodu o na rovině ω a druhá je polárou nulového bodu roviny ω vzhledem k O^2. Zvolíme-li tudíž dotyčné body svazků těchto na

O^2 a pár odpovídajících kuželoseček, je tím projektivita obou svazků určena, což odpovídá mohutnosti ∞^5 lineárních komplexů. Pro speciální lineární komplex, skládající se z přímek různoběžných s danou přímkou, dostali jsme stejný výsledek v odst. 5.

Další zajímavý *komplex paprskový* je ten, jehož přímky mají *za obrazy body stejného rozpětí*, t. j. konstantní vzdálenosti vzhledem k absolutní kuželosečce O^2. Je-li X přímka tohoto komplexu, tu jsou-li její obrazy x^l, x^p a protíná-li $S \equiv \overline{x^l x^p}$ kuželosečku O^2 v bodech ξ, η, má se

$$(\xi\,\eta x^l x^p) = \text{konst.} = k.$$

Je-li y^l, y^p jiný pár na S, vyhovující též této podmínce $(\xi\,\eta y^l y^p) = k$, tu dostáváme na S dvě promětné řady

$$\xi\,\eta x^l y^l \ldots . \pi\,\xi\,\eta x^p y^p \ldots . \text{ a}$$

ježto jejich průsečíky s O^2 si odpovídají, jsou shodné vzhledem k O^2.

Jsou tudíž $x^l x^p$, $y^l y^p, \ldots$ obrazy dvou polárních svazků paprskových vzhledem k Z^2, rovina jednoho jde přímkou S a vrchol jeho a je na poláře S' sdružené k S vzhledem k Z^2, jež jde bodem o. Bod a má za obraz O^2-kolineaci, jež má dvojné body v ξ, η a a^c a podle odst. 6 je $(\xi\eta x^l x^p) = ({}^1z\,{}^2zoa)$, jsou-li ${}^1z, {}^2z$ průsečíky přímky S' s plochou Z^2. Ježto dvojpoměr $(\xi\eta x^l x^p)$ pro všechny paprsky hledaného komplexu je týž, budou vrcholy a svazků paprskových, vyhovujících podmínce té na téže ploše P^2 dotýkající se Z^2 podél O^2. Zvolíme-li vrchol svazku a na ploše P^2, jde jeho rovina polárou, spojnice $\overline{oa}$ vzhledem k Z^2. Ježto přímky S a S' jsou sdruženými polárami též vzhledem k P^2, jest svazek paprsk. o vrcholu a, jehož paprsky sečou S, svazkem tečen k P^2 sestrojených v bodě a. Dostáváme tudíž:

Přímky, jichž rozpětí v obrazech je konstantní, tvoří komplex tečen dvou polárních ploch druhého stupně P^2 *a* P'^2 *vzhledem k* Z^2, *jež dotýkají se plochy této podél* O^2.«

Tečny kuželové plochy (oO^2), mezi něž třeba počítati též všechny přímky jdoucí bodem o, jakož i polárně k Z^2 přímky protínající kuželosečku O^2 mají za obrazy dvojiny o rozpětí O.

Tečny plochy Z^2 vyhovují podmínce, kdy rozpětí má býti ∞.

Jak z odvozených vět dostaneme věty kinematické projekce je patrno z odstavce 1.

*

Une généralisation de la représentation cinématique.

(Extrait de l'article précédent.)

La quadrique composée de la représentation cinématique de Blaschke est remplacée, dans le présent travail, par une quadrique gauche générale Z^2, dont les deux systèmes de droites sont désignées respectivement comme système »droit« P et système »gauche« L. Un point arbitraire o, n'appartenant pas à Z^2, est choisi comme centre et son plan polaire ω par rapport à Z^2 comme plan de projection. L'image »droite« (»gauche«) a^p (a^l) d'une droite A est le point d'intersection de ω avec la transversale, menée de o aux deux droites du système »droit« (»gauche«) coupant la droite A. A une paire d'images a^p, a^l correspondent, dans l'espace, deux droites A, A', conjuguées par rapport à Z^2. L'auteur étudie en détail les propriétés de cette projection de l'espace réglé; les résultats sont analogues à ceux qu'on trouve dans la projection cinématique pour une cinématique non-euclidéenne dans ω, la conique absolue étant $O^2 \equiv (\omega Z^2)$. Les points et les plans se représentent comme les collinéations du groupe reproduisant la conique O^2, un point et son plan polaire par rapport à Z^2 ayant la même image. On arrive ainsi à la représentation des points de l'espace par les homographies sur O^2, trouvée par Stéphanos. L'auteur étudie les images des différentes figures de l'espace réglé: des surfaces réglées, des congruences et des complexes. Ainsi, p. ex., le complexe linéaire est représenté par deux faisceaux homographiques de coniques ayant un contact double avec O^2.