Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Láska

Asymetrické křivky frekvencí

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 1, 37--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122038

Asymetrické křivky frekvencí.

Napsal *V. Láska.*

Geometrické metody nejsou dosud ve statistice náležitě využity, ač jest to právě statistický materiál, jenž svým charakterem volá přímo po aplikaci geometrických metod. V následujících úvahách podávám příklad použití geometrie na případ asymetrické křivky frekvencí, která tvoří přirozené rozšíření známé křivky Gaussovy. Symetrická křivka Gaussova

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

jest křivkou seskupení jevů měřitelných zákony matematické náhody a vyskytuje se podle více než stoleté zkušenosti v kolektivech měřených úhlů a délek podstátně tak, že každé jejich kolektivum, jež vede k nějaké jiné křivce frekvencí, předem se považuje za nesprávné.

Zkušenost potvrzuje dále, že stejně zásadně, jako symetrické křivky v kolektivech měřených délek a úhlů, vyskytují se v kolektivech jiného původu křivky asymetrické, t. j. nesouměrné.

Jejich nejjednodušší tvar obdržíme, položíme-li

$$\psi(x) = \psi(0)\{1+\mu^2 x\} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} = \varphi(x)+c\,\varphi'(x).$$

Jde nyní o to, rozhodnouti jednoduchou geometrickou metodou, zda nějaká předložená asymetrická křivka frekvencí jest křivkou vyhovující této rovnici. Platí vztah:

$$\frac{\psi(x)}{\psi(-x)} = \frac{1+\mu^2 x}{1-\mu^2 x},$$

z kterého obdržíme:

$$\mu^2 = \frac{1}{x}\,\frac{\psi(x)-\psi(-x)}{\psi(x)+\psi(-x)}.$$

Je-li tudíž křivka analyticky dána funkcí

$$\psi(x) = \psi(0)(1+\mu^2 x)\, e^{-\frac{\lambda}{2}x^2},$$

musí býti výraz

$$\frac{1}{x}\,\frac{\psi(x)-\psi(-x)}{\psi(x)+\psi(-x)}$$

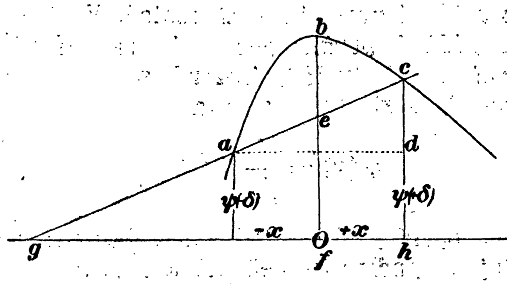
pro všechna x konstantou.

Geometrický význam uvažovaného výrazu vyšetříme snadno. Z obr. 1 plyne úměra

$$\frac{\psi(x)-\psi(-x)}{x'}=\frac{\psi(x)+\psi(-x)}{fg}$$

jest proto

$$fg=x\,\frac{\psi(x)+\psi(-x)}{\psi(x)-\psi(-x)}=\frac{1}{\mu^2},$$



Obr. 1.

co napsáno ve tvaru determinantu dá:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\mu^2} & 1 \\ \psi(-x) & -x & 1 \\ \psi(x) & x & 1 \end{vmatrix}=0$$

a tím i analytický důkaz následující konstrukce:

Proložíme-li koncovými body pořadnic $\psi(x)$ a $\psi(-x)$, t. j. body a a c přímku, pak veškeré tyto přímky procházejí jedním a týmž bodem g. Máme-li tudíž statistickou křivku, ve které spojnice bodů $\psi(x)$ a $\psi(-x)$ procházejí jedním a týmž bodem, jest její rovnice uvažovaného druhu. Příklady podobných křivek viz na př. *G. U. Yule**), *A. L. Bowley***) atd.

Tak můžeme se přesvědčiti, zda nějaký statistický graf jest měřitelný křivkou tvaru

$$\psi(x)=\psi(0)\{1+\mu^2x\}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

nebo ne.

---

*) Český překlad jeho úvodu do teorie statistiky (Praha 1926). Str. 92, obr. 10 a str. 94, obr. 12.

**) Elements of Statistics, 1920, str. 130.

Pro další eventuální úvahy stačí připomenouti, že funkce

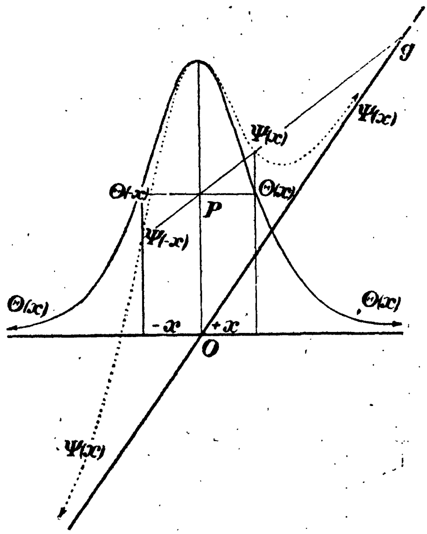
$$\frac{\psi(x)}{1+\mu^2 x} = \theta(x)$$

má tvar Gaussův:

$$\theta(x) = \theta(0)\, e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}.$$

Sestrojení hodnot $\psi(x)$ z daných $\theta(x)$ a naopak jest tudíž snadné. Jest totiž

$$\theta(x) = \tfrac{1}{2}\{\psi(x) + \psi(-x)\};$$



Obr. 2.

a opět

$$\frac{1}{\mu^2} : \theta(x) = \frac{1}{\mu^2} + 1 : \psi(x)$$

co vede ke konstrukci podané na obr. 2.

Sestrojení křivky $\psi(x)$ z $\theta(x)$ provedeme takto: Průsečíkem P spojnice dvou symetricky k ose Y položených bodů

$$+x, \theta(x) \text{ a } -x, \theta(-x),$$

s osou Y a bodem g proložíme přímku, která protne kolmice úseček $+x$, $-x$, v hledaných bodech $\psi(x)$ a $\psi(-x)$.

Bod g nemusí ležeti na ose X. Jsou-li

$$-\nu \text{ a } \frac{1}{\mu^2}$$

jeho souřadnice v obecné poloze, pak přechází funkce $\psi(x)$ ve funkci:

$$\Psi(x) = \nu + \psi(x) = \nu + \varphi(x) + c\varphi'(x).$$

Tím jest dána geometrie prvých tří členů všeobecného rozvoje *H. Brunnsova*

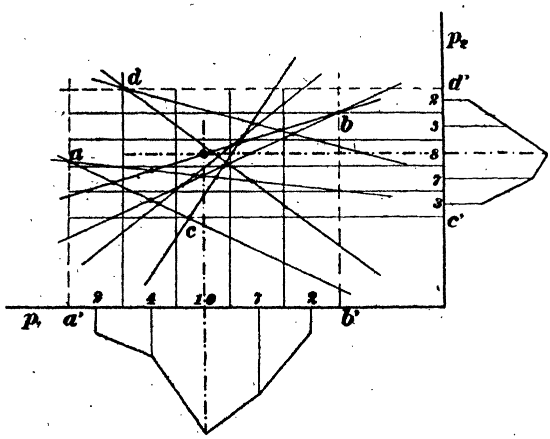
$$\Phi(x) = a_0 + a_1\,\varphi(x) + a_2\,\varphi'(x) + a_3\,\varphi'''(x) + \ldots$$

Hodnota μ jest patrně geometrickou charakteristikou asymetrické křivky uvažovaného tvaru a proto nejpřirozenější mírou její nesouměrnosti (skewness).

Dosud užívalo se míry, kterou zavedl *K. Pearson*,

$$\frac{\text{aritm. průměr} - \text{hodnota } x\,(max)}{\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}},$$

což jest konvencionelní, avšak teoreticky sotva vyhovující míra.



Obr. 3.

Význam asymetrických křivek spočívá v tom, že jejich maximální pořadnice jest zároveň hodnotou nejčastěji v daném souboru se vyskytující a proto hodnotou nejpravděpodobnější, neboť o faktické pravděpodobnosti stejně přesných pozorování rozhoduje jedině maximum statistické pravděpodobnosti. Jak naše úvahy dokazují, jest použití asymetrických křivek právě tak jednoduché jako použití křivky Gaussovy. V praktických případech budou ovšem uvažované spojnice dvou bodů, jejichž x jsou k ose Y symetrické, protínati se v jednom bodu jen nedokonale. K vyhledání nejpravděpodobnější polohy průsečíku existují sice geometrické metody, avšak velmi složité a prakticky sotva upotřebitelné.

Doporučuje se proto stanoviti polohu hledaného průsečíku jednoduše takto:

Promítneme (viz obr. 2) nejkrajnější průsečíky a, b, c, d na dvě kolmice p_1, p_2, čímž obdržíme body a', b', c', d'. Vzdálenosti $a'b'$ a $c'd'$ rozdělíme na pět stejných dílů, vytyčíme v dělicích bodech kolmice a stanovíme v jednotlivých sloupcích obsažený počet bodů.

Sestrojíme nyní, nanášejíce na kolmice ve středu jednotlivých sloupců umístěné délky úměrné počtu bodů v dotyčném sloupci obsažených, křivky jejich frekvencí, pak snadno stanovíme polohu stop jejich maximálních pořadnic na přímkách p_1 a p_2. Jimi vedené kolmice protínají se v hledaném bodu g.

Je-li stanoveno vyrovnané místo průsečíků, t. j. bod g, přistupujeme k rýsování vyrovnané křivky $\psi(x)$. Bodem g a průsečíkem spojnice daných bodů $\psi(x)$ a $\psi(-x)$ s osou Y vedeme přímku, která protne kolmice vytyčené v bodech x, $-x$, ve vyrovnaných bodech $\psi(x)$ a $\psi(-x)$. Uvažovaný způsob grafického vyrovnávání jest patrně nejen nejjednodušší, nýbrž i nejpřirozenější.

Sur les courbes de fréquences asymétriques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur généralise dans cet article la courbe de fréquences de Gauss $\varphi(x)$ par une courbe asymétrique de la forme

$$\psi(x) = \psi(o)\{1 + \mu^2 x\} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} = \varphi(x) + c\varphi'(x)$$

et donne une construction géométrique simple permettant de décider de l'existence de la forme considérée et donnant en même temps graphiquement la valeur μ, qui caractérise la courbe asymétrique considérée.