Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

Řešení některých úloh geometrických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 2, 158--173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122053

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
2a_2 \cos\alpha \sin\gamma &= -e_1 \sin\beta, & 2a_3 \cos\alpha \sin\beta &= -e_1 \sin\gamma,\\
2b_3 \cos\beta \sin\alpha &= -e_2 \sin\gamma, & 2b_1 \cos\beta \sin\gamma &= -e_2 \sin\alpha,\\
2c_1 \cos\gamma \sin\beta &= -e_3 \sin\alpha, & 2c_2 \cos\gamma \sin\alpha &= -e_3 \sin\beta.
\end{aligned}
$$

Porovnáme-li ještě součiny rovnic (51), (55) a každé skupiny rovnic (56), najdeme zase souvislý vztah (6), doplněný výseky a úhly:

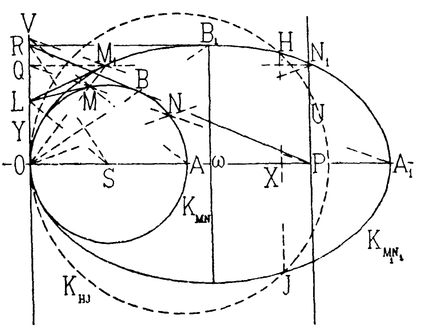
$$
(57)\quad abc = d_1 d_2 d_3 = a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2 = \frac{-e_1 e_2 e_3}{8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.
$$

Řešení některých úloh geometrických.

Žákům středních škol podává

Václav Jeřábek,
professor při c. k. vyšší realné škole v Brně.

I. Jest dán kruh dotýkající se osy OY v počátku O. Pevným bodem P (p, o) vedený paprsek seče kruh v bodech M, N a osu OY v bodu Q (o, q). Přímky OM, ON protínají rovnoběžku vedenou bodem Q s osou OX v bodech M_1, N_1. Jaké jest geom. místo bodů M_1, N_1, a v jakém vztahu jest kružnice ke geom. místu?



Obr. 1.

Řešení. Budiž S (α, o) středem daného kruhu K_{MN}, jenž má rovnici

$$
(1)\qquad x^2 - 2\alpha x + y^2 = 0.
$$

Znamenáme-li

$$OP = p = \frac{1}{u}, \qquad OQ = q = \frac{1}{v},$$

jest rovnice přímky PQ

(2) $$ux + vy - 1 = 0,$$

kdež u má hodnotu stálou a v proměnlivou.

Abychom obdrželi rovnice přímek OM, ON, učiňme rovnice (1) a (2) pomocnou proměnnou λ stejnoměrné, i bude rovnice

$$x^2 - 2\lambda a x + y^2 = 0$$

značiti proměnlivou kružnici K_{MN} a druhá

$$ux + vy - \lambda = 0$$

při stálých hodnotách u, v proměnlivou přímku PQ. Vyloučením λ z posledních dvou rovnic, obdržíme rovnici geom. místa bodů M, N, v nichž proměnlivá kružnice K_{MN} a přímka PQ se protínají. Rovnice přímek jest tedy

(3) $$x^2 + y^2 - 2ax\,(ux + vy) = 0.$$

Položíme-li v rovnici (2) $x = 0$, bude

(4) $$vy - 1 = 0$$

značiti rovnici přímky vedené bodem Q rovnoběžně s osou OX.

Vyloučíme-li z rovnic (3), (4) proměnlivý parametr v, obdržíme rovnici

(5) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2aux^2 = 0.$$

Hledaným geom. místem bodů M_1, N_1 jest kuželosečka dle osy OX souměrně položená a mající s kružnicí danou K_{MN} v počátku styk čtyřbodový, pročež jest K_{MN} kruhem křivosti ve vrcholu jejím O.

Píšeme-li rovnici (5) ve tvaru

$$x^2\,(1 - 2\,au) + y^2 - 2ax = 0,$$

pak poznáváme, že kuželosečka jest ellipsa, parabola nebo hyperbola, je-li charakteristický binom této rovnice

$$B^2 - AC = 1 - 2au$$

kladný, roven nulle nebo záporný.

1. Budiž $1 - \alpha u > 0$ aneb $p > 2\alpha$ (ellipsa).

Splynou-li přímky OM, ON v jedinou přímku OB, splynou i body M, N v jediný bod B a M_1, N_1 v jediný bod B_1. Tečna PR jest mezní polohou sečny PQ a R mezní polohou bodu Q. Přímka QM_1N_1 stane se tečnou RB_1 ellipsy v bodu B_1 a ježto osa OX jest s RB_1 rovnoběžná, jest B_1 vrcholem ellipsy.

K témuž výsledku dospějeme i počtem, když rovnici (3) dáme tvar

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\alpha v\left(\frac{y}{x}\right) + 1 - 2\,\alpha u = 0$$

a uvážíme, že přímky OM, ON splynou v přímku jedinou, jest-li diskriminant této rovnice

$$\alpha^2 v^2 - 1 + 2\,\alpha u = 0. \tag{6}$$

V tomto případě jest

$$\frac{y}{x} = \alpha v$$

a vyloučíme-li v z posledních dvou rovnic, obdržíme rovnici přímky OB_1

$$\frac{y}{x} = \sqrt{1 - 2\,\alpha u}. \tag{7}$$

Obdobně plyne z rovnice (4) a (6) rovnice přímky RB

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\,\alpha u}}$$

Řešíme-li poslední dvě rovnice dle x, bude

$$x_{B_1} = \frac{\alpha}{1 - 2\,\alpha u}$$

úsečkou bodu B_1.

Vrcholy ellipsy na ose OX položené jsou:

$$O(0,\ 0),\ A_1\left(\frac{2\alpha}{1 - 2\,\alpha u},\ 0\right),$$

pročež jest

$$x_\omega = \frac{\alpha}{1 - 2\,\alpha u}$$

úsečkou středu ω ellipsy, a protože $x_{B_1} = x_\omega$, jest B_1 vrcholem ellipsy.

Směrnice přímky OB_1 (7) jest

$$\frac{\omega B_1}{O\omega} = \sqrt{1 - 2\,\alpha u}$$

a přímka RS má směrnici

$$\frac{OR}{OS} = -\frac{y_R}{y_S} = -\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,\alpha u}},$$

jest tedy přímka RS kolmá ku OB_1 a na tom zakládá se známé sestrojení středu S kruhu křivosti ellipsy ve vrcholu O, je-li ellipsa dána svými osami: *Sestrojíme-li totiž z poloos ellipsy obdélník $O\omega B_1 R$, protne kolmice, spuštěná s vrcholu R na úhlopříčku OB, osu $O\omega$ ve hledaném středu křivosti S.*

2. Budiž $1 - 2\,\alpha u = 0$ aneb $p = 2\alpha$ (parabola). Rovnice kuželosečky (5) přejde v rovnici

$$y^2 = 2\,\alpha x,$$

pročež jest parametr α paraboly roven poloměru kruhu křivosti ve vrcholu O a sestrojení kruhu křivosti jest patrné.

3. Nechť jest $1 - 2\,\alpha u < 0$ aneb $p < 2\,\alpha$ (hyperbola). V tomto případě jsou přímky OM, ON, jakož i body B, B_1 imaginárné.

Přímka jdoucí bodem $P\left(\frac{1}{u}, 0\right)$ protíná kruh K_{MN} v bodech EF. Rovnice přímek OE, OF plyne z rovnice (3), položíme-li v ní $v = 0$,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 - 2\,\alpha u = 0$$

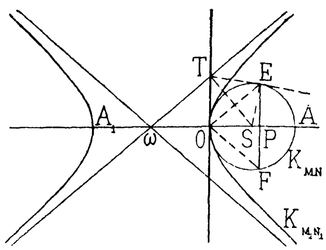
a protože touž rovnici lze obdržeti z kvadratické části rovnice kuželosečky (5), jsou přímky OE, OF rovnoběžny s asymptotami hyperboly.

Ježto hyperbola má své realné vrcholy v bodech O (0, 0),

$A_1 \left(\frac{2\alpha}{1-2\alpha u}, 0\right)$, jest střed její v bodu $\omega \left(\frac{\alpha}{1-2\alpha u}, 0\right)$ a asymptoty budou míti rovnice

$$y = \pm \sqrt{2\alpha u - 1}\left(x - \frac{\alpha}{1-2\alpha u}\right),$$

z nichž jedna protíná osu OY v bodu T $\left(0, \frac{\alpha}{2\alpha u - 1}\right)$.



Obr. 2.

Směrnice přímky OE jest

$$\frac{PE}{OP} = \frac{y}{x} = \sqrt{1-2\alpha u}$$

a přímky ST

$$\frac{OT}{OS} = -\frac{y_T}{y_S} = -\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha u}},$$

z čehož vysvítá, že ST stojí kolmo na OE i ωT, pročež:

Spustíme-li s bodu T, v němž asymptota hyperboly seče její tečnu vrcholovou, kolmici na asymptotu, protne kolmice tato realnou osu ve středu S kruhu křivosti ve vrcholu O.

Pošineme-li při ellipse a hyperbole počátek O do středu $\omega\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha u}, 0\right)$, t. j. píšeme-li $\left(x + \frac{\alpha}{1-2\alpha u}\right)$ místo x do rovnice (5), obdržíme po několika redukcích rovnici

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha u}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{\alpha^2}{1-2\alpha u}}=1$$

aneb. učiníme-li

$$a^2=\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha u}\right)^2, \quad \pm b^2=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha u}, \tag{8}$$

dle toho, je-li $1-2\alpha u \gtrless 0$, dostaneme rovnici ellipsy a hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Vyloučíme-li u z rovnic (8), bude

$$\pm b^2=\alpha a,$$

z kteréžto známé relace plyne již dříve uvedené sestrojení středu kruhu křivosti ve vrcholu ellipsy nebo hyperboly.

2. *Geometrické řešení.* Budiž rovina kruhu K_{NM} průmětnou π (obr. 1.) a kružnice stopou plochy kuželové, jejíž vrchol o má svůj průmět v bodu O. Položme osou OY rovinu ϱ rovnoběžně s přímkou oP, která má svou stopu na průmětně v bodu P. Přímkou PQ a vrcholem o určená rovina seče rovinu ϱ v přímce Qm_1n_1 rovnoběžné s oP a touž rovinou protnuta jest plocha kuželová v přímkách oM, oN. Body m_1, n_1, v nichž Qm_1n_1 protíná přímky oM, oN, přináležejí kuželosečce $K_{m_1n_1}$, ve které rovina ϱ seče plochu kuželovou. Ježto QM_1N_1 jest průmětem přímky Qm_1n_1 a ježto přímky oM, oN mají své průměty v přímkách OM, ON, jest geom. místo bodů M_1, N_1 průmětem $K_{M_1N_1}$ kuželosečky $K_{m_1n_1}$ a tedy též kuželosečkou, která jest s kružnicí K_{MN} v centrálné kollineaci dle osy OQ a středu O.

Rovina s průmětnou rovnoběžná nechť protíná plochu kuželovou v kružnici K_{hi} a rovinu ϱ v přímce hi rovnoběžné se stopou OQ roviny ϱ. Roviny OoP a ϱ sekou se v přímce Oa_1 rovnoběžné s oP. Přímka hi a kružnice K_{hi} mají společné dva body h, i, které jsou dle přímky Oa_1 souměrně položeny a kuželosečce $K_{m_1n_1}$ náležejí. Protože přímka hi jest rovnoběžna s průmětnou π, jsou průměty H, J bodů h, i souměrně sdruženy dle osy oP a náležejí průmětu $K_{M_1N_1}$ kuželosečky $K_{m_1n_1}$. Bod O jest jedním vrcholem kuželosečky $K_{M_1N_1}$, druhý vrchol A_1 jest v centr. kollineaci s bodem A, v němž OP a K_{MN} se protínají. Spojíme-li tedy bod V, v němž AM osu kollineace OQ seče, s bodem M_1, protne spojnice tato osu OP v druhém vrcholu A_1 kuželosečky $K_{M_1N_1}$.

Tečny stejnolehlé v bodech M, M_1 protínají se v bodu samodružném L na ose kollineace OQ. Ježto trojúhelník OMV jest pravoúhlý a LO, LM jsou tečny kruhu K_{MN}, jest

$$LO = LM = LV.$$

Tím jsme geometricky dokázali známou vlastnost:

Tečna kuželosečky půlí část tečny *omezenou jedním vrcholem a bodem, v němž přímka, spojující druhý vrchol s bodem dotyčným, protíná tečnu vrcholovou.*

Je-li kuželosečka parabolou, jest A_1 v nekonečnu a přímka M_1V jest s osou paraboly rovnoběžna.

Dříve jsme seznali, že kružnice K_{hi} má s kuželosečkou $K_{m_1n_1}$ dva body společné *h*, *i* a že i její průmět K_{HJ} protíná kuželosečku $K_{M_1N_1}$ ve dvou bodech H, J, které jsou průměty bodů *h*, *i*. Kromě toho dotýká se kružnice K_{HJ} kuželosečky $K_{M_1N_1}$ ve vrcholu O. Splyne-li však rovina kruhu K_{hi} s průmětnou, stotožní se kruh K_{hi}, jakož i jeho průmět K_{HJ} s kruhem K_{MN}, přímky *hi*, HJ splynou s osou kollineace OQ a body H, J s vrcholem O. Kruh K_{MN} a kuželosečka $K_{M_1N_1}$ mají tedy ve vrcholu O styk čtyřbodový a proto jest K_{MN} kruhem křivosti kuželosečky $K_{M_1N_1}$ ve vrcholu O. Snadno lze nahlédnouti, že přímka LS stojí kolmo na tetivě OM a AV na tetivě OM_1, pročež:

Vedeme-li v kterémkoliv bodu M_1 kuželosečky tečnu LM_1 až k bodu L tečny vrcholové OQ, a spustíme-li s bodu L kolmici na tetivu OM_1 bodu dotyčného, jest průsečík S této kolmice s osou hlavní kuželosečky středem kruhu křivosti ve vrcholu O.

Spojíme-li kterýkoliv bod M_1 kuželosečky s jedním vrcholem A_1 přímkou A_1M_1 a spustíme-li s bodu V, ve kterém AM_1 a tečna druhého vrcholu se protínají, kolmici na tetivu OM_1, protne kolmice tato hlavní osu v bodu A a úsečka OA jest průměrem kruhu křivosti kuželosečky ve vrcholu O.

Rovina položená přímkou oP rovnoběžně s rovinou ϱ má v průmětně π svou stopu v přímce PU (úběžnici) rovnoběžné s OQ. Má-li úběžnice s kružnicí K_{MN} společné dva různé body imaginárné, dva body v jediný bod A splývají aneb dva různé body realné E, F, jest kuželosečka $K_{M_1N_1}$ ellipsou, parabolou nebo hyperbolou.

Je-li kuželosečka ellipsou, jest tečna PB kružnice K_{MN} v bodu B v centr. kollineaci s tečnou vrcholu B_1 a proto průsečík R těchto tečen leží v ose kollinearné OQ. Ježto body B_1 a R jsou zvláštní polohy bodů M_1 a L, jest RS kolmo na OB_1 a na tom zakládá se sestrojení středu křivosti S.

Při hyperbole jest tečna kruhu K_{MN} (obr. 2.) v bodu E v centr. kollineaci s asymptotou hyperboly, která jest s přímkou OE rovnoběžna a prochází bodem T, ve kterém tečna osu kollinearnou OQ seče. V tomto případě jest bod T význačnou polohou bodu L a přímka OE význačnou polohou přímky OM_1, pročež protíná kolmice v bodu T na asymptotu postavená realnou osu hyperboly ve středu křivosti S.

II. Jest dán kruh K, na jeho průměru OA kdekoliv bod P a tečna AQ. Bodem P vedená přímka protíná kružnici K v bodech M, N a tečnu AQ v bodu Q. Nalézti geom. místo bodů M_1, N_1, v nichž přímky OM, ON protínají přímku, jdoucí bodem Q rovnoběžně s OA.

Řešení. Zvolme O za počátek, OA za osu X pravoúhlé soustavy souřadnic a znamenejme $\overline{OA} = 2a$, $\overline{OP} = p = \frac{1}{u}$.

Rovnice kruhu a přímky MN jsou

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0, \tag{1}$$

$$ux + vy - 1 = 0, \tag{2}$$

kdež u, v značí převrácené hodnoty úseků, které přímka MN na osách OX, OY utíná.

Rovnice přímek OM, ON obdržíme, učiníme-li rovnice kruhu a přímky MN pomocnou proměnnou stejnoměrné a vyloučíme-li tuto proměnnou z obou rovnic. Rovnice přímek zmíněných bude

$$x^2 + y^2 - 2ax(ux + vy) = 0. \tag{3}$$

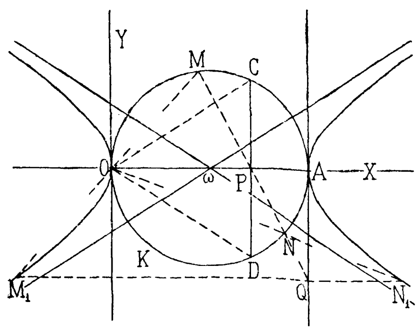
Položíme-li v rovnici (2) $x = 2a$, obdržíme rovnici přímky M_1N_1

$$vy = 1 - 2au.$$

Vyloučíme-li z této rovnice a rovnice (3) proměnný parametr v, nabudeme rovnici

$$x^2(1 - 2au) + y^2 - 2a(1 - 2au)x = 0,$$

která jest rovnicí geom. místa bodů M_1, N_1 a značí kuželosečku.



Obr. 3.

Pošineme-li nyní počátek O do středu ω kružnice K, nezměníce směry os souřadných, t. j. píšeme-li v rovnici poslední $(x + a)$ místo x, dospějeme po několika redukcích k rovnici

$$x^2(1 - 2au) + y^2 = a^2(1 - 2au)$$

aneb

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - 2au)a^2} = 1$$

a položíme-li $(1 - 2au)a^2 = \pm b^2$, obdržíme

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Geom. místem bodů M_1, N_1 jest tedy $\begin{matrix}\text{ellipsa}\\ \text{hyperbola}\end{matrix}$ dle toho, je-li $1 - 2au \gtrless 0$.

Je-li u kladné, jest

$$\frac{1}{u} - 2a \gtrless 0$$

čili $$p - 2a \gtrless 0$$
aneb $$p \gtrless 2a\,.$$

Leží-li tedy bod P mimo kruh v prodlouženém průměru OA, jest geom. místem ellipsa, nalezá-li se však bod P na průměru uvnitř, jest geom. místo hyperbola.

Je-li u záporné, jest i p záporné a výraz $(1 - 2au)$ kladný, pročež jest vždy geom. místem ellipsa, leží-li bod P v prodlouženém průměru AO.

Položíme-li do rovnice kruhu

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$x = p = \frac{1}{u}$, bude

$$y = \pm \frac{\sqrt{2au - 1}}{u}$$

a
$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2au - 1} = \pm\sqrt{\mp\frac{b^2}{a^2}}\,,$$

tedy
$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\,i\,, \quad \frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}$$

značí přímky rovnoběžné s asymptotami kuželosečky (4). Přímky dotčené spojují počátek O s body C, D, v nichž kolmice postavená v bodu P na OA kolmo, seče kružnici danou.

2. *Geom. řešení.* Rovina kruhu K budiž průmětnou π (obr. 3.) a O průmětem vrcholu o plochy kuželové, jejíž stopou v průmětně π jest kružnice K. Body P, Q mějme za stopy rovnoběžných přímek oP a m_1Q majících své průměty v přímkách OP a M_1Q. Přímku PQ, která kružnici K seče v bodech M, N lze míti za stopu roviny σ přímkami oP a m_1Q položené. Rovina σ protíná plochu kuželovou v přímkách oM, oN a přímky tyto seče přímka m_1Q v bodech m_1, n_1, které jsou zároveň průsečíky přímky m_1Q s plochou kuželovou. Ježto OM, ON, M_1Q jsou průměty přímek oM, oN a m_1Q, jsou i body M_1, N_1, v nichž M_1Q seče přímky OM, ON, průměty bodů m_1, n_1.

Položíme-li přímkou AQ rovinu ϱ rovnoběžně s přímkou oP, bude ϱ obsahovati též přímku m_1Q a ježto m_1, n_1 jsou dvěma body společnými rovině ϱ a ploše kuželové, jest geom. místem bodů m_1, n_1 průsek roviny ϱ s plochou kuželovou a geom. místem bodů M_1, N_1 průmět tohoto řezu. Nyní jest patrno, že hledaným geom. místem jest kuželosečka.

Rovina položená vrcholem o plochy kuželové rovnoběžné s rovinou ϱ seče průmětnu π v přímce CD, jdoucí bodem P rovnoběžně se stopou AQ. Má-li tedy přímka CD (úběžnice) a kružnice K dva $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{realné}}{\text{imaginárné}}$ body společné, což nastane tehdy, je-li bod P $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{uvnitř}}{\text{mimo}}$ kruhu K, jest průsek kužele a tedy i hledané geom. místo $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{hyperbolou}}{\text{ellipsou.}}$

Zároveň poznáváme, že kuželosečka a kružnice jsou v centr. kollineaci dle středu O a osy AQ.

III. Bodem A (a, o) jdoucí dvě přímky určují na ose souřadné OY body B (o, b), C (o, —b). Počátkem O pravoúhlých souřadnic vedený paprsek OM seče přímku AB v bodu M_1 a přímku AC v bodu M_2. Budiž $OM = \varrho$, $OM_1 = \varrho_1$, $OM_2 = \varrho_2$.

a) Nalézti geom. místa bodu M, je-li

$$\varrho^2 = \varrho_1\varrho_2;$$
$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}.$$

b) Jaké jest geom. místo bodu, v němž se nalezená geom. místa protínají, je-li a stálé a b proměnlivé?

Řešení: Přímky AB a AC mají rovnice

$$AB \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$
$$AC \equiv \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1.$$

Ježto bod M_1 (x_1, y_1) leží v přímce AB a M_2 (x_2, y_2) v přímce AC, jest

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1,$$
$$\frac{x_2}{a} - \frac{y_2}{b} = 1.$$

Zvolíme-li O za pol, OX za osu polárnou a φ za odchylku paprsku OM od osy OX, bude

$$x_1 = \varrho_1 \cos\varphi, \quad y_1 = \varrho_1 \sin\varphi,$$
$$x_2 = \varrho_2 \cos\varphi, \quad y_2 = \varrho_2 \sin\varphi,$$

pročež

$$\varrho_1\left(\frac{\cos\varphi}{a} + \frac{\sin\varphi}{b}\right) = 1,$$
$$\varrho_2\left(\frac{\cos\varphi}{a} - \frac{\sin\varphi}{b}\right) = 1.$$

1. Podmínku první lze též psáti

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2},$$

i bude

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$$

aneb

$$\varrho^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

Tím jsme obdrželi polárnou rovnici geom. místa bodu M. Přejdeme-li k souřadnicím pravoúhlým, užitím transformačních vzorců $\cos\varphi = \frac{x}{\varrho}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\varrho}$, obdržíme

$$(1) \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Z rovnice této, jakož i z rovnice polární jest patrno, že geom. místem bodu M jest hyperbola.

2. Podmínka druhá

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}$$

vede nás k rovnici

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{ab}$$

aneb

$$\varrho^2 = \frac{ab}{2\sin\varphi\cos\varphi}$$

a přejdeme-li k souřadnicím pravoúhlým, bude

$$(2) \qquad xy = \frac{1}{2}ab.$$

Geom. místem bodu M jest rovnoramenná hyperbola, mající osy souřadné za asymptoty.

3. Vyloučíme-li b z rovnic (1) a (2), dospějeme k rovnici třetího místa geometrického

$$x = \pm a\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}}.$$

Geom. místo skládá se ze dvou realných a dvou imaginárných přímek s osou OY rovnoběžných.

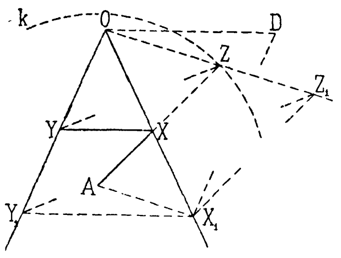
Poznámka. Obdobně lze řešiti úlohu, je-li

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2},\ \varrho^2 = \varrho_1^2 \pm \varrho_2^2,\ \varrho = \varrho_1 \pm \varrho_2,\ \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} \pm \frac{1}{\varrho_2}.$$

IV. V úhlu XOY jest dán bod A; má se vésti v daném směru příčka XY tak, aby součet AX + XY rovnal se dané délce a.)*

Řešení: Budiž XY příčka hledaná a AX + XY = a.

Prodlužme AX o XZ = XY a sestrojme k trojúhelníku XYZ podobně položený trojúhelník $X_1X_1Z_1$ dle bodu O tak, aby $X_1Y_1 = X_1Z_1 = a$. Protože AZ a X_1Z_1 jsou rovnoběžny a stejny, jest paprsek OZZ_1 s AX_1 rovnoběžný. Nyní známe pro Z dvě místa geometrická a to OZ_1 a kružnici ze středu A poloměrem AZ = a sestrojenou, pročež lze bod Z, jakož i AXZ sestrojiti a XY v daném směru vésti.



Obr. 4.

Sestrojení: Veďme přímku OD v daném směru YX a učiňme OD = a, bodem D jdoucí rovnoběžka s OY seče OX v bodu X_1. Sestrojme vrcholem O přímku OZ_1 rovnoběžně s AX_1 a ze středu A poloměrem a kružnici k. Je-li Z průsečíkem

*) Ve zvláštním případě může A ležeti na rameni OY (Viz Petersen, Methoden u. Theorien etc., úl. 186.)

kružnice k s polopaprskem OZ_1, protne přímka AZ rameno OX v bodu X, kterým lze vésti příčku XY ve směru daném DO.

Důkaz: Dle sestrojení jest příčka XY směru daného, polopaprsek OZZ_1 jest s AX_1 rovnoběžný a $AZ = a$. Veďme rovnoběžně X_1Z_1 s XZ a X_1Y_1 s XY. V rovnoběžníku AX_1Z_1Z jest

$$X_1Z_1 = AZ = a,$$
$$X_1Y_1 = DO = a,$$

tedy

$$X_1Y_1 = X_1Z_1.$$

Z podobných trojúhelníků XYZ a $X_1Y_1Z_1$ plyne

$$XY : XZ = X_1Y_1 : X_1Z_1 = 1,$$

pročež

$$XY = XZ$$

a ježto

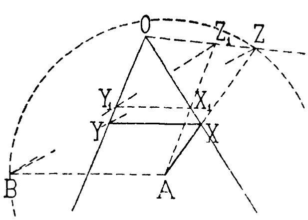
$$AX + XZ = a,$$

jest též

$$AX + XY = a,$$

což bylo dokázati.

Omezení. Seče-li kružnice K polopaprsek ve dvou bodech, v jednom aneb v žádném, má úloha dvojí, jedno anebo žádné řešení. Dotýká-li se polopaprsek kružnice, jest jenom jedno řešení.



Obr. 5.

Druhé řešení. Příčka v daném směru vedená protínejž ramena OX, OY v bodech X, Y tak, že $AX + XY = a$. Prodlužme AX o $XZ = XY$ a k trojúhelníku XYZ sestrojme kterýkoliv stejnolehlý trojúhelník $X_1Y_1Z_1$ dle středu O a osy homologie (kollineace) AB rovnoběžné s XY. Budiž B průsečíkem stejnolehlých stran YZ a Y_1Z_1. Ježto příčka XY jest rovnoběžna s AB, jest

$$AB : AZ = XY : XZ = 1,$$

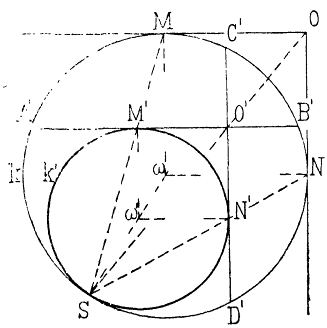
pročež
$$AB = AZ = a.$$

Poloha bodu B jest tedy daným směrem a délkou $AB = a$ určena. Nyní jest patrno, že trojúhelník $X_1Y_1Z_1$ lze snadno sestrojiti a že OZ_1 jest jedním geom. místem pro bod Z. Druhým geom. místem bodu Z jest kružnice sestrojená ze středu A poloměrem $AZ = a$. Místy těmito jest určen vrchol Z trojúhelníka XYZ, jehož další dva vrcholy X, Y snadno lze sestrojiti.

Rozborem předešlým vedeni jsme k následujícímu sestrojení: Veďme AB rovnoběžně s XY a učiňme $AB = a$. Sestrojíme-li v úhlu XOY kteroukoliv příčku X_1Y_1 s AB rovnoběžnou, protnou se AX_1 a BY_1 v bodu Z_1. Seče-li kružnice, ze středu A poloměrem $AB = a$ sestrojená, polopaprsek OZ_1 v bodu Z a je-li X průsečíkem přímky AZ s ramenem OX_1 a Y průsečíkem přímky BZ s ramenem OY_1, jest XY příčkou hledanou.

Kolik řešení vyhovuje úloze, lze poznati jako při řešení předešlém.

V. Sestrojiti kruh, který se dotýká kruhu daného a dvou přímek daných.



Obr. 6.

Buďtež dány dvě přímky, na př. tetivy A′B′ a C′D′ v kruhu k. Kruh k' nechť se dotýká kruhu daného k v bodu S a tetiv A′B′, C′D′ v bodech M′, N′. Považujeme-li S za neznámý bod podobnosti, protnou paprsky SM′, SN′ kružnici k v bodech M, N stejnolehlých ku M′, N′. Tečny kruhu k v bodech M, N protínají se v bodu O stejnolehlém ku průsečíku O′ přímek A′B′, C′D′. Paprsek podobnosti OO′ protíná kruh k ve hledaném bodu podobnosti S. Znajíce nyní ood S, můžeme ku známému bodu dotyčnému M sestrojiti stejnolehlý bod dotyčný M' kruhu k', odkudž sestrojení kruhu k' jest patrné. Při neomezených přímkách, má úloha 8 řešení. K téže konstrukci přichází Machovec vztahy prostorovými ve článku „O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii. (Pátá roční zpráva obecní vyšší realné školy v Karlíně za šk. r. 1879., str. 10.)

Úlohy.

Úloha 17.

Najděte součet čísel mezi 1000 a 2000, která nejsou dělitelna ani 2ma ani 5ti.

Prof. *Ad. Mach.*

Úloha 18.

Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla, aby z těchto čtyř čísel první tři tvořila řadu geometrickou, poslední tři řadu arithmetickou.

Týž.

Úloha 19.

Sečtěte

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

Týž.

Úloha 20.

Sečtěte n členů řady

$$3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots.$$

Týž.

Úloha 21.

Kolik let jest osobě, jejíž stáří rovná se letos součtu číslic onoho roku, ve kterém se narodila?

Týž.

Úloha 22.

V nějakém městě umírá ročně $\frac{1}{90}$ *obyvatelstva, jež bylo na počátku roku;* $\frac{1}{60}$ *téhož obyvatelstva ročně se narodí. Za kolik roků se zdvojnásobí obyvatelstvo tohoto města?*

Týž.