Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vavřinec Jelínek

O trojúhelníku, od jehož každého úhlu ostatní dva jsou odečteny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 2, 145--158

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122055

chází ve 4^h 25^m, zapadá v 7^h 35^m. Jakmile vystoupí nad obzor, začne osvětlovati byt A a B. Byt B do 8^h 53^m, byt A do 12^h 53^m.

Odpoledního slunce byt A nemá, kdežto do bytu B svítí slunce od 7^h do západu.

Byt D jest ozářen od 8^h 53^m ráno do 7^h večer, byt C od 12^h 53^m do západu.

Má tedy byt A 7^h 35^m, B 4^h 38^m, C 5^h 17^m a D 10^h 7^m slunce.

4. *Stěna má směr SSZ. Kterého dne padne na severní její stranu u nás poslední paprsek v $11^1/_2{}^h$?*

Stěna jest znázorněna přímkou Z_2.

Úhel $hm_4o_2 = 67^1/_2{}^0$. Poloměr směřující k hodině $11^1/_4$ protíná přímku Z_2 v bodě z; poloměr dráhy sluneční $= cz$. Kružnice tímto poloměrem opsaná sjednocuje se s kružnicí S_1, jíž vyhovuje 21. červen. (Dokončení.)

O trojúhelníku, od jehož každého úhlu ostatní dva jsou odečteny.

Pojednává

Vavřinec Jelínek,
professor v Novém Městě u Vídně.

(Dokončení.)

Rovnice posledně uvedené lze čísti takto: Trojmoc strany obdržíme, násobíme-li

1. některý její úsek dvojmocí sousedního úseku druhé strany,

2. druhou stranu příčkou této a úsekem třetí přilehlým k straně hledané,

3. odlehlý úsek druhé strany přilehlým úsekem a příčkou třetí strany,

4. příčku této strany dolními úseky obou druhých stran.

Dle některých předešlých rovnic poznáváme také, které tři přímky na sobě závisejí, jimiž tedy trojúhelník určen není. Jsou to tyto skupiny:

1. dle (2) oba úseky a příčka téže strany,
2. dle (4) některá strana a příčky obou druhých stran,
3. dle (4) dvě strany a horní úsek některé z těchto stran,
4. dle (8) dva horní úseky a některá jich strana.

Posud odvozené rovnice dávají vztahy mezi přímkami několika druhů; v následujícím sestavíme ještě poměry mezi hodnotami druhu jen dvojího.

1. Strany a příčky.

Dle prvního a třetího členu každé rovnice v (3) nalezneme příčky

$$d_1 = \frac{bc}{a}, \quad d_2 = \frac{ac}{b}, \quad d_3 = \frac{ab}{c} \tag{9}$$

a tedy jejich poměr

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} \tag{10}$$

čili, znamenají-li v_1, v_2 a v_3 výšky trojúhelníka,

$$d_1 : d_2 : d_3 = v_1^2 : v_2^2 : v_3^2.$$

Z rovnice (4) najdeme

$$a = \sqrt{d_2 d_3}, \quad b = \sqrt{d_1 d_3}, \quad c = \sqrt{d_1 d_2}. \tag{11}$$

2. Strany a úseky.

Mimo výsledky rovnic (4):

$$a = \sqrt{bb_1} = \sqrt{cc_1}, \quad b = \sqrt{aa_2} = \sqrt{cc_2}, \quad c = \sqrt{aa_3} = \sqrt{bb_3}$$

a rovnic (8)

$$a = \sqrt[3]{a_2 b_1^2} = \sqrt[3]{a_3 c_1^2}, \quad b = \sqrt[3]{b_3 c_2^2} = \sqrt[3]{b_1 a_2^2},$$
$$c = \sqrt[3]{c_1 a_3^2} = \sqrt[3]{c_2 b_3^2}$$

najdeme ještě tyto úměry:

Z 2. a 3. členů rovnic (4) plyne

$$\begin{aligned} a_3 : b_3 &= b : a, \\ a_2 : c_2 &= c : a, \\ b_1 : c_1 &= c : b, \end{aligned} \tag{12}$$

t. j. dolní úseky dvou stran se mají k sobě jako zvratně tyto strany.

Ze skupin rovnic v (4):

$$b^2 = aa_2, \qquad a^2 = bb_1, \qquad a^2 = cc_1,$$
$$c^2 = aa_3; \qquad c^2 = bb_3; \qquad b^2 = cc_2$$

vycházejí úměry

$$\begin{aligned} a_2 : a_3 &= b^2 : c^2, \\ b_1 : b_3 &= a^2 : c^2, \\ c_1 : c_2 &= a^2 : b^2, \end{aligned} \tag{13}$$

t. j. úseky některé strany se mají k sobě jako dvojmoce druhých k těmto úsekům přilehlých stran.

Z prvních řádek rovnic (8) lze vyčísti (arciť přeurčené) úměry

$$\begin{aligned} a_2 : b_1 &= b^3 : a^3, \\ a_3 : c_1 &= c^3 : a^3, \\ b_3 : c_2 &= c^3 : b^3, \end{aligned} \tag{14}$$

dle nichž se mají horní úseky dvou stran k sobě jako zvratné trojmoce těchto stran.

Dosadíme-li do úměr (13) na místo některé strany její hodnotu dle rovnic (4), obdržíme úměry mezi stranou, některým jejím úsekem a oběma úseky strany druhé:

$$\begin{aligned} a : a_2 &= c_1 : c_2, \text{ neb } & a : a_3 &= b_1 : b_3, \\ b : b_1 &= c_2 : c_1, & b : b_3 &= a_2 : a_3, \\ c : c_1 &= b_3 : b_1 & c : c_2 &= a_3 : a_2; \end{aligned} \tag{15}$$

učiníme-li tak též v úměrách (12), nabudeme úměry mezi některou stranou, jejími úseky a úsekem strany druhé:

$$\begin{aligned} a : a_2 &= b_3^2 : a_3^2, \text{ neb } & a : a_3 &= c_2^2 : a_2^2, \\ b : b_1 &= a_3^2 : b_3^2, & b : b_3 &= c_1^2 : b_1^2, \\ c : c_1 &= a_2^2 : c_2^2 & c : c_2 &= b_1^2 : c_1^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Nahradíme-li v každé první řádce rovnic (8) jednoduchého činitele součinů jeho hodnotou z úměr (15), bude každá strana vyjádřena třemi úseky druhých stran, kteréžto úseky však nejsou ni sousední, ni stejnosměrné:

$$
(17) \qquad \begin{aligned} a^2 &= \frac{c_2}{c_1} b_1^2 = \frac{b_3}{b_1} c_1^2, \quad b^2 = \frac{a_3}{a_2} c_2^2 = \frac{c_1}{c_2} a_2^2, \\ c^2 &= \frac{b_1}{b_3} a_3^2 = \frac{a_2}{a_3} b_3^2. \end{aligned}
$$

Abychom vyjádřili stranu třemi sousedními úseky, dosaďme do každé třetí řádky rovnic (8) místo příčky její hodnotu z rovnic (2) a najdeme

$$
(18) \qquad \begin{aligned} a^6 &= b_1^3 b_3 c_2^2 = c_1^3 c_2 b_3^2, \\ b^6 &= a_2^3 a_3 c_1^2 = c_2^3 c_1 a_3^2, \\ c^6 &= b_3^3 b_1 a_2^2 = a_3^3 a_2 b_1^2. \end{aligned}
$$

Pravidlo v těchto součinech je zřejmé: Šestou mocninu některé strany obdržíme, násobíme-li trojmoc sousedního úseku některé druhé strany druhým úsekem téže strany a dvojmocí úseku následujícího.

Dle rovnice (6) vyjádříme strany jednosměrnými úseky, spojíme-li ji rovnicemi (4), takto: Do

$$abc = a_3 b_1 c_2$$

dosaďme ze (4)

$$c = \frac{b^2}{c_2} \text{ a } b = \frac{a^2}{b_1}, \text{ tedy } c = \frac{a^4}{b_1^2 c_2},$$

a obdržíme

$$a \cdot \frac{a^2}{b_1} \cdot \frac{a^4}{b_1^2 c_2} = a_3 b_1 c_2.$$

Z této rovnice a podobným způsobem nabudeme

$$
(19) \qquad \begin{aligned} a^7 &= a_3 c_2^2 b_1^4 = a_2 b_3^2 c_1^4, \\ b^7 &= b_1 a_3^2 c_2^4 = b_3 c_1^2 a_2^4, \\ c^7 &= c_2 b_1^2 a_3^4 = c_1 a_2^2 b_3^4. \end{aligned}
$$

Vyjdeme-li z hledané strany opačným směrem daných úseků, najdeme sedmou její mocninu, násobíme-li úsek této strany dvojmocí úseku druhé a čtvrtou mocninou úseku třetí strany.

Pozn. Kdo by ze tří přímek uvedených v součinech na 2., 3. neb 4. řádce rovnic (8) neb ze tří sousedních neb ze tří stejnosměrných úseků sestrojil příslušný trojúhelník, našel by 3., 6. neb 7. kořen dané hodnoty graficky.

3. Příčky a úseky.

Vztah tří příček k některému úseku obdržíme z rovnic obsažených v (4). Dosadíme-li na př. do rovnic této skupiny

$$cc_1 = d_2 d_3 \text{ neb } cc_2 = d_1 d_3$$

místo c jeho hodnotu z rovnice $c^2 = d_1 d_2$ téže skupiny rovnic, najdeme tu, jakož i obdobně:

$$(20)\qquad \begin{aligned} d_1 : d_2 &= d_3^2 : c_1^2 \quad \text{neb} & d_1 : d_2 &= c_2^2 : d_3^2, \\ d_1 : d_3 &= d_2^2 : b_1^2, & d_1 : d_3 &= b_3^2 : d_2^2, \\ d_2 : d_3 &= d_1^2 : a_2^2, & d_2 : d_3 &= a_3^2 : d_1^2. \end{aligned}$$

Úměry mezi dvěma příčkami a úseky třetí strany plynou z posledních dvou členů rovnic (3):

$$(21)\qquad \begin{aligned} d_1 : d_2 &= c_2 : c_1, \\ d_1 : d_3 &= b_3 : b_1, \\ d_2 : d_3 &= a_3 : a_2. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li ve (12) strany příčkami dle (11), obdržíme úměry mezi příčkami dvou stran a dolními úseky těchto stran:

$$(22)\qquad \begin{aligned} d_1 : d_2 &= a_3^2 : b_3^2, \\ d_1 : d_3 &= a_2^2 : c_2^2, \\ d_2 : d_3 &= b_1^2 : c_1^2. \end{aligned}$$

Učiníme-li tak též v (14), nabudeme úměry mezi příčkami dvou stran a horními úseky týchž stran:

$$(23)\qquad \begin{aligned} d_1^3 : d_2^3 &= a_2^2 : b_1^2, \\ d_1^3 : d_3^3 &= a_3^2 : c_1^2, \\ d_2^3 : d_3^3 &= b_3^2 : c_2^2. \end{aligned}$$

Zbývá stanoviti vztah jedné příčky k úsekům. Náležejí-li úseky i příčka téže straně, udává jich vztah rovnice (2). Patří-li úseky více stranám, dlužno rozeznávati seskupení těchto úseků.

Úměry mezi příčkou, některým úsekem jeho strany a dolními úseky obou druhých stran dávají druhý a čtvrtý neb druhý a poslední člen rovnic (3):

$$(24)\qquad \begin{array}{ll} d_1 : a_2 = b_1 : c_1, \text{ neb } & d_1 : a_3 = c_1 : b_1\,, \\ d_2 : b_1 = a_2 : c_2, & d_2 : b_3 = c_2 : a_2\,, \\ d_3 : c_1 = a_3 : b_3 & d_3 : c_2 = b_3 : a_3\,. \end{array}$$

Z úměr (14) a z trojmoce případných úměr v (1) na př.:

$$b^3 : c^3 = a_2^3 : d_1^3 = d_1^3 : a_3^3$$

obdržíme vztah mezi příčkou, některým úsekem její strany a horními úseky obou druhých stran:

$$(25)\qquad \begin{array}{ll} d_1^3 : a_2^3 = b_3 : c_2, \text{ neb } & d_1^3 : a_3^3 = c_2 : b_3\,, \\ d_2^3 : b_1^3 = a_3 : c_1, & d_2^3 : b_3^3 = c_1 : a_3\,, \\ d_3^3 : c_1^3 = a_2 : b_1 & d_3^3 : c_2^3 = b_1 : a_2\,. \end{array}$$

Dosadíme-li ve (22) na místo některé příčky její hodnotu z (2), obdržíme vztah příčky k některému úseku její strany a k oběma úsekům druhé strany, která s úsekem první strany nesousedí:

$$(26)\qquad \begin{array}{ll} c_1 : d_1^2 = c_2^3 : a_2^4, \text{ neb } & b_1 : d_1^2 = b_3^3 : a_3^4\,, \\ c_2 : d_2^2 = c_1^3 : b_1^4\,, & a_2 : d_2^2 = a_3^3 : b_3^4\,, \\ b_3 : d_3^2 = b_1^3 : c_1^4 & a_3 : d_3^2 = a_2^3 : c_2^4\,. \end{array}$$

Učiníme-li tak též v úměrách (23), najdeme vztah příčky ku třem sousedním úsekům, z nichž první tato příčka utíná:

$$(27)\qquad \begin{array}{ll} d_1^6 : a_2^4 = b_3^3 : b_1\,, \text{ neb } & d_1^6 : a_3^4 = c_2^3 : c_1\,, \\ d_2^6 : b_1^4 = a_3^3 : a_2\,, & d_2^6 : b_3^4 = c_1^3 : c_2\,, \\ d_3^6 : c_1^4 = a_2^3 : a_3 & d_3^6 : c_2^4 = b_1^3 : b_3\,. \end{array}$$

Porovnejme ještě hodnoty téhož úseku, vypočtené z úměr (24), (26) a (27)

$$a_2^4 = \frac{c_1^4\, d_1^4}{b_1^4} = \frac{c_2^3\, d_1^2}{c_1} = \frac{b_1\, d_1^6}{b_3^3}$$

a obdržíme vztah příčky k stejnoúhlému úseku některé druhé strany a oběma úsekům strany třetí:

$$(28)\qquad \begin{array}{ll} d_1^2 : c_2^3 = b_1^4 : c_1^5\,, \text{ neb } & d_1^2 : b_3^3 = c_1^4 : b_1^5\,, \\ d_2^2 : a_3^3 = c_2^4 : a_2^5\,, & d_2^2 : c_1^3 = a_2^4 : c_2^5\,, \\ d_3^2 : a_2^3 = b_3^4 : a_3^5 & d_3^2 : b_1^3 = a_3^4 : b_3^5\,. \end{array}$$

Abychom našli vztah příčky ke třem sousedním úsekům, z nichž žádný příčka tato neutíná, vyměníme v úměrách (28) třetí člen dle úměry (21), na př. člen b_1 v úměře první takto:

$$b_1^4 = \frac{b_3^4\, d_3^4}{d_1^4} = \frac{b_3^4\, c_1^2\, c_2^2}{d_1^4} \quad \text{[viz (2)]},$$

tedy

$$d_1^2 : c_2^3 = \frac{b_3^4\, c_1^2\, c_2^2}{d_1^4} : c_1^5$$

a obdržíme takto i obdobným způsobem:

$$(29) \qquad \begin{aligned} d_1^6 : c_2^5 &= b_3^4 : c_1^3, \text{ neb } & d_1^6 : b_3^5 &= c_2^4 : b_1^3, \\ d_2^6 : a_3^5 &= c_1^4 : a_2^3, & d_2^6 : c_1^5 &= a_3^4 : c_2^3, \\ d_3^6 : a_2^5 &= b_1^4 : a_3^3 & d_3^6 : b_1^5 &= a_2^4 : b_3^3. \end{aligned}$$

Poměr příčky ke třem stejnosměrným úsekům najdeme, dosadíme-li do úměr (24) na místo v nich obsaženého protisměrného úseku jeho hodnotu z úměr (27), vyjádřenou touže příčkou. Na př.: V první úměře (24) jest úsek b_1 k ostatním úsekům protisměrný; jeho hodnota jest dána touže příčkou d_1 z první úměry (27):

$$b_1 = \frac{a_2^4\, b_3^3}{d_1^6},$$

zní tedy první úměra v (24):

$$d_1 : a_2 = \frac{a_2^4\, b_3^3}{d_1^6} : c_1,$$

a spořádáme-li ji, obdržíme, jakož i obdobným způsobem:

$$(30) \qquad \begin{aligned} d_1^7 : a_2^5 &= b_3^3 : c_1, \text{ neb } & d_1^7 : a_3^5 &= c_2^3 : b_1, \\ d_2^7 : b_1^5 &= a_3^3 : c_2, & d_2^7 : b_3^5 &= c_1^3 : a_2, \\ d_3^7 : c_1^5 &= a_2^3 : b_3 & d_3^7 : c_2^5 &= b_1^3 : a_3. \end{aligned}$$

4. *Úseky.*

Vztahy mezi skupinami tří stejnosměrných a mezi skupinami tří sousedních úseků dávají rovnice (6) a (7).

Ze součinů v prvních řádkách rovnic (8) obdržíme úměry mezi čtyřmi sousedními úseky, z nichž dva a dva vycházejí z jednoho vrcholu:

$$(31)\qquad \begin{aligned} a_2 : a_3 &= c_1^2 : b_1^2 , \\ b_1 : b_3 &= c_2^2 : a_2^2 , \\ c_1 : c_2 &= b_3^2 : a_3^2 ; \end{aligned}$$

mají se tedy úseky některé strany k sobě jako zvratné dvojmoce dolních úseků na přilehlých druhých stranách.

Spojíme-li úměry (12) s úměrami (14), najdeme úměry mezi čtyřmi sousedními úseky, z nichž však dva a dva náležejí jedné straně:

$$(32)\qquad \begin{aligned} a_2 : b_1 &= a_3^3 : b_3^3 , \\ a_3 : c_1 &= a_2^3 : c_2^3 , \\ b_3 : c_2 &= b_1^3 : c_1^3 , \end{aligned}$$

t. j. horní úseky dvou stran se mají k sobě, jako trojmoce dolních úseků na týchž stranách.

Vztah mezi úseky některé strany a horními úseky druhých stran dají spojené úměry (13) a (14)

$$(33)\qquad \begin{aligned} a_2^3 : a_3^3 &= c_2^2 : b_3^2 , \\ b_1^3 : b_3^3 &= c_1^2 : a_3^2 , \\ c_1^3 : c_2^3 &= b_1^2 : a_2^2 , \end{aligned}$$

t. j. trojmoce úseků některé strany se mají k sobě jako zvratné dvojmoce horních úseků na přilehlých stranách čili jako dvojmoce stejnoúhlých úseků na druhých stranách.

Dosadíme-li do (33) za třetí neb čtvrtý člen hodnotu z (31), najdeme vztah mezi třemi stejnosměrnými úseky a některým protisměrným:

$$(34)\qquad \begin{aligned} a_2^7 : c_2^6 &= a_3^3 : b_1^2 , \text{ neb } & a_3^7 : b_3^6 &= a_2^3 : c_1^2 , \\ b_1^7 : c_1^6 &= b_3^3 : a_2^2 , & b_3^7 : a_3^6 &= b_1^3 : c_2^2 , \\ c_1^7 : b_1^6 &= c_2^3 : a_3^2 & c_2^7 : a_2^6 &= c_1^3 : b_3^2 , \end{aligned}$$

kde člen v 7. mocnině znamená úsek protivného směru.

5. *Úhly a přímky.*

Poměr strany k některému jejímu úseku dává součin dvou úměr z (1):

$$\begin{aligned} a : b &= \sin \alpha : \sin \beta , \\ b : a_2 &= \sin \alpha : \sin \beta ; \end{aligned}$$

tedy

$$(35)\qquad a : a_2 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta$$

a podobně

$$a : a_3 = \sin^2\alpha : \sin^2\gamma, \text{ a. t. d.}$$

Poměr strany k její příčce najdeme též součinem dvou případných úměr z (1):

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$
$$b : d_1 = \sin\alpha : \sin\gamma;$$

tedy

$$a : d_1 = \sin^2\alpha : \sin\beta \sin\gamma$$

a podobně

(36)
$$b : d_2 = \sin^2\beta : \sin\alpha \sin\gamma,$$
$$c : d_3 = \sin^2\gamma : \sin\alpha \sin\beta.$$

Poněvadž dle (1) jest

$$a^2 : b^2 : c^2 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta : \sin^2\gamma,$$

jest dle (10) také

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{\sin^2\alpha} : \frac{1}{\sin^2\beta} : \frac{1}{\sin^2\gamma}$$

neb

(37)
$$d_1 \sin^2\alpha = d_2 \sin^2\beta = d_3 \sin^2\gamma.$$

Dosadíme-li do úměr (12), (13) neb (14) místo poměrů stran poměry úhloměrných funkcí dle (1), obdržíme poměr dolních úseků dvou stran:

(38)
$$a_3 : b_3 = \sin\beta : \sin\alpha,$$
$$b_1 : c_1 = \sin\gamma : \sin\beta,$$
$$a_2 : c_2 = \sin\gamma : \sin\alpha$$

neb poměr úseků téže strany:

(39)
$$a_2 : a_3 = \sin^2\beta : \sin^2\gamma,$$
$$b_1 : b_3 = \sin^2\alpha : \sin^2\gamma,$$
$$c_1 : c_2 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta$$

neb poměr horních úseků dvou stran:

(40)
$$a_2 : b_1 = \sin^3\beta : \sin^3\alpha,$$
$$a_3 : c_1 = \sin^3\gamma : \sin^3\alpha,$$
$$b_3 : c_2 = \sin^3\gamma : \sin^3\beta.$$

Poměr stejnosměrných úseků najdeme takto: Dle (1) jest

$$a_2 = \frac{b \sin\beta}{\sin\alpha}, \quad b_3 = \frac{c \sin\gamma}{\sin\beta}, \quad c_1 = \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma};$$

tedy

$$a_2 : b_3 : c_1 = \frac{b \sin\beta}{\sin\alpha} : \frac{c \sin\gamma}{\sin\beta} : \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

a násobíme-li tuto úměru úměrou v (1)

$$b : c : a = \sin\beta : \sin\gamma : \sin\alpha,$$

obdržíme

$$(41) \qquad a_2 : b_3 : c_1 = \frac{\sin^2\beta}{\sin\alpha} : \frac{\sin^2\gamma}{\sin\beta} : \frac{\sin^2\alpha}{\sin\gamma}.$$

Zde souhlasí úhel v čítateli s úhlem úseku a úhel ve jmenovateli s úhlem strany, ku které úhel náleží.

Úměr (35) až (41) užijeme, řešíce trojúhelník, jehož dvě přímky a některé této přímce náležející úhel neb dva úhly a některému tomuto úhlu příslušná přímka dány jsou. Úměry tyto jsou vesměs zvláštní případy věty sinusové.

Jsou-li však dány dvě přímky a třetí úhel, užijeme věty tangentové

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+b) : (a-b),$$

do které dle potřeby na místo poměru stran dosaditi jest poměr daných přímek, abychom našli ostatní dva úhly. Potřebnou výměnu provedeme dle rovnic (1). Mimo to lze dáti

a) místo některé strany úsek druhé dle (4):

$$(42) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (a + \sqrt{aa_2}) : (a - \sqrt{aa_2})$$
$$= (\sqrt{a} + \sqrt{a_2}) : (\sqrt{a} - \sqrt{a_2})$$

neb

$$= (\sqrt{bb_1} + b) : (\sqrt{bb_1} - b)$$
$$= (\sqrt{b_1} + \sqrt{b}) : (\sqrt{b_1} - \sqrt{b});$$

b) místo stran příčky dle (11):

$$(43) \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (\sqrt{d_2 d_3} + \sqrt{d_1 d_3}) : (\sqrt{d_2 d_3} - \sqrt{d_1 d_3})$$
$$= (\sqrt{d_2} + \sqrt{d_1}) : (\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1});$$

c) místo stran jejich dolní úseky dle (12):

$$(44)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=(b_3+a_3):(b_3-a_3);$$

d) místo stran úseky třetí strany dle (13):

$$(45)\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}):(\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2};$$

e) místo stran jejich horní úseky dle (14):

$$(46)\ \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=(\sqrt[3]{b_1}+\sqrt[3]{a_2}):(\sqrt[3]{b_1}-\sqrt[3]{a_2}).$$

Abychom vypočítali úhly trojúhelníka, jsou-li dány tři různým úhlům příslušné přímky, řídíme se dle vzorce

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

do kterého dosadíme místo stran jich hodnoty, vyjádřené danými přímkami.

Z příček d_1, d_2 a d_3 najdeme

$$(47)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\left(s-\frac{1}{\sqrt{d_2}}\right)\left(s-\frac{1}{\sqrt{d_3}}\right)}{s\left(s-\frac{1}{\sqrt{d_1}}\right)}},$$

ze sousedních úseků

$$(48)\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-\sqrt{a_2})(s-\sqrt{a_3})}{s(s-\sqrt[6]{a_3c_1^2})}}=\sqrt{\frac{(s-\sqrt{a_2})(s-\sqrt{a_3})}{s(s-\sqrt[6]{a_2b_1^2})}},$$

ze stejnosměrných úseků

$$(49)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-\sqrt[7]{a_3c_2^3})(s-\sqrt[7]{a_3^3b_1})}{s(s-\sqrt[7]{b_1^3c_2})}},$$

kde všude s znamená poloviční součet menšitelů.

6. *Výseky* jsou zbytky stran po odečtení jejich úseků. Dle této definice jest

$$
(50) \qquad \begin{aligned} e_1 &= a - a_2 - a_3, \\ e_2 &= b - b_1 - b_3, \\ e_3 &= c - c_1 - c_2, \end{aligned}
$$

a dle obrazce na str. 88.

$$
\begin{aligned}
e_1 &= BC - BC_1 - CB_1 \\
&= BC - (BC - CC_1) - (B_1C_1 + CC_1) \\
&= - B_1C_1, \\
e_2 &= AC - AC_2 - CA_2 \\
&= AC - (AC - CC_2) - (CC_2 + A_2C_2) \\
&= - A_2C_2, \\
e_3 &= AB - AB_3 - BA_3 \\
&= AB - (AB + BB_3) - (A_3B_3 - BB_3) \\
&= - A_3B_3.
\end{aligned}
$$

Výseky stran jsou tedy vůbec záporny.

Jest však výsek také základnou rovnoramenného trojúhelníka, jehož rameny jsou příčky jeho strany a jehož úhel při základně jest roven úhlu původního trojúhelníka, ležícího proti téže straně. (Viz obraz na str. 88.) Jest tedy výsek

$$
(51) \qquad e_1 = - 2d_1 \cos \alpha, \quad e_2 = - 2d_2 \cos \beta, \quad e_3 = - 2d_3 \cos \gamma
$$

dvojnásobným průmětem příslušné příčky na svou stranu a jest kladným, je-li protilehlý úhel trojúhelníka tupým, neb rovná se nulle, je-li tento úhel pravým. Může tedy býti jen jeden výsek kladným neb může též zmizeti.

Násobíme-li každou rovnici (50) některým v ní obsaženým úsekem, nabudeme, přihlížejíce zároveň k rovnicím (3), vztahů některé strany ku příčce, úseku a výseku druhé strany:

$$
(52) \qquad \begin{aligned}
a^2 &= d_2^2 + b_1^2 + b_1e_2 = d_3^2 + c_1^2 + c_1e_3, \\
b^2 &= d_1^2 + a_2^2 + a_2e_1 = d_3^2 + c_2^2 + c_2e_3, \\
c^2 &= d_1^2 + a_3^2 + a_3e_1 = d_2^2 + b_3^2 + b_3e_2
\end{aligned}
$$

a násobíme-li tytéž rovnice stranou v nich obsaženou, najdeme vztahy mezi všemi stranami a výsekem některé:

$$(53)\qquad \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + ae_1, \\ b^2 &= a^2 + c^2 + be_2, \\ c^2 &= a^2 + b^2 + ce_3. \end{aligned}$$

Že rovnice (52) dávají Carnotovu větu, v níž úhloměrná funkce nahrazena jest výsekem, shledáme, dosadíme-li do nich hodnoty výseků dle (51). Význam třetího členu v rovnicích (53) najdeme, násobíme-li každou rovnici (51) příslušnou stranou výseku, přihlížejíce zároveň k rovnicím (3); obdržímeť takto:

$$ae_1 = -2bc\cos\alpha,\; be_2 = -2ac\cos\beta,\; ce_3 = -2ab\cos\gamma$$

a tedy z rovnic (53) zase Carnotovy věty.

Jiné vztahy výseků najdeme ještě takto: Výška v_1 trojúhelníka ABC na stranu a jest zároveň výškou trojúhelníka AB_1C_1, jehož základnou jest výsek e_1 téže strany. Z prvního trojúhelníka nabudeme

$$v_1 = b\sin\gamma = c\sin\beta$$

a z druhého

$$v_1 = -\frac{e_1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Z rovnic těchto a jiných podobně sestavených vycházejí vztahy

$$(54)\qquad \begin{aligned} 2b\sin\gamma &= 2c\sin\beta = -e_1\operatorname{tg}\alpha, \\ 2a\sin\gamma &= 2c\sin\alpha = -e_2\operatorname{tg}\beta, \\ 2a\sin\beta &= 2b\sin\alpha = -e_3\operatorname{tg}\gamma, \end{aligned}$$

dle nichž každá strana jest dána výsekem některé jiné strany. Abychom našli vztah mezi stranou a jejím výsekem, dosaďme do (51) hodnotu pro příčku z úměr (36) a vzniknou rovnice

$$(55)\qquad \begin{aligned} 2a\sin\beta\sin\gamma &= -e_1\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha, \\ 2b\sin\alpha\sin\gamma &= e_2\sin\beta\operatorname{tg}\beta, \\ 2c\sin\alpha\sin\beta &= -e_3\sin\gamma\operatorname{tg}\gamma. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li konečně dle úměr (1) poměr příčky v (51) k některému úseku její strany příslušnými funkcemi, obdržíme vztahy úseku k výseku téže strany:

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
&2a_2 \cos\alpha \sin\gamma = -e_1 \sin\beta, && 2a_3 \cos\alpha \sin\beta = -e_1 \sin\gamma,\\
&2b_3 \cos\beta \sin\alpha = -e_2 \sin\gamma, && 2b_1 \cos\beta \sin\gamma = -e_2 \sin\alpha,\\
&2c_1 \cos\gamma \sin\beta = -e_3 \sin\alpha, && 2c_2 \cos\gamma \sin\alpha = -e_3 \sin\beta.
\end{aligned}
$$

Porovnáme-li ještě součiny rovnic (51), (55) a každé skupiny rovnic (56), najdeme zase souvislý vztah (6), doplněný výseky a úhly:

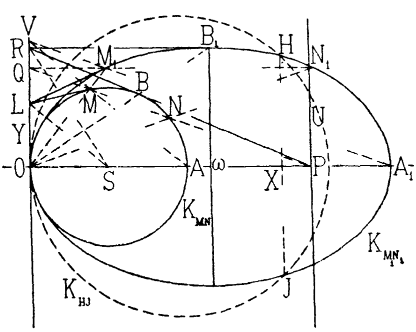
$$
(57)\quad abc = d_1 d_2 d_3 = a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2 = \frac{-e_1 e_2 e_3}{8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.
$$

Řešení některých úloh geometrických.

Žákům středních škol podává

Václav Jeřábek,
professor při c. k. vyšší realné škole v Brně.

I. Jest dán kruh dotýkající se osy OY v počátku O. Pevným bodem P (p, o) vedený paprsek seče kruh v bodech M, N a osu OY v bodu Q (o, q). Přímky OM, ON protínají rovnoběžku vedenou bodem Q s osou OX v bodech M_1, N_1. Jaké jest geom. místo bodů M_1, N_1, a v jakém vztahu jest kružnice ke geom. místu?



Obr. 1.

Řešení. Budiž S (α, o) středem daného kruhu K_{MN}, jenž má rovnici

$$
(1)\qquad x^2 - 2\alpha x + y^2 = 0.
$$

Znamenáme-li