Petr Pecl

Příspěvek ku konstruktivnímu dělení a násobení rovinných obrazců

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 620--635

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122076

Tím jest vlastně již podán důkaz konstrukce. Neboť: Je-li v obr. 3. $\sphericalangle$ *YOD* úhel, jejž máme rozděliti na 3 stejné díly, jest hyperbolová hořejší větev táž, jak ji lze obdržeti užitím pravítka. Rameno *OD* seče hyperbolu v bodě *D*, $OD = OE$, z *D* jest opsán oblouk poloměrem $DE = DF$ a potom vedeno $HK \parallel EF$, při čemž $\sphericalangle FHK = \frac{1}{3} FHD$.

Vzhledem na omezenou velikost hyperboly v trojúhelníkovém pravítku nelze všechny ostré úhly přímo, jak popsáno, děliti na 3 stejné díly.

Při úhlech, které se blíží úhlu pravému, nevystačíme-li s pravítkem, třeba úhel rozpůliti a polovinu děliti na 3 stejné díly. Při úhlech velmi malých pokračujeme tím způsobem, že volíme úhel doplňkový, ten rozpůlíme a polovici dělíme na 3 stejné díly. Dvě třetiny tohoto úhlu odečteny od 30^0 dávají hledaný výsledek.

Při úhlech tupých dělíme výplňkové úhly na 3 stejné díly a odečítáme vyšetřené třetiny úhlové od 60^0. Poněvadž při těchto konstrukcích úhly 60^0 a 30^0 hrají důležitou roli, bylo z praktických důvodů popsané pravítko trojúhelníkové — jak již svrchu řečeno — voleno o 60^0 a 30^0 a lze ho pak při dělení úhlů velmi malých nebo blížících se 90^0 s prospěchem použíti.

Zmíněné pravítko má také tu praktickou stránku, že ho lze mimo vlastní účel také jako obyčejného trojúhelníkového pravítka použíti ku všem konstrukcím. Hyperbolová křivka umožňuje jeho eventuelní použití též co křivítka

---

Příspěvek ku konstruktivnímu dělení a násobení rovinných obrazců.

Napsal Dr. **Petr Pecl.**

Nelze upříti, že konstruktivní úlohy planimetrické náležejí k nejobtížnějším a zároveň k nejinteressantnějším úlohám geometrickým. Méně vycvičenému v podobném řešení zdají se býti na prvý pohled některé z úloh konstruktivně téměř neřešitelnými. Z té příčiny předcházívá řešení počtářské řešení geometrickému, ač jest toto mnohem elegantnější a důvtipnější.

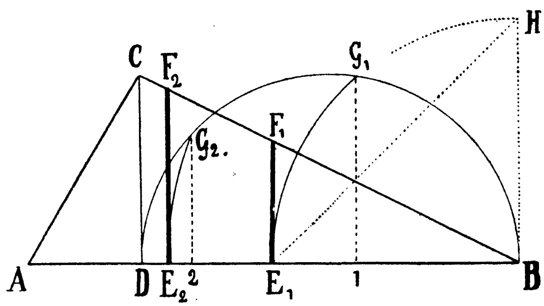
Uvádím zde proto několik zajímavých, elegantních a jednoduchých konstrukcí pro dělení a násobení obrazců, jež lze vhodně applikovati na dělení, resp. násobení pozemků stejné kvality a stejné ceny.

Jest rozděliti $\triangle$ ABC na n stejných dílů příčkami rovnoběžnými s výškou $\triangle$. (V obr. 1. resp. 2. n = 3.)

Rozdělme základnu $\overline{AB}$ na n stejných dílů, čímž obdržíme dílčí body

$$k = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

a sestrojme pak výšku $\overline{CD}$. Tu pak mohou ležeti dílčí body k buď jen po jedné straně (obr. 1.) nebo po obou stranách



Obr. 1.

paty výšky (obr. 2.). V bodech k vztyčme kolmice $\overline{kG_k}$, resp. $\overline{kL_k}$ a opišme nad $\overline{BD}$, v případě druhém též nad $\overline{AD}$ kružnici. Učiňme pak $\overline{BG_k} = \overline{BE_k}$, resp. $\overline{AL_k} = \overline{AH_k}$, a vztyčme v bodech E_k a H_k kolmice $\overline{E_kF_k}$ a $\overline{H_kK_k}$, jimiž jest dělení provedeno.

Z obr. 1. plyne totiž:

$$\triangle BE_kF_k : \triangle BE_{k-1}F_{k-1} = \overline{BE}_k^2 : \overline{BE}_{k-1}^2 =$$

$$= k \frac{\overline{AB} . \overline{BD}}{n} : (k - 1) \frac{\overline{AB} . \overline{BD}}{n} = k : (k - 1),$$

respektive:

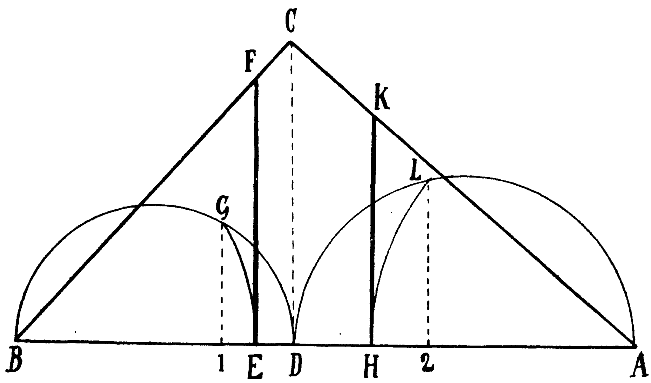
$$(\triangle BE_kF_k - \triangle BE_{k-1}F_{k-1}) : \triangle BE_kF_k = 1 : k,$$

pročež i zbytek

$$\square\ AE_{n-1}F_{n-1}C = \triangle\ BE_1F_1 = \text{lichob. } E_{k-1}E_kF_kF_{k-1},$$

čímž správnost konstrukce dokázána.

Čtenář snadno rozšíří důkaz i na dílčí body ležící po druhé straně paty výšky. (Obr. 2.)



Obr. 2.

Ulohu lze též obrátiti: *Jest násobiti pravoúhlý* $\triangle\ BE_1F_1$ *číslem n!*

Za tím účelem učiňme: $\overline{BH} = \overline{BE_1}$; potom jest

$$\overline{HE}^2_{k-1} = \overline{BE}^2_k = k\overline{BE}^2_1,$$

a proto:

$$\triangle\ BE_1F_1 : \triangle\ BE_kF_k = \overline{BE}^2_1 : k\,\overline{BE}^2_1 = 1 : k,$$

čímž jest správnost konstrukce dovozena.

Jest rozděliti $\triangle\ ABC$ *na n stejných dílů příčkami rovnoběžnými s některou jeho stranou, na př. se str.* $\overline{AC}$*!* (Na obr. 3. $n = 3$.)

Rozdělme stranu $\overline{AB}$ na n stejných dílů a v dílčích bodech k vztyčme kolmice $\overline{kD_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$). Učiňme pak $\overline{BD_k} = \overline{DE_k}$ a veďme body E_k příčky $\overline{E_kF_k} \parallel \overline{AC}$, čímž jest dělení provedeno.

Jest totiž:

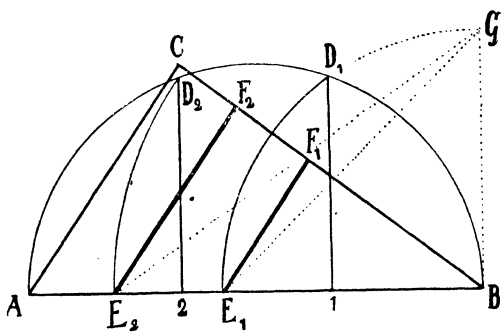
$$\triangle BE_kF_k : \triangle BE_{k-1}F_{k-1} = \overline{BE}_k^2 : \overline{BE}_{k-1}^2$$
$$= k\,\frac{\overline{AB}^2}{n} : (k-1)\,\frac{\overline{AB}^2}{n} = k : (k-1)$$

čili: lichob. $(\triangle BE_kF_k - \triangle BE_{k-1}F_{k-1}) : \triangle BE_kF_k$
$$= 1 : k,$$

pročež

$$\triangle BE_1F_1 = \text{lichob. } E_{k-1}E_kF_kF_{k-1} = \text{lichob. } E_{n-1}F_{n-1}AC,$$

čímž správnost konstrukce dokázána.



Obr. 3.

Úlohu lze též obrátiti: *Jest násobiti $\triangle BE_1F_1$ číslem n!*

Učiňme: $\overline{BG} = \overline{BE_1}$; potom jest

$$\overline{GE}_{k-1}^2 = \overline{BE}_k^2 = k\,\overline{BE}_1^2.$$

Proto:

$$\triangle BE_1F_1 : \triangle BE_kF_k = \overline{BE}_1^2 : k\,\overline{BE}_1^2 = 1 : k,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

čímž jest násobení provedeno.

Jest rozděliti různoběžník ABCD na n stejných dílů příčkami rovnoběžnými se stranou $\overline{AD}$. (Na obr. 4. $n = 2$.)

Učiňme $\overline{HC} \parallel \overline{AD}$ a $\square\, ABCD = \triangle BCE$.

Základnu jeho $\overline{BE}$ rozdělme na n stejných dílů a v dílčích bodech k vztyčme kolmice $\overline{kG_k}$. Nad $\overline{FH}$ opišme kružnici

FG_kH. Učiňme pak $\overline{FG_k} = \overline{FK_k}$ a body K_k veďme příčky $K_kL_k \parallel \overline{AD}$. Tím dělení provedeno.

I jest pak:

$$\triangle HCF : \triangle K_kL_kF = \overline{HF}^2 : \overline{K_kF}^2,$$

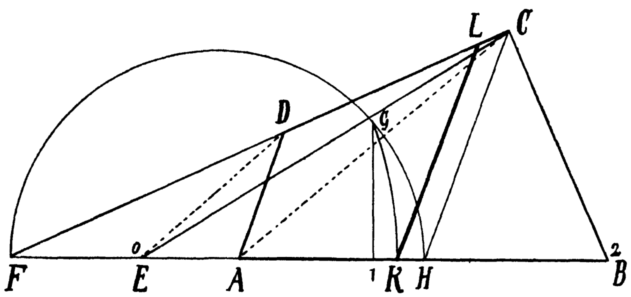
odkudž plyne, že obsah lichoběžníka:

$$HCL_kK_k = \frac{\overline{HF}^2 - \overline{K_kF}^2}{\overline{HF}^2} \triangle HCF$$

$$= \frac{\overline{HF} - \overline{kF}}{2} v = \frac{\overline{Hk}}{2} v,$$

kde v značí výšku $\triangle BEC$ na stranu $\overline{BE}$, a

$$\overline{K_kF}^2 = \overline{HF} \,.\, \overline{kF}.$$



Obr. 4.

Jest tedy obsah lichoběžníka:

$$K_{n-1}L_{n-1}L_kK_k = \left[\frac{\overline{Hk}}{2} - \frac{\overline{H(n-1)}}{2}\right] v$$

$$= \frac{\overline{k(n-1)}}{2} v = (n-k-1) \frac{\overline{BE}}{n} \frac{v}{2}$$

$$= (n-k-1) \frac{\Delta_{BCE}}{n}$$

a proto i:

$$K_{k+1}L_{k+1}L_kK_k = \frac{\Delta_{BCE}}{n}$$

a

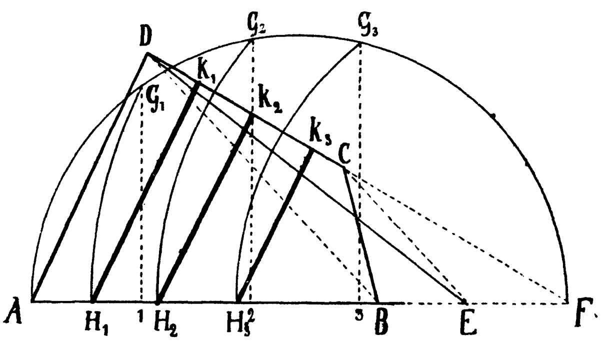
$$K_{n-1}L_{n-1}L_0K_0 = K_{n-1}L_{n-1}DA = (n-1) \frac{\Delta_{BCE}}{n}.$$

Jest tedy též obsah různoběžníka:

$$BK_{n-1}L_{n-1}C = \frac{\Delta_{BCE}}{n},$$

což lze i přímo snadno skonstatovati.

Úloha opačná zní: *Jest násobiti lichoběžník* $AK_1L_1D_1$ *resp. různ.* $AB_1C_1D_1$ *číslem* n*!*



Obr. 5.

Učiňme $\overline{AM} = \overline{AK_1}$, resp. $\overline{AB_1}$, $AM \perp \overline{AK_1}$ a prodlužme úhlopříčku $\overline{AL_1}$, resp. $\overline{AC_1}$; pak jest:

$$\overline{MK}^2_{k-1} = \overline{AK}^2_k = k\,\overline{AK}^2_1 \quad \text{resp.} \quad \overline{MB}^2_{k-1} = \overline{AB}_k = k\,\overline{AB}^2_1.$$

Veďme body K_k, resp. B_k takto stanovenými příčky

$$\overline{K_kL_k} \parallel \overline{K_1L_1}, \quad \text{resp.} \quad \overline{B_kC_k} \parallel \overline{B_1C_1}$$

a body na úhlopříčce L_k příčky $\overline{L_kD_k} \parallel \overline{L_1D_1}$, resp. body C_k $\overline{C_kD_k} \parallel \overline{C_1D_1}$, při čemž body D_k leží na prodloužené straně $\overline{AD_1}$. Potom platí úměra:

$$AK_1L_1D_1 : AK_kL_kD_k = \overline{AK}^2_1 : k\,\overline{AK}^2_1 = 1 : k,$$

resp. $$AB_1C_1D_1 : AB_kC_kD_k = 1 : k,$$

čímž správnost konstrukce dokázána.

Jest rozděliti čtyřúhelník $ABCD$ *na* n *stejných dílů příčkami rovnoběžnými se stranou jeho* $\overline{AD}$; (*specielně na 4 stejné díly*). (Viz obr. 5.)

Proměňme daný čtyřúhelník $ABCD$ v $\triangle AED$ a rozdělme jeho základnu $\overline{AE}$ na n stejných dílů. V dílčích bodech

$$1, 2, \ldots, n-1$$

vztyčme kolmice $\overline{kG_k}$ a prodlužme je až ke kružnici opsané nad $\overline{AF}$, při čemž bod F jest průsečík protějších stran $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Úsečky $\overline{FG_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ přenesme od F na $\overline{AF}$, čímž dostaneme body H_k. Těmito body veďme rovnoběžky ku straně AD. Jimi jest čtyřúhelník na n stejných dílů rozdělen.

Jest totiž

$$\overline{FG}_k^2 = \overline{FH}_k^2 = \overline{AF} \,.\, \overline{Fk} = \overline{AF} \,.\, (\overline{AF} - \frac{k}{n} \overline{AE}),$$

kde

$$k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

a tedy

$$\triangle ADF : \triangle H_kK_kF = \overline{AF} : \left(\overline{AF} - \frac{k}{n} \overline{AE}\right),$$

odkudž plyne úměra:

$$\square\, ADK_kH_k : \triangle ADF = \frac{k}{n} \overline{AE} : \overline{AF},$$

čili

$$\square\, ADK_kH_k = \frac{k}{n} \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \triangle ADF = f(k).$$

Proto též:

$$\square\, ADK_kH_k : \square\, ADK_{k+1}H_{k+1} = k : (k+1),$$

odkudž plyne, že:

$$\square\, ADK_1H_1 = \square\, H_kH_{k+1}K_{k+1}K_k.$$

Budiž v výškou $\triangle ADE$ ke straně $\overline{AD}$, v_1 výškou $\triangle H_{n-1}K_{n-1}E$ ke straně $\overline{H_{n-1}K_{n-1}}$, $v_2 = v - v_1$ výškou lichoběžníka $AH_{n-1}K_{n-1}D$ a V výškou $\triangle AFD$ ke straně $\overline{AF}$. Potom platí úměra:

$$v : v_1 = \overline{AE} : \overline{H_{n-1}E},$$

a dále

$$(v - v_1) : v = \overline{AH_{n-1}} : \overline{AE},$$

odkudž:

$$v_2 = \frac{\overline{AH_{n-1}}}{\overline{AE}}\, v = \frac{\overline{AF} - \overline{FH_{n-1}}}{\overline{AE}}\, v = \frac{\overline{AF} - \overline{FH_{n-1}}}{\overline{AD}} \,.\, V;$$

jestiť:

$$v\,\overline{AD} = V\,\overline{AE}.$$

Ježto pak

$$\frac{\overline{H_{n-1}K_{n-1}}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FH_{n-1}}}{\overline{AF}},$$

jest obsah lichoběžníku $AH_{n-1}K_{n-1}D$:

$$L = \frac{\overline{AD} + \overline{H_{n-1}K_{n-1}}}{2}\, \frac{\overline{AF} - \overline{FH_{n-1}}}{\overline{AD}}\, V = \frac{\overline{AF}^2 - \overline{FH_{n-1}}^2}{2\overline{AF}} \,.\, V,$$

a tedy i

$$\frac{L}{n-1} = \frac{1}{2(n-1)}\, \frac{\overline{AF}^2 - \overline{FH_{n-1}}^2}{\overline{AF}} \,.\, V = \frac{\overline{AE}}{2n}\, V.$$

Jest totiž

$$\frac{\overline{AF}^2 - \overline{FH_{n-1}}^2}{(n-1)\overline{AF}} =$$

$$= \frac{\overline{AF} - \overline{F(n-1)}}{n-1} = \frac{\overline{A(n-1)}}{n-1} = \frac{\overline{AE}}{n},$$

jakož viděti na obr. 5., kde $n = 4$.

Jest tedy:

$$\square\, ADK_1H_1 = H_kH_{k+1}K_{k+1}K_k = H_{n-1}K_{n-1}CD,$$

čímž správnost konstrukce dokázána.

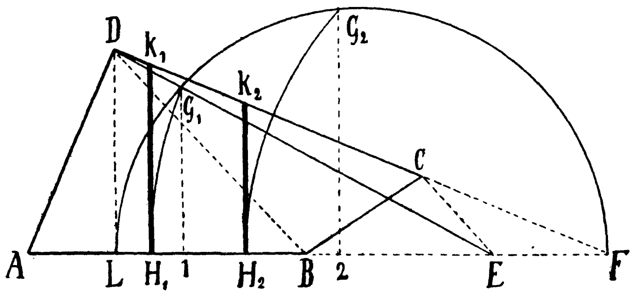
Úloha opačná plyne z dřívějšího.

Jest rozděliti obecný čtyřúhelník ABCD na n stejných dílů příčkami rovnoběžnými s výškou. (*Na obr. 6. a 7.* $n = 3$.)

Různoběžník $ABCD$ přeměněn v $\triangle\, AED$. Základna jeho $\overline{AE}$ jest rozdělena v n stejných dílů. V dílčích bodech k

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

vztyčeny kolmice $\overline{kG_k}$ a prodlouženy až ke kružnici opsané nad $\overline{LF}$, kde L je pata výšky $\overline{DL}$ a F průsečík protějších stran čtyřúhelníku $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$. Úsečky FG_k přeneseny na prodlouženou základnu $\overline{AB}$ od průsečíku F. V dílčích bodech H_k vztyčeny kolmice H_kK_k, jimiž jest čtyřúhelník v n stejných dílů rozdělen.



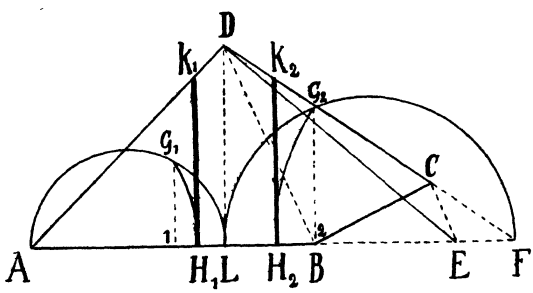
Obr. 6.

Ježto:

$$H_kK_kF : H_{k+1}K_{k+1}F = \overline{H_kF}^2 : \overline{H_{k+1}F}^2,$$

jest též:

$$H_kK_kK_{k+1}H_{k+1} : H_kK_kF = (\overline{H_kF}^2 - \overline{H_{k+1}F}^2) : \overline{H_kF}^2.$$



Obr. 7.

Poněvadž dále:

$$\frac{\overline{H_kK_k}}{\overline{H_kF}} = \frac{\overline{LD}}{\overline{LF}},$$

plyne, že obsah lichoběžníků:

$$H_k K_k K_{k+1} H_{k+1} = \frac{1}{2} \frac{\overline{LD}}{\overline{LF}} (\overline{H_k F}^2 - \overline{H_{k+1} F}^2)$$

$$= \frac{1}{2} \overline{LD} (\overline{Fk} - \overline{F(k+1)})$$

$$= \frac{\overline{LD}}{2} \cdot \frac{\overline{AE}}{n} = \frac{\Delta_{AED}}{n} = \frac{ABCD}{n},$$

vzhledem k tomu, že

$$\overline{H_k F}^2 = \overline{LF} \,.\, \overline{Fk}.$$

Analogicky plyne, že obsah různoběžníku:

$$AH_1 K_1 D = \frac{\overline{AL} \,.\, \overline{LD}}{2} + \frac{\overline{LD}}{2} (\overline{LF} - \overline{1F}) = \frac{\overline{LD}}{2} (\overline{AL} + \overline{L1})$$

$$= \frac{\overline{A1} \,.\, \overline{LD}}{2} = \frac{AE}{n} \cdot \frac{\overline{LD}}{2} = \frac{\Delta_{AED}}{n} = \frac{ABCD}{n},$$

pročež i obsah

$$H_{n-1} K_{n-1} CB = \frac{\Delta}{n},$$

čímž správnost konstrukce dokázána.

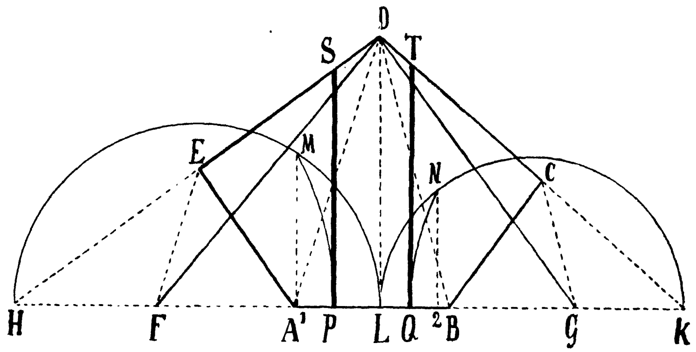
Uvedená konstrukce má platnost v případě, že jsou všechny dílčí body k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$) po téže straně paty výšky. Jsou-li však dílčí body po obou stranách paty výšky, dlužno uvedenou konstrukci applikovati na body po každé straně výšky zvláště, jakož patrno z obr. 7.

Správnost konstrukce plyne již z dřívějšího.

Jest rozděliti daný pětiúhelník na n stejných dílů příčkami rovnoběžnými a) s jeho výškou, b) s některou jeho stranou. (V obr. 8. a 9. $n = 3$.)

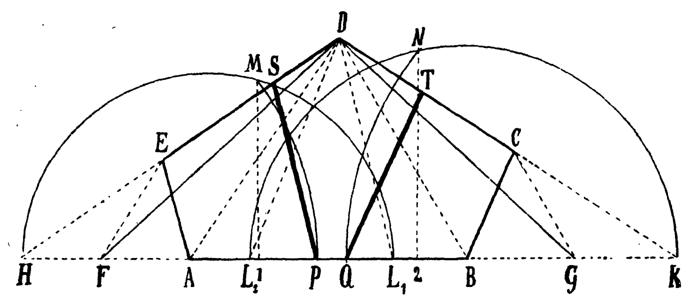
Obě tyto úlohy vedou nás ku rozšíření analogické úlohy týkající se dělení čtyřúhelníku.

V obou případech promění se pětiúhelník $ABCDE$ v $\triangle FGD$, jehož základna $\overline{FG}$ rozdělí se v n stejných dílů. V dílčích bodech k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$) vztyčí se kolmice $\overline{kM_k}$, resp. $\overline{kN_k}$ a prodlouží se až ke kružnicím opsaným v případě a) nad $\overline{HL}$, resp. $\overline{KL}$, kdež značí L patu výšky, H a K průsečíky stran, resp. $\overline{ED}$ a $\overline{CD}$ s prodlouženou základnou pětiúhelníku, v případě *b*) nad $\overline{HL_1}$, resp. $\overline{KL_2}$, kdež značí L_1, resp. L_2 průsečíky rovnoběžek vedených vrcholem D ku stranám $\overline{AE}$, resp. $\overline{BC}$ též s prodlouženou základnou pětiúhelníku.



Obr. 8.

Přenesme pak na základnu vzdálenosti $\overline{HM_k}$ od H počínaje a $\overline{KN_k}$ od K počínaje. Tak obdržíme body P_k, resp. Q_k. I jest v případě *a*) kolmicemi $\overline{P_kS_k}$ a $\overline{Q_kT_k}$ v těchto bodech vztyčenými, v případě *b*) pak rovnoběžkami $\overline{P_kS_k}$ ku straně $\overline{AE}$ a

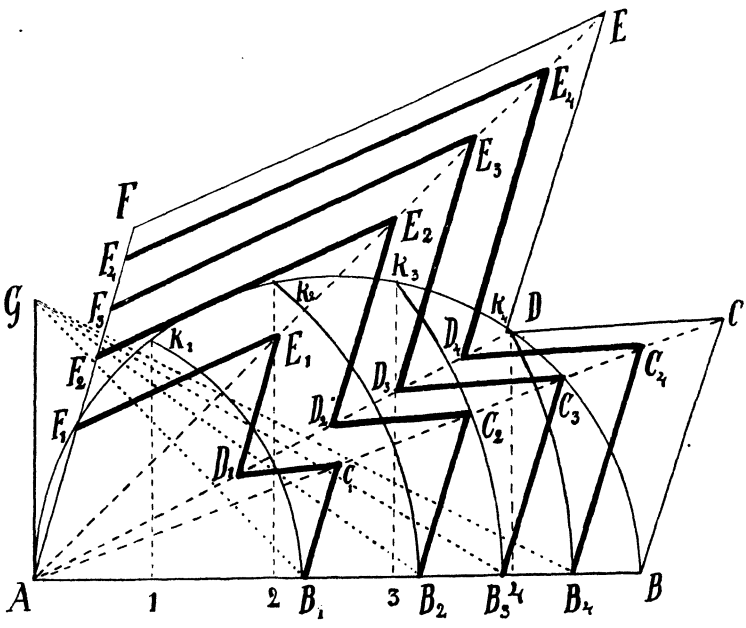


Obr. 9.

$\overline{Q_kT_k}$ ku straně $\overline{BC}$ vedenými daný pětiúhelník v žádaný počet stejných dílů rozdělen.

Správnost konstrukcí dokáže snadno čtenář na základě úloh předešlých.

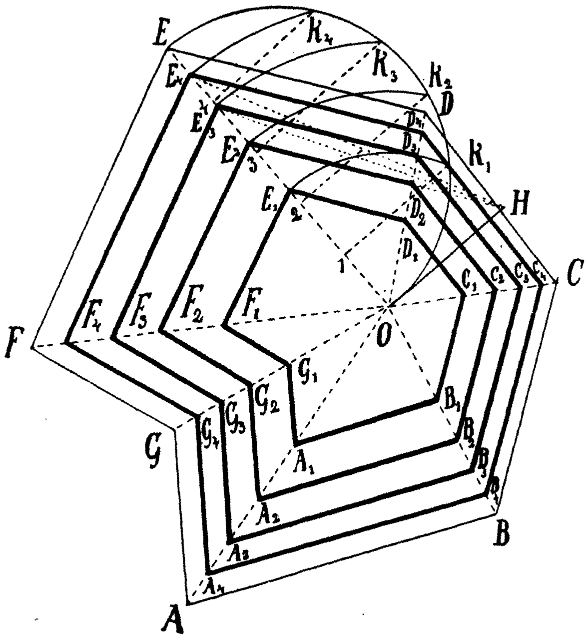
Jest rozděliti daný mnohoúhelník v n stejných dílů příčkami rovnoběžnými s jeho stranami a) tak, aby dvě jich strany ležely na stranách mnohoúhelníku daného, b) tak, aby žádné z nich nesplývaly. (V obr. 10. a 11. $n = 5$.)



Obr. 10.

V případě *a*) opišme nad stranou $\overline{AB}$ půlkruh, rozdělme ji v n stejných dílů a vztyčme v dílčích bodech k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$) kolmice. Přeneseme pak z A úsečky $\overline{AK_k}$ na stranu $\overline{AB}$, čímž obdržíme body B_k. Úsečky $\overline{AB_k} - \overline{AB_{k-1}}$ jsou stejnolehlé strany hledaných stejných dílů. Spojme pak vrchol A se všemi ostatními vrcholy mnohoúhelníku, totiž $C, D, E, \ldots$, na těchto úhlopříčkách leží hledané vrcholy podobných mnohoúhelníků, totiž $C_k, D_k \ldots$; příčky $\overline{B_kC_k}$, rovnoběžné se stranou $\overline{BC}$, $\overline{C_kD_k}$ rovnoběžné s $\overline{CD}$, $\overline{D_kE_k}$ rovnoběžné s $\overline{DE}$, ... dělí daný mnohoúhelník v žádaný počet stejných dílů.

Abychom správnost konstrukce dokázali, uvažme, že mnohoúhelníky $AB_kC_kD_k$ . . . jsou s daným podobné a podobně položené; označme je literou N_k, kde $k = 1, 2, \ldots, n$, při čemž N_n je mnohoúhelník daný.



Obr. 11.

Pak lze psáti:

$$N_1 : N_k = \overline{AB}_1^2 : \overline{AB}_k^2 = \frac{\overline{AB}^2}{n^2} : k\,\frac{\overline{AB}^2}{n^2} = 1 : k,$$

odkudž plyne, že:

$$N_k = kN_1,$$

a tedy:

$$N_k - N_{k-1} = N_1,$$

čímž správnost konstrukce dovozena.

V případě *b*) zvolme si libovolný bod O uvnitř mnohoúhelníku $ABCDE$ . . . a spojme jej s vrcholy jeho. Na těchto spojnicích musí ležeti vrcholy mnohoúhelníků podobných a podobně položených. Potom rozdělme některý z $\triangle$ s vrcholem v O v n stejných dílů, na př. $\triangle$ OED známou nám konstrukcí příčkami rovnoběžnými se stranou $\overline{ED}$. Veďme pak dílčími body D_k, resp. E_k rovnoběžné příčky $\overline{D_kC_k}$ s $\overline{DC}$, resp. $\overline{E_kF_k}$ s $\overline{EF}$ etc., čímž dostaneme žádané dělení.

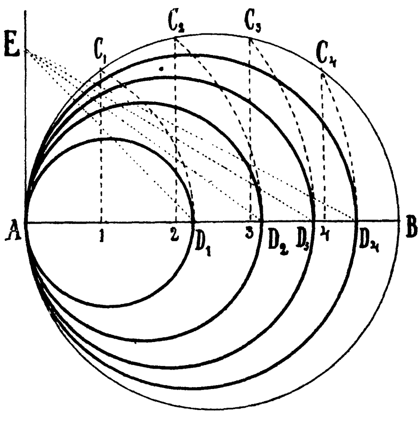
Jest patrno, že obsahy podobných a podobně položených mnohoúhelníků N_k vyhovují úměře:

$$N_1 : N_k = \overline{OE}_1^2 : \overline{OE}_k^2 = \frac{\overline{OE}^2}{n^2} : k\,\frac{\overline{OE}^2}{n^2} = 1 : k,$$

odkudž plyne, že

$$N_k = kN_1, \quad \text{resp.} \quad N_k - N_{k-1} = N_1,$$

čímž správnost konstrukce dokázána.



Obr. 12.

Úlohu lze též obrátiti: Jest k mnohoúhelníku $A_1B_1C_1\ldots$ sestrojiti mnohoúhelník $A_kB_kC_k\ldots$ k-kráte větší.

Za tím účelem učiňme:

$$\overline{AG} \perp \overline{AB}_1, \quad \text{resp.} \quad \overline{OH} \perp \overline{OE}_1,$$

a

$$\overline{AG} = \overline{AB}_1, \quad \text{resp.} \quad \overline{OH} = \overline{OE}_1.$$

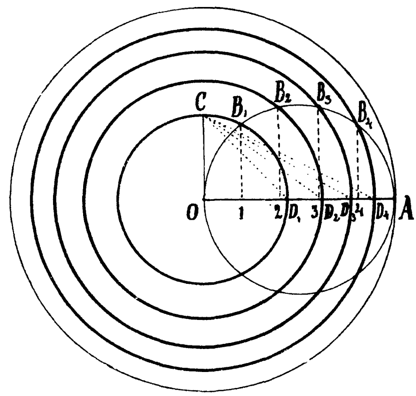
Potom jest

$$\overline{GB}_k^2 = \overline{AB}_{k+1}^2 = (k+1)\,\overline{AB}_1^2, \text{ čili } N_1 : N_{k+1} = 1 : (k+1),$$

respektive

$\overline{HE}_k^2 = \overline{OE}_{k+1}^2 = (k+1)\,\overline{OE}_1^2$, čili $N_1 : N_{k+1} = 1 : (k+1)$, čímž jest též správnost této konstrukce zjištěna.

Jest rozděliti kruh na n stejných dílů a) kružnicemi majícími týž společný bod s danou kružnicí, b) kružnicemi s danou kružnicí soustřednými. (V obr. 12. a 13. $n = 5$.)



Obr. 13.

V případě prvém rozdělme průměr $\overline{AB}$ dané kružnice v n stejných dílů, v dílčích bodech k vztyčme kolmice $\overline{kC_k}$ a prodlužme je až ke kružnici dané. Úsečky $\overline{AC_k}$ přenesme od A na průměr, čímž dostaneme průměry hledaných kružnic $\overline{AD_k}$.

Jestiť:

$$\overline{AC}_k^2 = \overline{Ak}\,.\,\overline{AB} = k\,\frac{4r^2}{n},$$

a obsah příslušného kruhu:

$$P_k = k\,\frac{\pi r^2}{n},$$

obsah pak $(k-1)$-ho kruhu:

$$P_{k-1} = (k-1)\,\frac{\pi r^2}{n},$$

odkudž plyne, že

$$P_k - P_{k-1} = \frac{\pi r^2}{n},$$

což značí obsah jednoho měsíce. Tím jest správnost vyložené konstrukce potvrzena.

V případě druhém rozdělme poloměr $\overline{OA}$ na n stejných dílů. v dílčích bodech k vztyčme kolmice $\overline{kB_k}$ a prodlužme je až ke kružnici opsané nad poloměrem kružnice dané. I jsou pak úsečky $\overline{OB_k}$ poloměry soustředných kruhů hledaných.

Jestiť

$$\overline{OB}_k^2 = k\frac{\overline{OA}^2}{n}$$

a analogicky:

$$\overline{OB}_{k-1}^2 = (k-1)\frac{\overline{OA}^2}{n},$$

odkudž plyne, že:

$$P_k - P_{k-1} = \frac{1}{n}\,\pi\,\frac{\overline{OA}^2}{4},$$

čímž konstrukce potvrzena.

Úlohu tuto lze též obrátiti: *daný kruh o průměru* $\overline{AD_1}$ *resp.* $\overline{OC}$ *jest znasobiti číslem* n.

Za tím účelem učiňme: $\overline{AE} \perp \overline{AD}$, resp. $\overline{OC} \perp \overline{OA}$, a $\overline{AE} = \overline{AD_1}$, resp. $\overline{OD_1} = \overline{OC}$.

Potom obdržíme:

$$\overline{ED}_k^2 = (k+1)\,\overline{AD}_1^2 = \overline{AD}_{k+1}^2,$$

kde $\qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$

resp. $\qquad \overline{CD}_k^2 = (k+1)\,\overline{OD}_1^2 = \overline{OD}_{k+1}^2,$

odkudž plyne, že obsah kruhového měsíčku:

$$P_{k+1} - P_k = \pi\,\frac{\overline{AD}_1^2}{4} = P_1,$$

t. j. rovná se obsahu daného kruhu.

Ve druhém případě obsah kruhového mezikruží:

$$P_{k+1} - P_k = \pi\,\frac{\overline{OD}_1^2}{4} = P_1,$$

t. j. obsahu původního kruhu.

Tím jest správnost konstrukce dokázána.

Uvedené konstrukce zasluhují povšimnutí pro svoji jednoduchost, všeobecnost a eleganci, a myslím, že též dosud nikde nebyly publikovány.
