Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O kruzích majících hořejší úseky výšek trojúhelníka za průměry

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 638--639

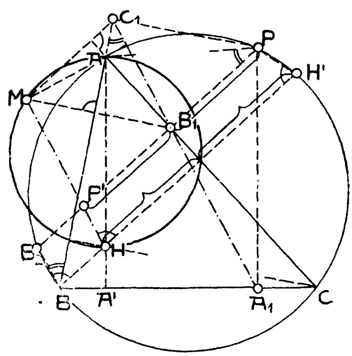
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122080`

O kruzích majících hořejší úseky výšek trojúhelníka za průměry.

Napsal V. Jeřábek.

Buď dán trojúhelník ABC a jemu opsaný kruh (ABC). Zvolme na tomto kruhu kdekoliv bod P a spusťme s něho na strany AB, BC, CA resp. kolmice PC_1, PA_1, PB_1, jejichž paty C_1, B_1, A_1 leží na jedné přímce, která sluje přímka Simsonova. Veďme $B_1M \parallel PC_1$ a $C_1M \parallel PB_1$, tím dostaneme vrchol M rovnoběžníka PB_1MC_1.

Pohybuje-li se bod P po kružnici (ABC), vytvoří M kružnici, mající hořejší úsek AH výšky AA' za průměr.



Důkaz. Veďme v kruhu (ABC) tětivy BHH' a PB_1B_2 kolmé k AC; orthocentrum H (průsečík výšek) leží s bodem H' souměrně dle osy AC. Učiňme $B_1P' = PB_1$ na B_1B_2. Úhel $PH'B = B_2BH' = P'HH'$, tedy $HP' \parallel BB_2$. Mysleme si čtyřúhelníku AB_1PC_1 opsaný kruh, pak úhel $AC_1B_1 = APB_1 = ABB_2$, pročež $BB_2 \parallel B_1C_1 \parallel HP'$. Spojme P' s M, načež bude $MC_1 = B_1P = P'B_1$ a $P'M \parallel B_1C_1$, takže bodem P' procházejí dvě přímky $P'H$, $P'M$ rovnoběžné s B_1C_1, leží tedy body H, P', M v téže přímce. V trojúhelníku B_1C_1M jest A průsečíkem jeho výšek jdoucích vrcholy B_1, C_1, pročež stojí i třetí výška MA kolmo na B_1C_1 i na $HM \parallel B_1C_1$. Z toho jde, že *geom. místem* *bodu M, vrcholu to pravého úhlu AMH, jehož ramena pevnými body A, H procházejí, je kružnice o průměru AH.*

Analogické kružnice lze obdržeti, které mají hořejší úseky dalších dvou výšek trojúhelníka za průměry.

Poznámky k theorii kuželoseček.

III.

Kuželosečky rovnoběžníku vepsané.

Napsal **Rudolf Hruša.**

1. Budiž dán kosodélník o stranách $2u$, $2v$. Zvolme střed kosodélníku za počátek kosoúhlé soustavy a střední příčky za osy souřadné. Strany kosodélníku dány jsou rovnicemi:

$$x \mp u = 0, \qquad y \mp v = 0;$$

jaké jest geom. místo všech ohnisek kuželoseček vepsaných?

Otázku tu zodpověděl Lippmann v Nouvelles Annales (t. VI, 2e série) roku 1867 pro čtyřúhelník obecný. Geometrické místo ohnisek jest křivka 3. stupně. Dá-li se čtyřúhelníku vepsati kruh, má křivka zmíněná ve středu téhož kruhu bod dvojný. Důkaz provedl týž mathematik vycházeje od věty, že součin vzdáleností obou ohnisek od tečny kuželosečky rovná se dvojmoci malé poloosy. (B. Niewenglowski, Cours de géometrie analytique, tome II. p. 243.) Dá se očekávati, že u rovnoběžníku se tato křivka degeneruje. (Niewenglowski, Tome II, p. 251, exercices 24.)

V dalších vývodech přidržíme se methody M. G. Lippmanna. Označme vzdálenosti ohniska $f(x, y)$ od stran kosodélníku: m, n, p, q, vzdálenosti ohniska druhého $f'(x', y')$ od stran téhož kosodélníku: m', n', p', q'. Přímo názorem vedeni jsme k relacím:

$$m = p', \quad n = q', \quad p = m', \quad q = n'.$$

Dle svrchu zmíněné věty jest patrně:

$$mp = nq = b^2,$$