Václav Jeřábek

O kampyle Eudoxově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 1, 28--32

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122123`

Transformujme znovu, pišme tedy (21) ve tvaru

$$y'_2 + a_1 y_2^2 + b_1 y_2 - h y_1 = 0,\ y_2 = y'_1 + \alpha_1 y_1;$$

vyloučením y vznikne druhá transformovaná rovnice

$$y''_2 + (A_2 y_2 + B_2)\, y'_2 + C_2 y_2^2 + D_2 y_2 = 0; \qquad (22)$$

až na poslední koefficient lišící se též o h možná její levou stranu sestaviti z úkonů $y' + a_2 y^2 + b_2 y$. $y' + \alpha_2 y$, kde

$$a_2 = \frac{a}{h},\ b_2 = b - \frac{h'}{h},\ \alpha_2 = \alpha - \frac{h'}{h}.$$

Dosaďme nyní do (20) za y hodnotu zy. Vznikne transformovaná rovnice téhož tvaru; propočteme-li příslušné hodnoty pro a, b, α, obdržíme pro ně resp. az, $b + \frac{z'}{z}$, $\alpha + \frac{z'}{z}$, tedy pro $z = \frac{1}{h}$ tytéž obnosy jako v rovnici (22), rovnice ty jsou tedy totožné.

Tyto dvě transformace, kaskádní a substituce zy pro y, u nelineárných rovnic se ztotožňují, h se jimi nemění.

O kampyle Eudoxově.

Napsal **V. Jeřábek.**

Jest známo, že kampyla Eudoxova jest zvláštním případem křivky, kterou *Tortolini* definoval takto [1]:

Buď dána kuželosečka K (obr.) (ellipsa nebo hyperbola). V kterémkoli bodě p kuželosečky K sestrojená tečna protíná osu hlavní $o_1 a$ v bodě n_1, jímž vedená rovnoběžka s vedlejší poloosou $o_1 b$ seče spojnici $o_1 p$ v bodě m_1, jehož geom. místem je křivka M_1 mající rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^4}{a^4},$$

jsou-li osy kuželosečky osami souřadnic. Pro ellipsu v této rovnici platí znaménko hořejší $+$ a pro hyperbolu dolní $-$. Pře-

[1]) Dr. G. *Loria-Schütte*, Spezielle allgebraische und transcendente ebene Kurven, Leipzig, B. G. Teubner 1902, str. 320.

jde-li ellipsa v kruh, t. j. je-li $a = b$, značí rovnice

$$a^2(x^2 + y^2) = x^4$$

dle *Tannery-ho* kampylu Eudoxovu [2]).

Je-li K hyperbolou rovnostrannou, má křivka tvar lemniskáty a její rovnice je

$$a^2(x^2 - y^2) = x^4.$$

K této křivce přichází též Schoute transformací Maclaurin-ovou.[3])

Účelem těchto řádků jest ukázati, kterak křivka M_1 jeví se jakožto průmět proniku dvou přímkových ploch stupně druhého.

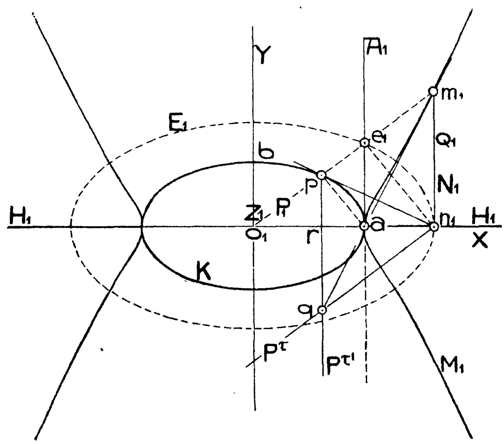
1. K tomu cíli sestrojíme ke kuželosečce K ve vrcholu a tečnu A_1; její průsečík s průvodičem $o_1 m_1 \equiv P_1$ budiž e_1. Ve středu o_1 postavme kolmici O na rovinu π kuželosečky K, a pokládejme π za průmětnu. Veďme vrcholem a přímku A odchýlenou od průmětny π o daný úhel $(AA_1) = \alpha$, na př. $\alpha = 45^0$, a mějme bod e_1, v němž $o_1 m_1$ seče průmět A_1, za průmět bodu e přímky A; pak lze míti $o_1 e_1 m_1 \equiv P_1$ za průmět přímky $oem \equiv P$ protínající pravoúhelně kolmici O v bodě o, jemuž přináleží průmět o_1 jenž je středem kuželosečky K. Geom. místem přímek P jest hyperbolický paraboloid, jehož útvary řídicími jsou přímky $A, O \perp \pi$ a průmětna π. Ježto do bodů m_1 promítají se určité body m přímek P hyperbolický paraboloid vyplňující, bude do M_1 promítati se určitá křivka M tohoto paraboloidu. K druhé přímkové ploše stupně druhého, na níž se křivka M též nalézá, dospějeme takto: Položme bodem $e \equiv (A \,.\, P)$ rovinu ε rovnoběžně s průmětnou π, v této sestrojme kuželosečku E_1 homothetickou s kuželosečkou danou K dle středu o_1 a poměru $\frac{o_1 p}{o_1 e_1}$, pak její vrchol je v bodě n_1 $(m_1 n_1 \perp o_1 a)$, neboť polára $pq \perp o_1 a$ bodu n_1 vzhledem ku K protíná $o_1 a$ v bodě r, který s bodem n_1 tvoří na $o_1 a$ družinu rn_1 involuce bodové, jejímž středem je o_1 a která má své dvojné body ve vrcholech kuželosečky K, tak že $o_1 r \,.\, o_1 n_1 = \overline{o_1 a}^2$ a $\frac{o_1 r}{o_1 a} = \frac{o_1 a}{o_1 n_1} = \frac{o_1 p}{o_1 e_1}$; tedy $e_1 n_1 \parallel pa$. Nyní

---

[2]) *Dr. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven, 1908, str. 70. Leipzig, G. J. Göschen.

[3]) Dr. G. Loria-Schütte, str. 173.

veďme v rovině $\varepsilon \parallel \pi$ bodem e kuželosečku[1]) E, tak, aby měla svůj průmět v E_1. Vrcholem ellipsy E v rovině $\nu \perp \pi$ položené osou $o_1 a$ je bod n, jemuž přináleží průmět n_1. Mění-li bod e v přímce A svou polohu, vytvoří ellipsa E jím jdoucí jednoplochý hyperboloid a vrchol její n v rovině ν hyperbolu H vzniklou řezem roviny ν s hyperboloidem. Průmět H_1 této hyperboly je v prodloužené ose hlavní ellipsy zúžení (hrdelní) K hyperboloidu. Myslíme-li si nyní ve vrcholu n vedenou tečnu $N \perp \nu$ k ellipse E, bude geom. místem této tečny plocha válcová dotýkající se hyperboloidu podél hyperboly H. Nyní je zřejmo, že



$N_1 \equiv n_1 m_1$ lze míti za průmět přímky $N \equiv nm$ a bod $m_1 \equiv (P_1 \,.\, N_1)$ za průmět bodu $m \equiv (P \,.\, N)$, v němž P a N v rovině ε se protínají; je tedy též bod m a jeho geom. místo M na ploše válce hyperbolického. Dříve jsme ukázali, že M leží na hyperb. paraboloidu, pročež:

Křivka M_1 jest průmětem průniku M hyperbolického paraboloidu s hyperbolickou plochou válcovou.[2])

2. *Tečna křivky* M_1 v bodě m_1 jest průmětem průsečnice rovin tečných τ, τ' položených v bodě m k hyper. paraboloidu resp. ku ploše válcové. Rovina tečná τ hyp. paraboloidu stanovena je

---

[1]) V obr. je E ellipsou. Při kampyle jsou K a E_1 kruhy.

[2]) Je-li K hyperbolou, je plocha válcová elliptická.

přímkami P, $Q \equiv n_1 m$, z nichž Q je rovnoběžna s druhou rovinou řídicí $(AA_1) \perp \pi$ paraboloidu a má svou stopu v bodě n_1, průmět její Q_1 je v $m_1 n_1$. Rovnoběžka $P\tau$ vedená stopou n_1 s $m_1 p$ zobrazuje stopu roviny tečné τ. Druhá tečná rovina τ' dotýká se plochy válcové dříve již zmíněné a hyperboloidu v bodě n a její přímky jsou $mn \equiv N \| m_1 n_1 \equiv N_1$ a np, první z nich náleží ploše válcové a druhá hyperboloidu. Přímka pn má svůj průmět v tečně pn_1 a svou stopu na π v bodě p.

Sestrojíme-li tedy touto stopou rovnoběžku $P\tau'$ s $N_1 \| N$, obdržíme stopu roviny tečné τ'. Spojíme li posléze bod $q \equiv (P\tau \,.\, P\tau')$ s bodem m_1, doděláme se tečny $m_1 q$ křivky M_1, jakožto průmětu průsečnice mq rovin tečných τ, τ', jež dotýká se proniku M v bodě m.

3. *Analytické řešení.* Tečna ellipsy v bodě $p(\alpha, \beta)$ má v pravoúhlé soustavě souřadnic o osách $o_1 a \equiv X$, $o_1 b \equiv Y$ rovnici

$$b^2 \alpha x + a^2 \beta y = a^2 b^2,$$

položíme-li v rovnici této $y = o$, bude

$$o_1 n_1 = x = \frac{a^2}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{a^2}{x} \quad \ldots \tag{1}$$

značiti rovnici přímky N_1.

Znamenejme $ae_1 = z$; ježto body $p(\alpha, \beta)$, $e_1(a, z)$ a $m_1(x, y)$ leží na přímce $o_1 p$, platí rovnice

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{z}{a} = \frac{y}{x}; \quad \ldots \tag{2}$$

a že bod $p(\alpha, \beta)$ přináleží ellipse, je

$$b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 = a^2 b^2 \quad \ldots \tag{3}$$

Vyloučíme-li α, β, z z rovnic (1), (2), (3), dostaneme rovnici hledaného geom. místa M_1 bodu m_1. Z rovnic (1) a (2) plyne

$$\beta = \frac{az}{x},$$

dosaďme za α, β hodnoty do rovnice (3), načež bude

$$b^2 x^2 - a^2 z^2 = a^2 b^2 \quad \ldots \tag{4}$$

Vylučme z z rovnice této a jedné

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{a} \quad \ldots \tag{5}$$

z rovnic hořejších (2), tím obdržíme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^4}{a^2} \dots \tag{6}$$

křivky M_1.

Pokládáme-li $ae_1 = z$ za souřadnice $ee_1 = z$ bodu e v pravoúhlé soustavě souřadnic, jejíž osy jsou $o_1 a \equiv X$, $o_1 b \equiv Y$ a kolmice Z postavená v počátku o_1 na rovinu $(XY) \equiv \pi$ ellipsy K. Ježto přímka $en \parallel e_1 n_1$ a $mn \parallel m_1 n_1 \parallel \pi$, mají body m, n stejnou souřadnici z, tak že rovnice (4) značí válec hyperbolický, jeho podstavou na rovině $(XZ) \equiv \nu$ je hyperbola rovnicí (4) vyjádřená. Rovnice (5) přináleží hyp. paraboloidu, jehož útvary řídícími jsou osa Z, přímka A svírající se svým průmětem A_1 úhel $(A_1 A) = \alpha = 45^0$ a průmětna $(XY) \equiv \pi$. Rovnicemi (4) a (5) je tudíž stanovena křivka M, v níž plocha válcová (4) a hyperbolický paraboloid (5) navzájem se pronikají. Ježto rovnici (6) dostali jsme vyloučením souřadnice z z rovnic (4) a (5), značí ona průmět M_1 proniku M, jak bylo dříve geometricky ukázáno.

Podobně obdržíme křivku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^4}{a^4}$, je-li K hyperbolou.

Deskriptivně geometrické řešení problému normál kuželoseček.

Napsal **Josef Klíma**, assistent české techniky.

Prastarý tento bikvadratický problém má již skoro svoji vlastní literaturu. Řešení jeho nacházíme již v páté knize o kuželosečkách u *Appolonia*, a jeho řešení považováno v staré geometrii za jedno z nejlepších. On sestrojoval paty normál vedených z bodu ke kuželosečce pomocí hyperboly rovnoosé, později po něm nazvané, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny s osami dané kuželosečky a obsahuje střed této a daný bod. Avšak *de la Hire* (1640—1718) prvý ukázal, že paty hledaných normál dají se sestrojiti též použitím kružnice a dané kuželosečky vyrýsované. Jinou konstrukci použitím kružnice podává r. 1853 *Joachimsthal* [1]) pomocí dvou vět, jím nalezených, z nichž však jednu, jak

[1]) »Journal für reine und angewandte Mathematik« sv. 48.