Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 1, 49--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122130

Úlohy.*)

1.

Nechť se utvoří rovnice, jejíž kořeny jsou $\cos\frac{a}{5}$, je-li $\cos a$ dán, a rovnice z níž vychází $\sin\frac{a}{5}$, je-li $\sin a$ dán. Nechť se řeší tyto dvě rovnice v případech, kdy a je některou z hodnot 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12}$ a nechť se vytkne ve všech těchto případech význam kořenů.

2.

Nechť se nalezne algebraická relace, která váže oblouky a, b, c, jež vyhovují jedné z relací:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c,$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

3.

Nechť se vytkne poloměr kružnice tak velký, by rozdíl mezi obloukem 10 metrů a jeho tětivou byl menší než 1 millimetr.

Věstník literární.

O teplotě slunce (Dr. *K. Remeis:* Die Strahlung und die Temperatur der Sonne; Separatabdruck aus der „Gaea“, 1881).

Od Newtona počínaje zánášeli se četní fysikové otázkou, jak vysoká jest teplota slunce, či lépe řečeno teplota povrchu slunečného; mnozí z nich dospěli k výsledkům zcela určitým a dle domněnky jejich též správným, avšak výsledky ty různí se mezi sebou v takové míře (kolísajíce od 1400° až k 10,000.000°), že tyto rozdíly samy již výmluvně svědčí o velikých obtížích, vyskytujících se při řešení vytknutého problemu.

R. 1876 vypsala Pařížská akademie pro cenu Boudinovu úlohu: „pomocí nových kalorimetrických pokusů a pomocí diskusse dřívějších měření

*) Tyto tři úlohy jsou vyňaty ze *Serret,* Traité de Trigonométrie 5e éd., pag. 52 a 136. O úlohách, jichž řešení do roka nedojdou, pojedná redaktor.

budiž vyšetřeno, kterou teplotu nutno připsati povrchu slunečnému.“ Kommisse mající rozhodovati o došlých pracích neuznala žádnou z prací zaslaných za úplné řešení onoho problemu a přiřkla spisovatelům (byli to *Violle*, *Vicaire* a *Crova*) pouze peněžitou odměnu. Zároveň nepoloženo více ono thema za předmět nové ceny, čímž jaksi naznačeno, že okamžitě nelze v řešení jeho dále pokročiti, nýbrž že dlužno čekati, až další rozvoj vědy poskytne nových k tomu pomůcek. V takové době okamžitého ať tak díme odpočinku jest velmi vhodné podati přehled a kritiku všeho, co posud dosaženo, a v tuto záslužnou práci uvázal se Dr. *X. Remeis*, napsav obšírnou stať, z které tuto nejdůležitější momenty vyjímáme.

Především budiž připomenuto, že jest slunce těleso složení velmi rozmanitého a při tom u větší míře nám neznámého; teplota jednotlivých částí bude zajisté velmi rozdílná a mimo to i proměnlivá, následkem ustavičných velkolepých převratů na slunci. Paprsky teplové, vycházející z částí vnitřních, budou rozmanitým spůsobem pohlcovány vrstvami zevnějšími a dospějou tak ve složení velmi změněném ku povrchu zemskému. Z toho patrno, že jest naprosto nemožno určiti *pravou* teplotu slunce či vlastně teplotu rozmanitých jeho částí, a že budeme obmezeni určiti nanejvýše jen zdánlivou čili *effektivní* teplotu jeho. Místo skutečného slunce musíme si mysleti žhavou kouli, neobklopenou žádným pohlcujícím ústředím, obdařenou maximalní mohutností vyzařovací a tázati se: *jakou teplotu* musela by míti tato koule, aby se thermické působení její rovnalo (ve větších vzdálenostech od slunce, na př. na zemi) skutečnému působení slunce. Jedině o tuto teplotu může se nám jednati.

Již *Newton* hleděl (r. 1681, tedy právě před dvěma sty lety) otázku tuto následujícím pokusem řešiti. Teploměr byl pozorován nejprve ve stínu, potom na slunci; a v druhém případě počala stoupati teplota jeho až na jistý stupeň, kde se zastavila, a rozdíl mezi touto teplotou a teplotou v stínu byl zaznamenán. Teploměr na slunci počínal míti vyšší teplotu nežli jeho okolí, následkem záření slunce; počal tudíž sám vyzařovati teplo a poněvadž byl pouze z jedné strany sluncem ozářen, kdežto sám na všechny strany, celým svým povrchem teplo vyzařoval, musel nastati okamžik rovnováhy, kdy *příjem tepla* docílený zářením slunce, se vyrovnal úplně *ztrátě tepla* spůsobené všestranným vyzařováním teploměru. Od toho okamžiku teploměr nestoupal. Onen příjem tepla jest patrně úkonem teploty slunce T a teploměru t, závislý mimo to na mohutnosti vyzařovací slunce E, na mohutnosti pohlcovací teploměru a a konečně na úhlu prostorovém ω, v kterém se slunce, z teploměru pozorované jeví; jest tudíž vyjádřen výrazem tvaru:

$$\mathrm{E}\, a\, \omega f(\mathrm{T}, t).$$

Podobně jest ztráta tepla teploměru úměrná jeho mohutnosti vyzařovací e, prostorovému úhlu $(4\pi^2 - \omega)$, v němž se jeví z teploměru pozorovaný prostor mimo slunce, a konečně úkonem teploty t teploměru a teploty τ okolního prostoru; tedy:

$$e\,(4\pi^2 - \omega) f(t, \tau).$$

Newton klade $f(\mathrm{T}, t) = \mathrm{T} - t$, $f(t, \tau) = t - \tau$; dále klade (ovšem ne výslovně) $\mathrm{E} = e = a = 1$. Jest tudíž přibližně, poněvadž ω vedle $4\pi^2$ a t vedle T mizí

$$\mathrm{T} = \frac{4\pi^2}{\omega}(t - \tau) = 183960\ (t - \tau).$$

Tímto způsobem určil *Newton* teplotu slunce na 1,669000° a *Secchi* na základě přesnějšího pozorování na 5,000000°. — Experimentalní methoda Newtonova tvoří základ téměř všech novějších pokusů, směřujících k určení teploty sluneční; všechny ty různé *aktinometry* (název zavedený Herschelem) a *pyrheliometry* (Pouillet) jsou sestrojeny dle tohoto principu, při tom ovšem zdokonaleny na základě všech vymožeností novější vědy. Hlavní rozdíl záleží v interpretaci nalezených veličin. Co nejdůležitější činitel jeví se nám v ohledu tom úkon $f(\mathrm{T}, t)$, který určuje *zákon ochlazení.* Z některých pokusů, konaných za účelem vyhledání tohoto zákona, soudil Newton, že jest ochlazování, t. j. množství tepla za jednotku času z tělesa vyzářené, úměrné rozdílu teploty zářícího předmětu a jeho okolí, a přenesl tento, v malém intervalu pozorovaných teplot snad zcela správný zákon i na ochlazování čili vyzařování při tak ohromných rozdílech teploty, jaké se nám při slunci u porovnání s předměty pozemskými jeví. *A zde seznáváme hlavní obtíž našeho problemu.* Zákon ochlazování musí nám býti přesně znám, chceme-li určiti teplotu slunce, a to nejen pro jistou stupnici teplot, nýbrž pro všechny i tak vysoké stupně teploty, jaké musíme předpokládati na slunci. Pokusy k určení zákonu ochlazování lze však s potřebnou zevrubností provésti pouze při nižších teplotách (nanejvýš ke 300°) a nemáme žádného práva předpokládati, že by empirický zákon, touto cestou zjednaný, sáhal přes meze, v nichž jsme byli nuceni se držeti.

Vskutku nalezli *Dulong* a *Petit* zcela jiný zákon ochlazování. Dle nich jest množství tepla, vyzářené tělesem teploty T za jednotku času (rychlosť ochlazování) vyjádřeno výrazem

$$\mathrm{M}\,(a^{\mathrm{T}} - a^{t}),$$

nalezá-li se těleso to uvnitř prázdného prostoru, opatřeného obalem teploty t. M jest od teploty nezávislý součinitel, mění se však dle povahy tělesa a povrchu jeho; a jest absolutní konstanta, jejíž hodnota určena od Dulonga a Petit-a na 1.0077. Zde jest tudíž patrně všeobecný úkon $f(\mathrm{T}, t)$ zastoupen úkonem $a^{\mathrm{T}} - a^{t}$; pro malé rozdíly teploty souhlasí zákon tento se zákonem Newtonovým, klademe-li $\mathrm{M}a^{t}(a - 1) = \mathrm{E}$; avšak pro vyšší teploty, které při našem problemu se vyskytují, jest výsledek naprosto rozdílný. Předpokládaje zákon Dulong-Petitův za úplně správný, určil *Violle* teplotu slunce ze svých pozorování jen na 1500°, kdežto jej vedl zákon Newtonův k ohromnému číslu 5,800.000°. Tento veliký rozdíl jest zřetelným pokynem, jak málo se můžeme spolehnouti na zákony nalezené v úzkých mezích příslušných argumentů, jakmile meze ty poněkud překročíme. *Dulong* a *Petit* sami konstatovali správnosť svého zákona jen až k 300°, *Pouillet* udává, že jest zákon ten ještě při 1000° platný, s čímž souhlasí též *Vicaire,* jenž zas jej užívá při teplotách ještě vyšších. Naproti tomu ukázal *Prevostaye*, že již při teplotě 1200° týž zákon se zkušeností nesouhlasí, a totéž dokázal pečlivými pokusy *Soret*. Rozžhaviv na stupeň co nejvyšší válec cirkonový ukázal, že určuje teplotu jeho Newtonův zákon prosté úměrnosti na 45990°, zákon Dulong-Petitův na 781°. Skutečnou teplotu cirkonu takto rozžhaveného lze páčiti na 2500°, tak že již zde vede zákon první k teplotám příliš vysokým, zákon druhý k teplotám příliš nízkým.

Za tou příčinou obral si *Rossetti* (v Padově) úlohu, určiti znova zákon ochlazování v širších mezích, než s jakými se spokojili *Dulong* a *Petit*. Rychlost ochlazování jest úměrná veličina

$$aT^2(T - t) - b(T - t),$$

kdež značí a a b dvě konstanty. Z pokusů svých soudí, že výraz ten se osvědčuje pro teploty přesahující 2000°, a že jej lze s důvěrou upotřebiti při ještě vyšších teplotách. Co teplotu slunce obdržel okrouhle 10000° (9965.4°).

Vzhledem k velké pečlivosti, s jakou veškeré pokusy Rossetti-ho jsou provedeny a výsledky se zřetelem k všelikým podrobnostem opraveny, dlužno jeho určení teploty sluneční považovati za spolehlivější nežli všechny předcházející. Co se zmíněných oprav týče, budiž především poukázáno k pohlcení paprsků slunečných v našem ovzduší. K této okolnosti přihlíželi již *Pouillet*, *Violle*, zejmena však *Crova* (v Montpellieru) s velikou pečlivostí, a výsledky takto zjednané zasluhují samy o sobě, bez ohledu na problem, jenž nás zde zajímá, vší pozornosti, mohouce objasniti mnohé záhadné stránky meteorologie. *Pouillet* nalezl, že by dopadalo na každý čtv. centimetr povrchu zemského za jednu minutu množství 1·7633 tepla, a že se 25% tohoto množství pohlcuje atmosférou je-li slunce v zenitu. Veškeré vzduchem pohlcené množství sluncem vyzářeného tepla obnáší 40—50%. Množství tepla za rok na naší zemi padajícího dostačilo by k roztavení ledové vrstvy kolem země v tloušťce 30.9 m. položené.

Soret, *Violle* a *Crova* seznali, že dlužno výsledky Pouilletovy v mnohých ohledech poopraviti. Jednoduchý zákon pro pohlcení slunečných paprsků v různých výškách nad povrchem země, Pouilletem vyslovený neshledán býti správným; poznáno, že jest zapotřebí konati v různých výškách samostatná pozorování; dále poznáno, že dlužno při pozorováních, za účelem určení teploty slunce konaných, „solarní konstantu" (dle pokusů Pouilletových 1.7633, dle pokusů Viollových 2.540) zvláště stanoviti, poněvadž od různých okolností, od jasnosti atmosféry, od vlhkosti její, ano i od doby roční závisí.

Vracejíce se k vlastnímu předmětu svému, podotýkáme ještě, že hleděl *Zöllner* zcela jinou cestou, totiž pozorováním zjevů na povrchu slunečném, výbuchů žhavého vodíku (protuberancí) na základě zkušeností vztahujících se k dynamice plynů určiti teplotu slunce, a že obdržel tímto spůsobem na základě úvah ovšem ne zcela spolehlivých pro tuto teplotu 61350°. Také *Crova* hleděl pomocí spektrometrie porovnávat teplotu slunce a jiných zdrojů vyseké teploty.

Co konečnou, posud nejvíce pravdě podobnou, přibližnou hodnotu teploty sluneční volí *Remeis* poněkud libovolně 50.000°. Hodnoty na základě Newtonova zákona odvozené: 1,669.000° (Newton), 2,726.700° (Ericson), 5,335.000° (Secchi), 10,000.000 (Waterston) jsou rozhodně příliš velké; hodnoty na základě Dulong-Petitova zákona odvozené: 1460°—1760° (Pouillet), 1398° (Vicaire), 1500° (Violle), 2500° (Sainte Clair-Deville) rozhodně příliš malé. Hodnoty mezi nimi ležící, nalezené různými spůsoby: 10000° (Rossetti), 9000° (Crova), 61350° (Zöllner), mají největší pravděpodobnosť pro sebe. Při tom lze předpokládati, že hodnoty od Rossetti-ho a Crovy nalezené jsou ještě spíše příliš nízké nežli příliš vysoké, beřeme-li ohled na vysokou mohutnosť vyzařovací slunce, na zvláštní, spektroskopicky zjištěné poměry tlaku na slunci, poměry, které našich poměrů na zemi tak velice jsou vzdáleny. To jsou důvody, pro které volí Remeis číslo shora uvedené.

V pojednání, jehož stručný rozbor tuto jest podán, nalezne čtenář též četné doklady literární, jichž mu zapotřebí kdyby se otázkou tou důkladněji chtěl zanášet. *A. S.*

Důkaz, že počet čísel kmenných je nekonečně velký. V t. V. druhé serie (Avril 1881) časopisu Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques sděluje na str. 183 p. Perott následující pěkný a krátký důkaz známého fakta, že řada kmenných čísel je bez konce.

Uvažujme přirozenou řadu čísel

$$(1) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N,$$

a označme symbolem $\vartheta(N)$ číslo, které udává kolik čísel obsahuje tato řada, která nejsou dělitelna žádným čtvercem; pak bude

$$\vartheta(N) > N - \sum_{k=1}^{k=n} E\left(\frac{N}{p_k^2}\right),$$

značí-li $p_1, p_2, \ldots p_n$ kmenná čísla řady (1) a $E(x)$ největší celistvé číslo obsažené v x.*)

Tím více tedy

$$\vartheta(N) > N\left(1 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{p_k^2}\right) > N\left(2 - (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \text{ in inf.})\right)$$

t. j.

---

*) Budiž $E\left(\frac{N}{p_k^2}\right) = e$, pak jsou čísla $p_k^2, 2p_k^2, 3p_k^2, \ldots, ep_k^2$ řady (1) dělitelna čtvercem, a jich počet jest e; patrně tak vyčerpáme všecka čísla dělitelná čtverci. Arci se tu vyskytnou čísla dělitelná dvěma čtverci p_k^2, p_l^2, dvakrát, třemi čtverci třikrát atd., tak že Σe je větší než počet dělitelných čísel, čímž hořejší formule dokázána. Součet Σe by se rovnal počtu dělitelných čísel, kdyby se v (1) nevyskytlo žádné číslo dělitelné dvěma kmennými čtverci p_k^2, p_l^2; poněvadž jsou 4 a 9 nejmenší čtverce a $4 \cdot 9 = 36$, máme

$$\vartheta(N) = N - \Sigma e \text{ dokud } N < 36.$$

W.

$$\vartheta(N) > N\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) > \frac{1}{3} N. \text{ *)}$$

Nyní je ale každé číslo řady (1) neobsahující kvadratický faktor tvaru

$$p_1^{t_1} p_2^{t_2} p_3^{t_3} \ldots p_n^{t_n} \quad (t_s = 0, 1),$$

a jich počet je tudíž 2^n. Tedy

$$2^n > \frac{1}{3} N$$

pročež

$$n > \log \frac{1}{3} N,$$

zvolíme-li 2 za základ logarithmů. Číslo N můžeme zvětšovati nade všecky meze, a roste s ním tudíž i n nade všecky meze, t. j. počet čísel kmenných je nekonečný. *W.*

Analytické odvození základních vět stereografického promítání ploch druhého stupně vůbec a plochy kulové zvlášť. Sepsal *Vilém Jung*, ass. deskriptivy na c. k. vyšší realce v Pardubicích. (Vyňato ze školní zprávy c. k. vyšší r. školy v Pardubicích na r. 1880—81).

Předeslav některé historické poznámky a připomenuv, kterak lze obecně rozhodnouti, je-li bod dané plochy elliptickým, hyperbolickým či parabolickým, vyvinuje p. spisovatel přesně a velmi jasně spůsobem počtářským hlavní vlastnosti stereografického promítání ploch druhého stupně vůbec a plochy kulové zvlášť. Pan *B. Procházka*, jehož práci p. spis. připomíná, vyvodil cestou geometrickou tytéž vlastnosti ploch druhého stupně (v VII. roč. t. Čas., str. 213) vycházeje ze stereografické projekce plochy kulové; odvození to dělo se pomocí kolineárné transformace prostoru. Následujícími řádky chci pobídnouti ty, jež věc zajímá, ku čtení uvedených dvou prací; naznačím stručně, kterak lze jak cestou geometrickou, tak i počtářskou vytknouti hlavní vlastnosti stereografické projekce.

Mějme plochu druhého stupně Π a na ní libovolný bod A. Bodem tím procházejí dvě povrchové přímky plochy Π. Přímky ty jsou realné, je-li Π plocha přímočará, imaginárné v případu, kdy není přímočarou, a nalezají se vždy v tečné rovině T onoho bodu; jsou-li realné mohou i splynouti, t. tenkráte je-li Π kuželem. Buď Σ libovolná kuželosečka na Π a buďte B a C body, v nichž se setkává s oněmi dvěma povrchovými přímkami. Promítneme-li Σ z bodu t na nějakou rovinu T_1 rovnoběžnou s T, tu nazveme takto zhotovený průmět projekcí stereografickou. Body B a C mají promítající paprsky AB a AC rovnoběžné s T_1 a vždy tytéž — totiž ony dvě povrchové přímky — nechť si je Σ jakákoli čára na Π. Prochází tedy stereografická projekce každé čáry Σ těmiže úběžnými body tj. *stereograf. projekce všech čar Σ jsou kuželosečky podobné a podobně položené.* Nazveme nyní K kužel, jímž se Σ promítá z bodu A. Patrně má K v bodech

*) Dr. *F. J. Studnička*, všeobecné tvarosloví algebraické, pag. 194, aneb *Serret*, Traité de Trigonométrie, 5. éd. pag. 261.

B a C s plochou Π společné tečné roviny, jichž průsečnice nechť jest AD; tato tedy jest jednak sdružena k rovině ABC vůči kuželi, jinak obsahuje pol D roviny Σ vůči Π. Rovina $T_1 \| T$ protíná kužel ve stereog. projekci; její střed se tedy nalezá na přímce AD, která je sdružena k T, a tím tedy věta: *střed stereog. projekce jest průmětem polu* D *roviny* Σ *vůči* Π.

Vše to lze snadno i počtem odvoditi. Buďte $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ rovnoběžné souřadnice v prostoru a

$$\varphi(x, y, z, w) = 0$$

homogenní rovnice plochy Π. Bod A měj souřadnice x', y', z', w'; pak má tečná rovina T rovnici

$$T \equiv \varphi'_1 x + \varphi'_2 y + \varphi'_3 z + \varphi'_4 w = 0,$$

značí-li φ'_1, φ'_2 atd. derivaci $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ atd. s hodnotami x', y', z', w'. Má-li pól D souřadnice x'', y'', z'', w'' zní rovnice roviny polárné P obsahující čáru Σ

$$P \equiv \varphi''_1 x + \varphi''_2 y + \varphi''_3 z + \varphi''_4 w = 0.$$

Rovina T protíná Π v oněch dvou povrchových přímkách AB a AC, rovinu P pak v čáře Σ, značí tudíž

$$\psi \equiv \varphi + \lambda PT = 0$$

všecky čáry druhého stupně vedené přímkami AB, AC a čarou Σ; mezi nimi se nalézá taky kužel K a s. jej repraesentuje právě napsaná rovnice má-li λ hodnotu $-\frac{1}{T''}$ t. j. hodnotu z podmínky

$$1 + \lambda T'' = 0 \text{ čili } 1 + \lambda P' = 0$$

stanovenou. *) Neboť máme derivováním

$$\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \varphi_1 + \lambda(PT_1 + TP_1) = \varphi_1 + \lambda(P\varphi'_1 + T\varphi''_1)$$

a tedy dosadivše souřadnice bodu A

$$\psi'_1 = \varphi'_1 + \lambda(P'\varphi'_1 + T'\varphi''_1)$$

a jelikož A jest v rovině T, musí $T' = 0$, čímž

$$\psi'_1 = \varphi'_1 + \lambda P'\varphi'_1 = \varphi'_1(1 + \lambda P') = \varphi'_1(1 + \lambda T'') = 0.$$

Obdobně máme $\psi'_2 = \psi'_3 = \psi'_4 = 0$ tj. ψ jest skutečně plochou kuželovou s vrcholem A.

Rovina T_1 rovnoběžná s T má rovnici

$$T_1 \equiv T + Cw = 0$$

kdež C je libovolná stálá. Průsečnice její s ψ hoví tedy rovnici

$$\varphi - \lambda CPw = 0.$$

Člen λCPw jest vůči x, y, z lineárný a jsou tudíž kvadratické členy v rovnicích průsečnice nezávislé na rovině P, tj. stereografické průměty všech čar Σ jsou podobné a podobně položené. — Z důvodu již vytknutého obdržíme střed stereogr. projekce na přímce sdružené ku T vůči kuželi K; tato sdružená přímka jest AD, tj. T je polarná rovina bodu D vůči kuželi. Skutečně tato polarná rovina má rovnici

*) T'' značí výraz T položíme-li do něho za x, y, z, w, hodnoty x'', y'', z'', w''. Obdobně P' výraz P vložíme-li do něho za běžné souřadnice x', y', z', w'.

$$\psi_1'' x + \psi_2'' y + \psi_3'' z + \psi_4'' w = 0.$$

Ale

$$\psi_k'' = \varphi_k'' + \lambda (P'' \varphi_k' + T'' \varphi_k''),$$

pročež ona polárná rovina:

$$\varphi_1'' x + \varphi_2'' y + \varphi_3'' z + \varphi_4'' w + \lambda P'' (\varphi_1' x + ..) + \lambda T'' (\varphi_1'' x + \ldots) = 0$$

t. j.

$$P + \lambda P'' T + \lambda T'' P = 0.$$

Avšak

$$1 + \lambda T'' = 0,$$

pročež zbyde rovnice

$$\lambda P'' T = 0,$$

t. j. $T = 0$, čímž tvrzení dokázáno.

Při kouli protínají všecky povrchové přímky imaginárný kruh v nekonečnu, jsou tedy úběžné body přímek AB a AC body kruhovými v nekonečnu a tedy stereografické projekce všech čar (kružnic) Σ opět kružnice. Totéž patrně platí i při obecné ploše druhého stupně, je-li A bodem kruhovým; *toť vlastní generalisování stereogr. projekce koule.* Při kouli však platí ještě ta nad míru zajímavá vlastnost, že stereografické promítání koule jest zobrazením isogonálným t. j. že se čáry na kouli vedené protínají v těchže úhlech co jich stereografické průměty. Zvolme, chtějíce to dokázati, A za počátek pravoúhlých souřadnic x, y, z, rovinu tečnou za rovinu xy, a označme literou a poloměr koule, jejíž rovnice pak jest

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0.$$

Promítejme body koule na rovinu rovnoběžnou s rovinou xy a vzdálenou od ní o délku c. Buď X, Y, Z, průmětem bodu x, y, z; pak patrně lze položiti

$$X = \mu x, \quad Y = \mu y, \quad Z = \mu z$$

a poněvadž $Z = c$, bude $\mu = \frac{c}{z}$, čímž máme

$$X = c\frac{x}{z}, \quad Y = c\frac{y}{z}, \quad Z = c, \tag{1}$$

souřadnice to stereogr. obrazu bodu x, y, z.

Mějme na kouli bodem x, y, z vedenou čáru, jejíž nekonečně malý oblouk nechť je ds a nechť uzavírá s osami úhly, jichž cosinusy jsou α, β, γ. Pak máme

$$dx = \alpha\, ds, \quad dy = \beta\, ds, \quad dz = \gamma\, ds.$$

Differencováním rovnice koule tím obdržíme

$$\alpha x + \beta y + \gamma (z - a) = 0. \tag{2}$$

Z (1)

$$dX = \frac{c}{z^2} (\alpha z - \gamma x)\, ds; \quad dY = \frac{c}{z^2} (\beta z - \gamma y)\, ds; \quad dZ = 0. \tag{3}$$

Položivše

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dS^2,$$

máme za délku dS stereografického obrazu délky ds

$$dS^2 = \frac{c^2}{z^4}\left[(\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta z - \gamma y)^2\right] = \frac{c^2}{z^4}\left[(1-\gamma^2)z^2 + \gamma^2(x^2+y^2) - 2\gamma z(\alpha x + \beta y)\right],$$

aneb vůči (2)

$$dS = \frac{c}{z}\, ds.$$

Délka dS uzavírá s osami úhly o cosinusech $\frac{dX}{dS}$, $\frac{dY}{dS}$, $\frac{dZ}{dS}$, t. j.

$$\frac{1}{z}(\alpha z - \gamma x), \quad \frac{1}{z}(\beta z - \gamma y), \quad 0.$$

Buď ds' jiný differencial vedený bodem x, y, z na kouli a uzavírající s osami úhly o cosinusech α', β', γ', i bude obraz jeho dS' uzavírati úhly o cosinusech

$$\frac{1}{z}(\alpha' z - \gamma' x), \quad \frac{1}{z}(\beta' z - \gamma' y), \quad 0,$$

a tedy je-li ε úhel mezi dS a dS' máme

$$\cos\varepsilon = \left[(\alpha z - \gamma x)(\alpha' z - \gamma' x) + (\beta z - \gamma y)(\beta' z - \gamma' y)\right] \cdot \frac{1}{z^2},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{z^2}\left[z^2(\alpha\alpha' + \beta\beta') + \gamma\gamma'(x^2+y^2) - xz(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) - yz(\beta\gamma' + \beta'\gamma)\right]$$

t. j. vůči $\quad x^2 + y^2 = 2az - z^2,$

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{z}\left[z(\alpha\alpha' + \beta\beta') + \gamma\gamma'(2a - z) - \gamma'(\alpha x + \beta y) - \gamma(\alpha' x + \beta' y)\right],$$

t. j. vzhledem k rovnici (2) a rovnici obdobné pro směr α', β', γ':

$$\operatorname{coc}\varepsilon = \frac{1}{z}\left[z(\alpha\alpha' + \beta\beta') + \gamma\gamma'(2a - z) - 2\gamma\gamma'(a - z)\right],$$

$$\cos\varepsilon = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

Pravá strana rovnice však udává cosinus úhlu sevřeného směry ds a ds', jest tedy věta dokázána.

Ostatně není nesnadné dodělati se i tohoto výsledku cestou geometrickou. Buď dána plocha kulová, A bodu na ní, T jeho tečná rovina a T_1 rovina s ní rovnoběžná, na níž plochu z bodu A promítáme. Buď M libovolný bod na kouli, i budou jím procházeti dvě povrchové přímky, které nechť se setkají s povrchovými přímkami bodu A v bodech P a Q; jsou tedy AP, AQ, MP, MQ čtyry přímky na kouli. Koule prochází imaginárným kruhem v nekonečnu, pročež úběžné body všech její přímek jsou v oné kružnici, a tedy se promítají body P a Q na rovinu T_1 co kruhové body. této roviny t. j. cyklické přímky MP a MQ tečné roviny MPQ se promítají na T_1 zase co cyklické přímky, z čehož jde ihned, že je průmět isogonalný. s originálem. *) *W.*

Měřické tvaroznalství

spojené s kreslením.

Pro prvou třídu škol středních sepsal F. Hoza, prof. realných škol v Hradci Králové. V Praze, Slavík & Borový. Cena 65 kr.

*) Srovnej *Ed. Weyr*, O vztahu dvou rovin, jimž se nekonečně malé části podobně zobrazují (o vztahu isogonálném), tento Časopis roč. IV.

Podle nových osnov počíná se vyučovati základům měřictví na školách reálných ve třídě *druhé*; ve třídě prvé připadly všecky hodiny, starší osnovou počátkům geometrie vyměřené, přípravnému kreslení ornamentálnímu, a z nauky o tvarech měřických jest tu probrati jen tolik, kolik k dobrému porozumění geom. ornamentu nezbytně třeba. Jestiť tu jednak pojmy a hlavní vlastnosti základních útvarů měřických vyložiti, jednak význam a užívání jich v ornamentice se stanoviska esthetického objasniti. Máme za to, že obé ústnímu výkladu učitelovu pozůstaveno býti by mohlo a že by nesrovnávalo se s intencí osnovy učebné, když by učitel ve předmětě tomto žákům také domácí cvičení ukládati chtěl. Než okolnosť, že v době několika měsíců neméně než *čtyři* spisy vydány (od pp. profesorů A. Barborky v Pardubicích, T. Hessa v Chrudimi, F. Šandy v Táboře, a F. Hozy v Hradci Králové), kteréž o předmětě řečeném pojednávajíce potřebě žáků sloužiti mají, s dostatek tomu nasvědčuje, že potřeba podobné knihy školní skutečně se pociťuje.

Co se týká spisku p. Hozova, jehož „Základové měřictví v rovině a v prostoru" chvalně jsou známy, můžeme tvrditi, že jest to práce velice důkladná a pečlivá. Případné rozčlánkování a uspořádání učiva, přesně vědecký a přece jasný a chápavosti žáků zcela přiměřeně ustrojený výklad, správnosť ve výměrech naprostá, hojnosť příkladů a vhodných cvičení pro žáky, terminologie bezvadná — všemi těmito vlastnostmi každé dobré školní knihy vyznamenává se spis řečený. Toliko přílišnosť materie na některých místech bylo by lze vytýkati; geometrické *poučky* a příslušné *důkazy* v §§. 33. a 34. obsažené, podmínky pro různé vzájemné polohy dvou kružnic (§. 69.), jakož i četné úkoly *početní* (zejména vypočítávání obvodu kruhu a délky oblouku kruhového v §. 66.), rozhodně nenáležejí do „tvaroznalství," pokud toho v ornamentálním kreslení v I. třídě třeba, nýbrž do třídy druhé, kdež planimetrii od samých počátků vykládati jest. Učiteli však snadno bude, odstavce tyto na pravou míru uvésti, i nepochybujeme, že stane se pak knížka p. Hozova pomůckou výbornou. — Obrazce do textu vložené (číslem 99) jsou vzorně provedeny, a vnější úprava vůbec skvělá.

Oznámení.

K přání výboru Jednoty českých mathematiků uvázal jsem se v redakci Časopisu, jejž prof. dr. F. J. Studnička s úspěchem tak znamenitým po deset let byl řídil. Odevzdávaje do veřejnosti první sešit nového ročníku, prosím všecky příznivce mathematického studia, zvlášť ale dosavadní pp. přispívatele, by neustáli pracovati o dosažení onoho cíle, který si sl. Jednota při založení tohoto Časopisu vytkla.

Ed. Weyr.