Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 427--472

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122167

$P(3, -12, 0)$, $r_1 = 4$; střed promítání $O(0, 10, 5)$; $U_s(10, 0, 0)$]. *Praha-I.*

13. Stanoviti graficky délku vrženého stínu svislé tyče 6 *m* dlouhé na rovinu horizontální, jakož i azimut stínu v Mladé Boleslavi dne 1. května v 9 hodin dopoledne. [$\delta = 15^0$, $\varphi = 50^0 30'$; charakteristický trojúhelník sférický zobrazte na kouli o poloměru $r = 5$ *cm*]. *Mladá Boleslav.*

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti jest soustavy rovnic:

$$\alpha)\quad \begin{aligned} x + y + xy &= a \\ x^2 + y^2 + x^2y^2 &= b \end{aligned}$$

$$\beta)\quad \begin{aligned} x + y + \sqrt{xy} &= a \\ x^2 + y^2 + xy &= b \end{aligned}$$

Prof. *Rudolf Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos,* studující VI.*b* tř. gymn. v Praze III.

α)

Položme

$$x + y = u, \quad xy = v,$$

takže

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$$

Tím přejde daná soustava rovnic v soustavu

$$\begin{aligned} u + v &= a \\ u^2 - 2v + v^2 &= b. \end{aligned}$$

Vypočtěme u z prvé z těchto rovnic, $u = a - v$, a dosaďme do druhé. I dostaneme k určení v kvadratickou rovnici

$$2v^2 - 2(a + 1)v + a^2 - b = 0.$$

Odtud vypočteme

$$v_1, v_2 = \frac{a + 1 \pm \sqrt{1 + 2(a + b) - a^2}}{2}.$$

Příslušné hodnoty u pak budou

$$u_1, u_2 = \frac{a - 1 \mp \sqrt{1 + 2(a + b) - a^2}}{2}.$$

Z u a v určíme x a y, uvážíme-li, že jsou to kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - ut + v = 0.$$

β)

Položme jako dříve

$$x + y = u, \quad xy = v.$$

Tím dostaneme soustavu

$$u + v = a$$
$$u^2 - v^2 = b.$$

Uvážíme-li, že

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v),$$

plyne z druhé rovnice na základě první (pro $a \neq 0$)

$$u - v = \frac{b}{a}.$$

Ze součtu a rozdílu neznámých u, v snadno je vypočteme:

$$u = \frac{a^2 + b}{2a}, \quad v = \frac{a^2 - b}{2a};$$

x a y jsou pak kořeny rovnice kvadratické

$$t^2 - \frac{a^2 + b}{2a} t + \frac{a^2 - b}{2a} = 0.$$

Odtud najdeme

$$x = \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{(3b - a^2)(3a^2 - b)}}{4a},$$

$$y = \frac{a^2 + b - \sqrt{(3b - a^2)(3a^2 - b)}}{4a},$$

a druhé řešení obdržíme, zaměníme-li spolu x a y.

Je-li $a = 0$, pak, aby existovalo konečné řešení, musí také $b = 0$. Daná soustava má pak nekonečně mnoho řešení: Každá dvojice (x, y) vyhovující rovnici $x + y + xy = 0$ ji splňuje.

Poznámka.

Abychom mohli přehlédnouti případy, kdy kořeny dané soustavy jsou reálné neb komplexní, sobě rovné ($x = y$) neb od sebe různé ($x \neq y$), užijme, jsou-li a, b čísla reálná, grafického znázornění: (a, b) považujme za pravoúhlé souřadnice bodu v rovině.

Pak snadno najdeme:

Pro body (a, b) hovící nerovnostem $\frac{1}{3}a^2 < b < 3a^2$, t. j. ležící uvnitř proužku mezi parabolami $b = \frac{1}{3}a^2$ a $b = 3a^2$, jest $x \neq y$, jsou pak dvě soustavy řešení reálných.

Na parabolách $b = \frac{1}{3}a^2$ a $b = 3a^2$ (vyjma počátku $a = b = 0$) jest $x = y$; jest jediná soustava řešení reálných.

V ostatních bodech roviny, ležících nad to mimo osu $a = 0$, jest zase $x \neq y$, jsou pak dvě soustavy řešení komplexních.

Blíží-li se bod (a, b) bodu na ose $a = 0$, různému od počátku $a = b = 0$, rostou řešení do nekonečna. Pro počátek $a = b = 0$ je nekonečně mnoho soustav řešení, mezi nimi také nekonečně mnoho reálných.

2.

Dokažte bez použití analytické geometrie větu: Protíná-li hlavní osa kuželosečky v bodě *N* normálu vztyčenou v bodě *M* ke kuželosečce, jest průmět úsečky *MN* na průvodič roven parametru kuželosečky.

Dr. *V. Hruška.*

Řešení. Zaslal p. *Oldřich Taufer*, stud. VI. tř. r. v Lipníku.

Vypočtěme si v trojúhelníku ABC délky os souměrnosti úhlu γ, vnitřní $CD = m$ a vnější $CE = n$ a jich průměty m', n' na strany a, b.

Uvážíme-li, že

$$\triangle ABC = \triangle ADC + \triangle DBC,$$

je

$$\tfrac{1}{2}\, ab \sin \gamma = \tfrac{1}{2}\, bm \sin \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\, am \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

a odtud

$$m = \frac{2ab \cos \frac{1}{2}\gamma}{a+b}$$

$$m' = m \cos \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2ab \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{a+b}.$$

Poněvadž však

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

bude

$$m' = \frac{2s(s-a)}{a+b}.$$

Podobně je

$$\triangle ABC = \triangle AEC - \triangle BEC$$

a tedy

$$\tfrac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \tfrac{1}{2}\, bn \sin\frac{\pi+\gamma}{2} - \tfrac{1}{2}\, an \sin\frac{\pi-\gamma}{2}$$

a odtud pak

$$n = \frac{2ab \sin\frac{1}{2}\gamma}{b-a}$$

$$n' = n\cos\frac{\pi-\gamma}{2} = n\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2ab\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{b-a}.$$

Poněvadž

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

bude

$$n' = \frac{2(s-a)(s-b)}{b-a}.$$

Pro případ ellipsy označme ohniska F_1, F_2. Normála je osou souměrnosti vnitřní úhlu F_1MF_2. Užijeme vzorce pro m', při čemž přijde místo a, b, c, s, $s-c$

resp.

$$\overline{F_1M},\ \overline{F_2M},\ \overline{F_1F_2} = 2e,\ \tfrac{1}{2}(\overline{F_1M}+\overline{F_2M}+\overline{F_2F_2}) = a+e,\ a-e,$$

takže $$m' = \frac{2(a+e)(a-e)}{2a} = \frac{a^2+e^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p.$$

Pro případ hyperboly buďtež ohniska zase F_1, F_2. Normála je osou souměrnosti vnější úhlu F_1MF_2. Užijme vzorce pro n'. Nyní přijde

místo a, b, c, $s-a = \frac{1}{2}(-a+b+c)$ $s-b = \frac{1}{2}(a-b+c)$

resp. $\overline{F_1M}$, $\overline{F_2M}$, $\overline{F_1F_2} = 2e$, $\frac{1}{2}(-\overline{F_1M}+\overline{F_2M}+\overline{F_1F_2})$

$$= e+a,\ \tfrac{1}{2}(\overline{F_1M}-\overline{F_2M}+\overline{F_1F_2}) = e-a,$$

takže

$$n' = \frac{2(e+a)(e-a)}{2a} = \frac{e^2-a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p.$$

Pro parabolu je věta evidentní: Jelikož normála paraboly svírá s osou a s průvodičem stejné úhly, jsou průměty úsečky $\overline{MN}$ na osu a průvodiče stejné. Jest však známo, že průmět úsečky $\overline{MN}$ na osu, což jest subnormála, se rovná parametru p.

3.

Na straně BC daného trojúhelníku ABC jest dán bod D; tímto bodem mají se vésti dvě přímky DE, DF v úhlu φ tak, aby trojúhelník DEF, který má vrcholy E, F na stranách AB, BC, měl plochu co nejmenší.

Šk. rada *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *František Kotán*, stud. II. r. pedagogia v Příbrami.

Označme $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$, $\sphericalangle BDE = x$, $\sphericalangle FDC = y$. Pak je

$$\triangle DEF = \frac{\overline{DE} \,.\, \overline{DF}}{2} \sin \varphi.$$

Z $\triangle BDE$ plyne $\overline{DE} : m = \sin \beta : \sin (\beta + x)$ a tedy

$$\overline{DE} = \frac{m \sin \beta}{\sin (\beta + x)};$$

podobně z $\triangle DCF : \overline{DF} : n = \sin \gamma : \sin (\gamma + y)$ a tedy

$$\overline{DF} = \frac{n \sin \gamma}{\sin (\gamma + y)},$$

$$\triangle DEF = \frac{mn \sin \beta \sin \gamma \sin \varphi}{2 \sin (\beta + x) \sin (\gamma + y)}.$$

Ve výraze pro plochu $\triangle DEF$ mění se pouze jmenovatel. Bude tedy v nejmenší, bude-li jmenovatel co největší. Toto můžeme psáti ve tvaru

$$\cos (\beta + x - \gamma - y) - \cos (\beta + x + \gamma + y)$$
$$= \cos (\beta + x - \gamma - y) + \cos (\beta + \gamma - \varphi),$$

uvážíme-li, že $x + y = \pi - \varphi$.

Ve výraze tomto je pouze prvý sčítanec proměnný a může nabýti největší hodnoty 1 pro $\beta + x = \gamma + y$. To nastane, bude-li

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle DFC.$$

Z toho plyne konstrukce:

Sestrojme $DG \perp AB$, $DH \perp AC$, pak sestrojme osu souměrnosti úhlu GDH a na každou stranu této osy nanesme $\frac{1}{2}\varphi$, takže je přímka ta společnou osou souměrnosti úhlu GDH a φ. Ramena úhlu φ nechť protnou strany AB, AC resp. v bodech E. F. Z konstrukce plyne, že je

$$\sphericalangle EDG = \sphericalangle FDH$$

t. j.

$$x - (\tfrac{1}{2}\pi - \beta) = y - (\tfrac{1}{2}\pi - \gamma),$$

čili

$$x + \beta = y + \gamma \qquad \text{j. b. d.}$$

4.

Kružnice postupně se dotýkající mají společné vnější tečny. Stanovte jich poloměry a součet jich ploch.

L. Kolenatý.

Řešení. Zaslal p. *Theodor Šmíd*, stud. VII. tř. r. ve Velkém Meziříčí.

Má-li býti součet ploch konečný, musíme uvažovati kružnice od jisté počínajíc k průsečíku společných tečen.

Označme poloměr k-té kružnice r_k ($r_1 = r$), úhel společných tečen 2α. Pak plyne z trojúhelníku pravoúhlého, tvořeného úsečkou společné tečny vnější sousedních kružnic r — 1-ní a r-té, rovnoběžkou se střednou a úsekem na poloměru r_{k-1}, že je

$$r_{k-1} - r_k = (r_{k-1} + r_k)\sin\alpha.$$

Z toho

$$r_k = r_{k-1}\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

I bude postupně

$$r_2 = r\,\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},\quad r_3 = r_2\,\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = r\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2$$

.....

$$r_k = r\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^{k-1}.$$

Součet ploch všech kruhů je dán konvergentní geometrickou řadou

$$\pi r^2 + \pi r^2\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2 + \pi r^2\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^4 + \ldots,$$

jejíž součet je

$$\frac{\pi r^2}{1-\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2} = \frac{\pi r^2(1+\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha} = \pi r^2\,\frac{\sin^4(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha}.$$

5.

a) Dvěma body vésti hlavní kružnici na hmotné kouli.
b) Určiti průměr hmotné koule.
(Užitím pravítka, kružítka a pomocné nákresné noviny.)

Zásob. officiál *J. Kroupa.*

a) Řešení dle p. autora.

Jsou-li dané body A, B, pak kružnice K_1, K_2 opsané z A, B co středů libovolnými poloměry protínají se v bodech S_1, S_2, jež jsou vzhledem k hlavní hledané kružnici na kouli symmetrické. Kružnice m_1, m_2 opsané z S_1, S_2 týmž, jinak libovolným poloměrem sekou se v C, D, jež patří hledané největší kružnici. Známe-li body A, B, C, můžeme hledanou kružnici vyrýsovati na papíře co kružnici opsanou trojúhelníku ABC, jehož strany lze přímo na kouli odměřiti. Tím jest též určen průměr hmotné koule. Odměříme-li do kružítka stranu čtverce vepsaného do vyrýsované na papíře největší kružnice a opíšeme-li tímto rozevřením kružítka na kouli kružnice na př. z bodů A, B, pak jejich průsečíky jsou body, z nichž možno kružítkem (v kolenech ohnutým) vésti největší či hlavní kružnici.

b) Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VI.*b* tř. gymn. v Praze III.

Kružítkem lze vyrýsovati na kouli kružnici K, při čemž rozevření kružítka budiž ϱ. Poloměr σ kružnice K možno stanoviti následovně: Tři body na K buďtež A, B, C; tyto stanoví trojúhelník, který lze vyrýsovati na papíře, jelikož kružítkem můžeme úsečky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ odměřiti na kouli a na papír přenésti. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC má za poloměr σ. Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník z ϱ co přepony a ze σ co odvěsny, lze doplněním tohoto pravoúhlého trojúhelníka na větší pravoúhlý trojúhelník s vrcholem pravého úhlu, kde se stýká ϱ se σ, určiti průměr koule co přeponu tohoto většího pravoúhlého trojúhelníku.

6.

Dvě paraboly mají ohniska F_1, F_2 a společnou řídící přímku d; jsou-li ohniska na téže straně přímky d a neleží-li na kolmici k d, protínají se obě paraboly ve dvou bodech v konečnu, jichž spojnice je osou souměrnosti F_1, F_2.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Karel Lerl*, stud. VII. tř. r. v Lounech

Parabolu můžeme uvažovati jako geometrické místo středů kružnic, které procházejí ohniskem a dotýkají se přímky řídící. I vidíme, že průsečíky obou parabol můžeme obdržeti jako středy kružnic, které procházejí oběma ohnisky F_1, F_2 a dotýkají se přímky řídící d, což je jedna z jednoduchých úloh Apolloniových.

Úloze té vyhovují dvě kružnice o středech S_1, S_2, jestliže přímka F_1, F_2 není ani kolmá ani rovnoběžná s přímkou d. Při tom pak je centrála $S_1 S_2$ kolmá na společnou sečnou (chordálu) $F_1 F_2$. Tím tvrzení dokázáno.

7.

Najděte trojúhelník největšího resp. nejmenšího obvodu, jsou-li dány poloměry kružnice vepsané a opsané.

Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení, částečně dle p. *Václava Šifaldy*, stud. c. k. r. g. v Praze v Křemencově ul. a p. ***V. Kuldy***, stud. r. na Král. Vinohradech.

V trojúhelníku platí vztahy

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}, \quad a = 2r \sin \alpha.$$

Odtud dostaneme

$$s = \varrho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + 2r \sin \alpha.$$

Podobný vztah však musí býti mezi s a β, s a γ.

Vidíme tedy, že funkce

$$y = \varrho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}x + 2r \sin x$$

představuje vztah, který musí býti splněn, klademe-li za $y = s$ a za x všechny tři úhly v trojúhelníku, $x = \alpha, \beta, \gamma$.

Zabývejme se funkcí tou. Stačí se omeziti na interval od 0 do π pro x. Její derivace je

$$y' = -\frac{\varrho}{2\sin^2 \frac{1}{2}x} + 2r \cos x = -\frac{2r\cos^2 x - 2r\cos x + \varrho}{2\sin^2\frac{1}{2}x}.$$

Vymizí pro hodnoty

$$\cos x = \frac{r \pm \sqrt{r(r-2\varrho)}}{2r}.$$

1. Pro $r > 2\varrho$ dostáváme pro $\cos x$ dvě hodnoty reálné různé kladné a < 1, takže dostaneme též dvé hodnoty pro x v intervalu od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Položme

$$\cos x_1 = \frac{r + \sqrt{r(r-2\varrho)}}{2r}, \quad \cos x_2 = \frac{r - \sqrt{r(r-2\varrho)}}{2r}.$$

I bude patrně

$$0 < x_1 < \tfrac{1}{3}\pi < x_2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Sestavme si tabulku

$x =$	0	$0 < x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$\frac{1}{2}\pi$	y
$y =$	∞		y_1		y_2	$2r + \varrho$	0
$y' =$	$-\infty$	$y' < 0$	0	$y' > 0$	0	$-\varrho$	$-2r - \frac{1}{2}\varrho$

Z ní vidíme, že křivka uvažovanou funkcí znázorněná klesá v intervalu $0 \leqq x \leqq x_1$, stoupá v intervalu $x_1 \leqq x \leqq x_2$ a zase klesá v intervalu $x_2 \leqq x \leqq \pi$. Pro $x = x_1$ má tedy minimum, pro $x = x_2$ maximum. Je-li $0 < y < y_1$ neb $y > y_2$, přísluší takovým hodnotám y jediná hodnota x (v intervallu od 0 do π). Pro $y_1 \leqq y \leqq y_2$ odpovídají každé hodnotě y tři hodnoty x, z nichž pro $y = y_1$ a $y = y_2$ jsou si dvě rovny.

Z toho vidíme, že minimum obvodu nastává pro trojúhelník rovnoramenný s úhly při základně x_1 a maximum pro trojúhelník rovnoramenný s úhly při základně x_2.

2. Pro $r = 2\varrho$ jest pro $\cos x$ jediná hodnota reálná

$$\cos x = \tfrac{1}{2}, \quad x_1 = \tfrac{1}{3}\pi \ (60^0).$$

Snadnou úvahou shledáme, že křivka v tomto případě pro x jdoucí od 0 do π stále klesá, od hodnoty ∞ do 0. Pro $x = x_1$ bude nejen $y' = 0$, ale i $y'' = 0$, tedy nastane v bodě tom bod obratu s tečnou rovnoběžnou s osou x. Pro $y \neq y_1$ bude ku každé hodnotě y patřiti jediné x, pro $y = y_1$ budou k y_1 patřiti tři splývající hodnoty

$$x_1 = x_2 = \tfrac{1}{3}\pi,$$

(tečna v bodě obratu má s křivkou tři soumezné body společné).

Pro $r = 2\varrho$ přísluší tedy daným hodnotám r, ϱ vůbec jen jediný trojúhelník, a sice trojúhelník rovnostranný.

3. Pro $r < 2\varrho$ jsou hodnoty pro $\cos x$ komplexní, $y' < 0$ v intervalu od 0 do π, křivka stále klesá, každé hodnotě y přísluší jediné x. V tomto případě není možno sestrojiti reálné trojúhelníky.

Poznámka.

Aby bylo možno sestrojiti trojúhelník současně vepsaný kružnici k o poloměru r a opsaný kružnici $\varkappa$ o poloměru ϱ, musí býti $r \geqq 2\varrho$, kružnice $\varkappa$ musí ležeti uvnitř kružnice k a pro vzdálenost jich středů d musí platiti $d^2 = r(r - 2\varrho)$. Pak je takových trojúhelníků nekonečně mnoho. Pro $r = 2\varrho$ musí tedy středy obou kružnic splývati, všechny trojúhelníky jsou rovnostranné, spolu shodné.

Pro $r > 2\varrho$ trojúhelníky rovnoramenné, jeden o největším a druhý o nejmenším obvodu jsou souměrné vzhledem ke společné centrále kružnic k a K. Průsečík této společné centrály s kružnicí k bližší (vzdálenější) středu kružnice ϱ je vrcholem trojúhelníku o nejmenším (největším) obvodu. Bylo by zajímavé, dokázati to elementárně geometricky.

8.

Najděte na ellipse bod, jehož normála má od středu vzdálenost co největší.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Václav Šifalda*, stud. reál. g. v Praze, v Křemencově ul.

Buď dána ellipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Souřadnice bodů na ní lze vyjádřiti ve tvaru $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. Rovnice normály bude pak zníti

$$ax \sin \varphi - by \cos \varphi = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Vzdálenost této normály od středu dané ellipsy jest

$$n = \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Upravme tento výraz následovně:

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{n}\right)^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{b^2}{\sin^2 \varphi} = a^2 + b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi.$$

Minimum funkce $a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi$ dává maximum pro vzdálenost n. Funkce $a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi$ skládá se však ze dvou výrazů, jichž součin jest konstantní, totiž a^2b^2. Je tedy součet výrazů $a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$, $b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi$ minimální, je-li

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi = \sqrt{a^2b^2} = ab$$

a odtud vypočteme:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{b}{a + b}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{a}{a + b}.$$

Jsou tedy hledané body čtyři, souměrné vzhledem k ósám ellipsy,

$$M\left(\pm a \sqrt{\frac{a}{a + b}}, \ \pm b \sqrt{\frac{b}{a + b}}\right),$$

jich vzdálenost od středu ellipsy je pak $a - b$.

Poznámka. Pro tečnu ellipsy

$$bx \cos \varphi + ay \sin \varphi - ab = 0$$

je dán čtverec úseku mezi osami výrazem

$$t^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} + \frac{b^2}{\sin^2\varphi} = \left(\frac{a^2 - b^2}{n}\right)^2,$$

což je právě výraz dříve uvažovaný. Z toho vidíme, že pro body M má úsek mezi osami největší délku. Ta jest pak $a + b$. Tento úsek je bodem M tak dělen, že část jeho ležící blíže ose hlavní je b, část ležící blíže ose vedlejší je a. (Viz: *F. Dingeldey*, Sammlung v. Aufgaben I. str. 124, 157.)

Pan *Václav Střela*, stud. V. tř. r. v Rakovníce, podává tuto konstrukci bodu M. Stačí patrně sestrojiti bod M v prvním kvadrantu. Prodlužme hlavní poloosu $\overline{OA} = a$ o délku $\overline{AK} = b$. Nad průměrem $\overline{OK} = a + b$ sestrojme půlkružnici. Kolmice v bodě A vztyčená nechť ji protne v bodě L, tak že $\overline{AL} = \sqrt{ab}$. Označíme-li $\sphericalangle LOA = \varphi$, bude $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Abychom dostali bod M stačí pak sestrojiti průsek M_1 přímky OL s kružnicí nad hlavní osou jako průměrem a průsek M_2 přímky OL s kružnicí nad vedlejší osou jako průměrem: kolmice vedená bodem M_1 na hlavní osu protne se s kolmicí spuštěnou s bodu M_2 na osu vedlejší v bodě M.

Pata Q kolmice spuštěné ze středu ellipsy O na normálu v bodě M je zároveň středem křivosti v bodě M. Poloměr křivosti je pak $\overline{PQ} = \sqrt{ab} = \overline{AL}$. Také bychom dostali dle toho co svrchu bylo řečeno střed křivosti jako průsečík normály s půlkružnicí sestrojenou nad úsekem tečny v bodě M ležícím mezi osami.

9.

Sečísti jest řadu

$$\tfrac{1}{2}\binom{n}{1} - \tfrac{2}{3}\binom{n}{2} + \tfrac{3}{4}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\binom{n}{n}.$$

F. Mádle.

Řešení. Zaslal p. *Václav Šifalda*, stud. r. g. v Praze, v Křemencově ul.

Ježto

$$\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}, \quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k},$$

a tedy

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

rozpadá se daná řada v rozdíl dvou řad

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}$$
$$-\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{2}-\binom{n+1}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n+1}{n+1}\right].$$

Poněvadž jest však

$$0=(1-1)^n=1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$$
$$0=(1-1)^{n+1}=1-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\binom{n+1}{3}+\ldots$$
$$+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1},$$

bude míti první řada součet 1, druhá řada, v hranaté závorce,

$$\binom{n+1}{1}-1=n.$$

Daná řada pak má součet

$$1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Pan *Václav Střela* podotýká, že výsledek tento obdržíme také, vyčíslíme-li integrál $\int_0^1 (1-x)^n\,dx$ dvojím způsobem, jednak přímo, jednak rozvedeme-li $(1-x)^n$ dle binomické poučky a integrujeme člen po členu.

10.

Pohybuje-li se úsečka stálé délky a tak, že její koncové body zůstávají stále na pravoúhlých osách souřadných, obaluje křivku zvanou asteroidou o rovnici $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Která tečna asteroidy je zároveň její normálou?

Týž.

Řešení.

Asteroidu možno též znázorniti parametricky

$$x=a\cos^3\varphi,\qquad y=a\sin^3\varphi.$$

I bude

$$dx=-3a\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi,\qquad dy=3a\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

a směrnice tečny

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi,$$

směrnice normály $\operatorname{cotg}\varphi$. Z toho je patrno, že φ značí úhel, který svírá tečna se záporným směrem osy x.

Aby tečna v bodě příslušném parametru φ

$$y - a\sin^3\varphi = -\operatorname{tg}\varphi\,(x - a\cos^3\varphi)$$

byla zároveň normálou v bodě příslušném parametru ψ

$$y - a\sin^3\psi = \operatorname{cotg}\psi\,(x - a\cos^3\psi),$$

musí se tyto dvě rovnice stotožňovati, což vyžaduje, aby

1. $\qquad -\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\psi$

2. $\qquad \sin^3\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi = \sin^3\psi - \dfrac{\cos^4\psi}{\sin\psi}.$

Z rovnice 1. plyne

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \tfrac{1}{2}\pi)$$

$$\varphi = \psi - \tfrac{1}{2}\pi + k\pi.$$

Z rovnice 2. pak

$$\sin\varphi = \frac{\sin^4\psi - \cos^4\psi}{\sin\psi} = \frac{(\cos^2\psi + \sin^2\psi)(\cos^2\psi - \sin^2\psi)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi}$$

a tedy

$$\pm\cos\psi = \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi}$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \pm 2,$$

a tedy též

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \pm 2.$$

Označíme-li φ_0 ostrý úhel určený z rovnice $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = 2$, jsou všechna řešení této rovnice

$$\pm\varphi_0 + \tfrac{1}{2}k\pi.$$

Různé body (x, y) pak obdržíme pro hodnoty připadající do intervalu od 0 do 2π. Ty jsou

$$\varphi_0 + k\,\tfrac{1}{2}\pi, \quad \tfrac{1}{2}\pi - \varphi_0 + k\,\tfrac{1}{2}\pi,$$

pro $k = 0, 1, 2, 3$.

Snadno bychom vypočetli, že

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \quad \sin\varphi_0 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Označíme li

$$h = a\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad k = a\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^{\frac{3}{2}},$$

budou všechna řešení, na počet 8, dána body

$$(\pm h, \ \pm k),$$
$$(\pm k, \ \pm h).$$

Body ty tvoří dva čtverce souměrné vzhledem k osám souřadným M, M_1, M_2, M_3 a $M'. M'_1, M'_2, M'_3$.

V každém vrcholu je jedna strana jím jdoucí tečnou a druhá normálou, každá strana čtverce je pak v jednom vrcholu na ní ležícím tečnou, v druhém normálou.

Přehledně je vše zahrnuto v tabulce:

Bod	souřadnice	φ	tečna	normála
M	h, k	φ_0	MM_1	MM_3
M_1	$-k, h$	$\frac{\pi}{2} + \varphi_0$	M_1M_2	M_1M
M_2	$h, -k$	$\pi + \varphi_0$	M_2M_3	M_2M_1
M_3	$k, -h$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi_0$	M_3M	M_3M_2
M'	k, h	$\frac{\pi}{2} - \varphi_0$	$M'M'_3$	$M'M'_1$
M'_1	$-h, k$	$\pi - \varphi_0$	M'_1M'	$M'_1M'_2$
M'_2	$-k, -h$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi_0$	$M'_2M'_1$	M'_2M_3'
M'_3	$h, -k$	$2\pi - \varphi_0$	$M'_3M'_2$	M'_3M'

Pan *Václav Střela*, stud. V. tř. r. v Rakovníce podotýká, že přímku, která je současně tečnou a normálou asteroidy, obdržíme patrně jako společnou tečnu asteroidy a její evoluty. Přímkové souřadnice Plückerovy této přímky musí tedy hověti současně rovnici asteroidy

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = a^2$$

a její evoluty

$$\frac{u^2 + v^2}{(u^2 - v^2)^2} = a^2.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme souřadnice hledaných přímek

$$u = \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}, \quad v = \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}}.$$

Jich rovnice budou pak

$$\sqrt{5 \mp \sqrt{5}}\, x + \sqrt{5 \pm \sqrt{5}}\, y \pm \sqrt{2} = 0.$$

11.

Na obvod kružnice o středu S opsané pravidelnému sedmiúhelníku $ABCDEFG$ budiž od vrcholu A směrem $ABC\ldots$ nanesen třikrát její poloměr, tak že $AM = MK = KL$; průsečíky úseček BG, CF, DE, s průměrem ASL označme M, N. O a průsečík přímek HL, KS označme P. Dokažte, že body M, N, O se z bodu P promítají třemi paprsky svírajícími navzájem úhly 60^0.

Supl. prof. *Jaromír Pilnáček.*

Řešení dle p. autora.

S bodu P spusťme na AL kolmici do bodu R. Poloměr kružnice volme $r = 1$. Pak jest zřejmě

$$\overline{RS} = \frac{1}{4}, \quad \overline{PR} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \overline{SM} = \cos\alpha, \quad \overline{SN} = \cos 2\alpha,$$

kdež

$$\alpha = \frac{360^0}{7}.$$

Označme ještě $\sphericalangle PML = \varphi$, $\sphericalangle PNL = \psi$.

Vyjádříme nyní

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\overline{PR}}{\overline{RM}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{RS} + \overline{SM}} = \frac{\sqrt{3}}{1 + 4\cos 2\alpha}, \ldots \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\overline{PR}}{\overline{RN}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{RS} + \overline{SN}} = \frac{\sqrt{3}}{1 + 4\cos 2\alpha} \ldots \quad (2)$$

Z toho

$$\operatorname{tg} \sphericalangle MPN = \operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\varphi},$$

dosadíme-li sem za $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\psi$ jejich hodnoty dle (1) (2), máme

$$\operatorname{tg} \sphericalangle MPN = \frac{\sqrt{3}(\cos 2\alpha - \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + 4\cos\alpha\cos 2\alpha} \ldots \quad (3)$$

Máme dokázati, že $\sphericalangle MPN = 60^0$ t. j. jeho tangenta má se rov-

nati $\sqrt{3}$. Máme tedy dokázati platnost rovnice

$$\frac{\sqrt{3}(\cos 2\alpha - \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + 4 \cos \alpha \cos 2\alpha} = \sqrt{3},$$

čili po odstranění zlomků, zkrácení $\sqrt{3}$ a sloučení

$$1 + 2 \cos 2\alpha + 4 \cos \alpha \cos 2\alpha = 0,$$

nebo použitím vztahu $2 \cos \alpha \cos 2\alpha = \cos \alpha + \cos 3\alpha \ldots$

$$1 + 2\cos \alpha + 2\cos 2\alpha + 2\cos 3\alpha = 0.$$

Abychom dokázali správnost této relace, znásobíme ji *sin* 3α a užijeme pak vzorce

$$2 \sin \beta \cos \gamma = \sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma).$$

Vyjde

$$\sin 3\alpha + (\sin 4\alpha + \sin 3\alpha) + (\sin 5\alpha + \sin \alpha) + \sin 6\alpha = 0$$

čili

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha = 0,$$

což je zřejmě správná rovnice, neboť

$$\begin{aligned} \sin 6\alpha &= -\sin \alpha, & (6\alpha &= 4R - \alpha) \\ \sin 5\alpha &= -\sin 2\alpha, & (5\alpha &= 4R - 2\alpha) \\ \sin 4\alpha &= -\sin 3\alpha, & (4\alpha &= 4R - 3\alpha). \end{aligned}$$

Tím dokázáno, že $\sphericalangle MPN = 60^0$. Docela podobně se dokáže ještě: $\sphericalangle NPO = 60^0$.

12.

Jaké jest geometrické místo středů rovnostranných trojúhelníků vepsaných do ellipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Týž.

Řešení dle p. autora:

Vepsaný rovnostranný trojúhelník mějž vrcholy $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ a střed $O(x, y)$. Středem O položme souřadné osy $\xi \| x$, $\eta \| y$; v této nové soustavě označíme souřadnice bodů ABC: (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3). Bude tedy

$$x_i = \xi_i + x,\ y_i = \eta_i + y,\ i = 1, 2, 3.$$

Poněvadž bod O je těžištěm v ΔABC, jest $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$, čili $\xi_3 = -(\xi_1 + \xi_2)$, $\eta_3 = -(\eta_0 + \eta_2)$.

Vyjádřeme podmínku $\overline{OA} = \overline{OB}$:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 \tag{1}$$

a dále vztah $\overline{OC} . \sqrt{3} = \overline{AB}$; poněvadž $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, t. j. $\overline{OC}$ svírá s osou ξ (resp. η) týž úhel jako AB s osou η (resp. ξ), tedy také

$$|\overline{OC_1}|.\sqrt{3}=|\overline{A_2B_2}|, \quad |\overline{OC_2}|.\sqrt{3}=|\overline{A_1B_1}|,$$

kde A_1B_1C resp. $A_2B_2C_2$ jsou průměty bodů ABC na osu ξ resp. η. Ty rovnice umocněny dvěma dávají

$$3(\xi_1+\xi_2)^2=(\eta_1-\eta_2)^2, \tag{2}$$
$$3(\eta_1+\eta_2)^2=(\xi_1-\xi_2)^2 \tag{3}$$

Místo veličin $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ zavedeme nové veličiny m, n, p, q takto:

$$m=\xi_1-\xi_2,\ n=\xi_1+\xi_2,\ p=\eta_1-\eta_2,\ q=\eta_1+\eta_2. \tag{4}$$

Pak rovnice (1), (2), (3) budou zníti

$$mn+pq=0 \text{ čili } m:p=q:-n \tag{1'}$$
$$p^2=3n^2 \tag{2'}$$
$$m^2=3q^2 \tag{3'}$$

Nyní zbývá ještě vyjádřiti podmínky, že body A, B, C leží na ellipse $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, t. j. že souřadnice $(x+\xi_1,\ y+\eta_1)$, $(x+\xi_1,\ y+\eta_1)$, $[x-\xi_1-\xi_2,\ y-\eta_1-\eta_2]$ splňují tu rovnici.

Tedy: $b^2(x+\xi_1)^2+a^2(y+\eta_1)^2-a^2b^2=0,$ (5)

$$b^2(x+\xi_2)^2+a^2(y+\eta_2)^2-a^2b^2=0, \tag{6}$$
$$b^2(x-\xi_2)^2+a^2(y-\eta_1-\eta_2)^2-a^2b^2=0. \tag{7}$$

Utvořme rozdíl a součet prvních dvou rovnic a připojme pak třetí rovnici nezměněnou; zavedeme-li tam pak veličiny m, n, p, q, máme tyto tři rovnice:

$$b^2m(2x+n)+a^2p(2y+q)=0, \tag{8}$$

$$b^2\left(2x^2+2xn+\frac{m^2+n^2}{2}\right)+$$
$$+a^2\left(2y^2+2yq+\frac{p^2+q^2}{2}\right)-2a^2b^2=0, \tag{9}$$

$$b^2(x^2-2xn+n^2)+a^2(y^2-2yq+q^2)-a^2b^2=0. \tag{10}$$

Do těchto rovnic dosadíme za m, p jich hodnoty dle rovnic (1'), (2'), (3'). Pro (8) užijeme relace (1'); po úpravě bude:

$$2n.q.(a^2-b^2)=4(b^2xq-a^2y.n). \tag{8'}$$

Pro (9) užijeme (2'), (3'); po úpravě:

$$b^2(n^2+3q^2+4xn)+a^2(3n^2+q^2+4yq)+$$
$$+4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0, \tag{9'}$$
$$b^2(n^2-2xn+x^2)+a^2(q^2-2yq+y^2)-a^2b^2=0. \tag{10}$$

Utvořme tu nové rovnice

$$(9')+2.(10)\equiv(11),\quad (9')-4.(10)\equiv(12).$$

Dělíme-li obě tyto rovnice třemi, vyjde po úpravě:

$$(n^2+q^2).(a^2+b^2)=2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2) \qquad (11)$$
$$(-n^2+q^2).(a^2-b^2)=4(b^2xn+a^2yq). \qquad (12)$$

Z rovnic (8'), (11), (12) lze nyní snadno vyloučit veličiny n, q. Rovnice (8') a (12) umocněme dvěma a sečtěme; vyjde

$$(n^2+q^2)^2.(a^2-b^2)^2=16(b^4x^2+a^4y^2).(n^2+q^2)$$

čili po zkrácení výrazem n^2+q^2:

$$(n^2+q^2)\ .(a^2-b^2)^2=16(b^4x^2+a^4y^2).$$

Porovnáme-li tuto poslední rovnici s rovnicí (11), vidíme, že lze z nich výraz (n^2+q^2) vyloučit.

Vychází pak rovnice

$$16(b^4x^2+a^4y^2).(a^2+b^2)=2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)(a^2-b^2)^2.$$

To je ale rovnice ellipsy; upravena na normální tvar, zní:

$$\frac{x^2(a^2+3b^2)^2}{a^2(a^2-b^2)}+\frac{y^2(3a^2+b^2)^2}{b^2(a^2-b^2)^2}=1.$$

Tato ellipsa má poloosy:

$$a'=\frac{a.(a^2-b)^2}{a^2+3b^2},\quad b'=\frac{b(a^2-b)^2}{3a^2+b^2)}.$$

Její osy co do polohy jsou totožny s osami dané ellipsy.

13.

Dokažte, že libovolná přímka procházející bodem $(-p, 0)$ protíná parabolu $y^2=2px$ ve dvou bodech, jichž normály se protínají v bodě na této parabole ležícím.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Eduard Buriánek*, jedn. dobrov. v Brucku n. L.

Bodem $M(-p, 0)$ proložme libovolnou přímku:

$$s\equiv y=a(x+p),$$

kde a je směrnice. Průsečíky této přímky s parabolou buďte

$$A(x_1y_1),\ B(x_2y_2).$$

Platí tedy

$$y_1=a(x_1+p) \qquad (1)$$
$$y_2=a(x_2+p) \qquad (2)$$

Normála n_A v bodě A má rovnici

$$xy_1+py=y_1(x_1+p) \qquad (3)$$

a dosadíme-li tam za y_1 příslušnou hodnotu $a(x_1+p)$ dle rovnice

(1), jest

$$n_A \equiv ax(x_1 + p) + py = a(x_1 + p)^2; \qquad (3')$$

podobně pak jest

$$n_B \equiv ax(x_2 + p) + py = a(x_2 + p)^2 \qquad (4)$$

Řešením rovnic (3′) (4) dle x, y dostaneme souřadnice průsečíku M' normál n_A, n_B. Řešením vychází:

$$x_0 = x_1 + x_2 + 2p, \quad y_0 = \frac{-a}{p}(x_1 + p)(x_2 + p) \qquad (5)$$

Nyní ustanovme souřadnice $x_1 x_2$ bodů A, B; musíme rovnici přímky s řešiti s rovnicí paraboly. Eliminujeme-li z obou rovnic y, pak pro x vyjde kvadratická rovnice

$$x^2 - 2px\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) + p^2 = 0,$$

z čehož plyne

$$x_1 + x_2 = 2p\left(\frac{1}{a^2} - 1\right), \quad x_1 x_2 = p^2. \qquad (6)$$

Nyní konečně do rovnic (5) dosadíme za $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ jich hodnoty dané rovnicemi (6). Vychází

$$x_0 = \frac{2p}{a^2}, \quad y_0 = \frac{-2p}{a}.$$

I je zřejmo, že bod

$$M'\left(\frac{2p}{a^2}, \frac{-2p}{a}\right)$$

musí ležeti na parabole, neboť jeho souřadnice hoví rovnici paraboly, jakož bylo dokázati.

14.

Výraz $2\left(\binom{\binom{n}{2}}{3}\right) - 3\left(\binom{\binom{n}{3}}{2}\right)$ upravte na tvar

$$a_0\binom{n}{5} + a_1\binom{n+1}{5} + a_2\binom{n+2}{5} + \ldots + a_5\binom{n+5}{5}.$$

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Václav Střela*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

Výraz

$$2\left(\binom{\binom{n}{2}}{3}\right) - 3\left(\binom{\binom{n}{3}}{2}\right) = 2\,\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{n(n-1)}{2} - 2\right)}{6}$$

$$- 3\,\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3} - 1\right)}{2}$$

je mnohočlen stupně pátého v n. Koefficient u n^6 totiž je roven 0. Tvar, na který máme tento mnohočlen uvésti, je také mnohočlen stupně pátého v n, tak že úloha jést skutečně možná. Aby pak dva mnohočleny stupně pátého byly rovny (identicky), stačí, aby nastala rovnost pro 6 různých hodnot. Zvolme na př. $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Tak dostaneme postupně pro

$$n = 0, \quad a_5 = 0$$
$$n = 1, \quad a_4 = 0$$
$$n = 2, \quad a_3 = 0$$
$$n = 3, \quad a_2 = 2$$
$$n = 4, \quad a_1 + 2\binom{6}{1} = 2\binom{\binom{4}{2}}{3} - 3\binom{\binom{4}{1}}{2}$$

a odtud $a_1 = 10$

$$n = 5, \quad a_0 + 10\binom{6}{1} + 2\binom{7}{2} = 2\binom{\binom{5}{2}}{3} - 3\binom{\binom{5}{3}}{2}$$

a odtud $a_0 = 3$.

Je tedy

$$2\binom{\binom{n}{2}}{2} - 3\binom{\binom{n}{3}}{2} = 3\binom{n}{5} + 10\binom{n+1}{5} + 2\binom{n+2}{5}.$$

15.

Určete objem hranolce, který vznikne z pravidelného hranolu n-bokého, otočí-li se jedna podstava kol středu o úhel ε. Jaké těleso vznikne, necháme-li n růsti do nekonečna?

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Václav Šifalda*, stud. r. g. v Praze, v Křemencově ul.

Hranol měj výšku v a základnou buď pravidelný n-úhelník o poloměru kružnice opsané r a středovém úhlu $\omega = \frac{2\pi}{n}$.

Hranolec má objem

$$V = \tfrac{1}{6}v\,(Z_1 + Z_2 + 4S) = \tfrac{1}{3}v\,(Z + 2S).$$

Z_1, Z_2 jsou plochy obou základen, S je střední řez, v našem případě pak je $Z_1 = Z_2 = Z$.

Jest však $\qquad Z = \tfrac{1}{2}nr^2 \sin \omega.$

Střední řez je $2n$ úhelník, který není sice pravidelný, skládá se však z $2n$ shodných trojúhelníků o stranách $r \cos \frac{1}{2}\varepsilon$, $r \cos \frac{1}{2}(\omega - \varepsilon)$ svírajících úhel $\frac{1}{2}\omega$.

Je tedy

$$S = 2n \,.\, \tfrac{1}{2} r \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.\, r \cos \tfrac{1}{2}(\omega - \varepsilon) = nr^2 \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \tfrac{1}{2}(\omega - \varepsilon),$$

takže

$$\frac{S}{Z} = \frac{\cos \frac{1}{2}\varepsilon \cos \frac{1}{2}(\omega - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}\omega} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega - 2\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}\omega}\right).$$

Bude tedy

$$V = \tfrac{1}{3} v\, Z \left(2 + \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega - 2\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}\omega}\right).$$

Roste-li n do nekonečna, má hranolec za limitní těleso rotační hyperboloid. Pak

$$\lim_{n=\infty} \omega = 0, \quad \lim_{n=\infty} Z = \pi r^2;$$

a pro objem rotačního hyperboloidu obdržíme vzorec

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 v (2 + \cos \varepsilon).$$

16.

Lomenou čáru složenou ze $2n$ stejných úseček a učiňte hranami pobočnými a doplňte nahoře i dole vždy dalšími n hranami tak, aby vznikl hranolec, omezený dvěma pravidelnými n-úhelníky shodnými jako podstavami a $2n$ shodnými rovnoramennými trojúhelníky. Dokažte, že sklon dvou pobočných hran je nezávislý od n, má-li hranolec objem co největší.

Týž.

Řešení. Dle p. autora a p. *Fr Kotána*, stud. II. r. pedagogia v Příbrami.

Objem hranolu dán je vzorcem

$$V = \tfrac{1}{6} v\, (Z_1 + Z_2 + 4S).$$

V našem případě je $Z_1 = Z_2 = Z$, tak že

$$V = \tfrac{1}{3} v\, (Z + 2S).$$

Označíme-li r poloměr kružnice opsané základně, dále $\omega = \dfrac{\pi}{2n}$ bude $Z = \frac{1}{2} n r^2 \sin 4\omega$. S bude $2n$-úhelník pravidelný vepsaný do kružnice v poloměru $r_1 = r \cos \omega$, tak že

$$S = 2n \,.\, \tfrac{1}{2} r^2 \cos \omega \sin 2\omega = nr^2 \cos^2 \omega \sin 2\omega.$$

Hrana pobočná a má za průmět do roviny podstavy stranu pravidelného $2n$-úhelníka vepsaného do kružnice o poloměru r, tedy $2r \sin \omega$, tak že je-li v výška hranolu, platí

$$a^2 = v^2 + (2r \sin \omega)^2, \text{ z čehož } v = \sqrt{a^2 - 4r^2 \sin^2 \omega}.$$

Pak je

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 4r^2 \sin^2 \omega}\,(\tfrac{1}{2} nr^2 \sin 4\omega + 2nr^2 \cos^2 \omega \sin 2\omega)$$

$$V = \tfrac{1}{3} nr^2 \sqrt{a^2 - 4r^2 \sin^2 \omega}\,(\tfrac{1}{2} \sin 4\omega + 2 \cos^2 \omega \sin 2\omega).$$

Výraz v závorce možno postupně upraviti na tvar

$$\tfrac{1}{2} \sin 4\omega + (1 + \cos 2\omega) \sin 2\omega = \sin 4\omega + \sin 2\omega = 2 \sin 3\omega \cos \omega.$$

Je tudíž $V = \frac{2}{3} n \sin 3\omega \cos \omega\, r^2 \sqrt{a^2 - 4r^2 \sin \omega}.$

I dlužno uvažovati průběh funkce

$$f(r) = r^4 (a^2 - 4r^2 \sin^2 \omega) \text{ v intervalu } 0 < r < \frac{a}{2 \sin \omega}.$$

Uvažováním derivace $f'(r) = 4r^3 (a^2 - 6r^2 \sin^2 \omega)$, která vymizí pro hodnotu $r = \dfrac{a}{\sqrt{6} \sin \omega} < \dfrac{a}{2 \sin \omega}$ shledáme, že pro tuto hodnotu skutečně nastane maximum. Pak najdeme snadno, že $v = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ je *nezávislé na r.*

Označíme-li s délku hrany podstavné, 2φ úhel dvou sousedních hran pobočných, bude

$$s = 2a \sin \varphi = 2r \sin 2\omega, \text{ tedy } \sin \varphi = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cos \omega.$$

Sklon dvou pobočných hran závisí od ω.

17.

Z trojúhelníku rovnoramenného složiti plášť souměrného čtyřstěnu o největším objemu.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VI.b tř. gymnasia v Praze III.

Označíme ABC vrcholy daného trojúhelníku rovnoramenného, S střed základny AB, základnu $2a$, výšku na ní h, ramena b $(b > a)$. Přehneme nyní trojúhelník dle úseček CD, CE, kdež značí D, E body na základně, pro něž $\overline{AD} = \overline{EB} = x$.

Přehnutím vznikne plášť čtyřstěnu v základně ADE a vrcholu C. Rovinou souměrnosti ASC se rozpadá ve čtyřstěny $ASCD$ a $ASCE$. V nich je DS resp. ES výškou spuštěnou na základnu ASC. Označíme-li plochu tohoto trojúhelníku Δ, a uvážíme, že $\overline{DS} = \overline{SE} = a - x$, bude objem čtyřstěnu $ADEC$ $V = \frac{2}{3}\Delta.(a - x)$. V trojúhelníku ASC známe všecky tři strany: $\overline{AC} = b$; $\overline{AS} = g$ je odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku ADS o přeponě $\overline{AD} = x$ a druhé odvěsně $\overline{DS} = x$, tedy $g = \sqrt{a(2x - a)}$; $\overline{SC} = h = \sqrt{b^2 - a^2}$. Tak najdeme po jednoduchém výpočtu $\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{a(-ax^2 + 2b^2x - ab^2)}$ a tedy $V = \frac{1}{3}(a - x)\sqrt{a(-ax^2 + 2b^2x - ab^2)}$.

Z pravoúhlého trojúhelníku ADS plyne ihned, že musí býti x v intervalu $(\frac{1}{2}a, a)$. Nad to však musí býti výraz $\eta = -ax^2 + 2b^2x - ab^2$ kladný. Ten pro hodnotu $x = \frac{1}{2}a$ nabývá hodnotu zápornou $-\frac{1}{4}a^3$, pro $x = a$ hodnotu kladnou $a(b^2 - a^2)$ a pro dosti velké kladné hodnoty x zase hodnoty záporné. Z toho plyne, že rovnice $\eta = 0$ má dva kořeny kladné, jeden z nich x_1 v intervalu $(\frac{1}{2}a, a)$, druhý $x_2 > a$. I bude pro $x < x_1$ η záporné, v intervalu $x_1 < x < x_2$, η kladné, pro $x > x_2$ zase η záporné. Z toho vidíme, že x, má-li býti konstrukce čtyřstěnu možná, musí ležeti v intervalu (x_1, a). Objem V závisí na funkci

$$y = (a - x)^2(-ax^2 + 2b^2x - ab^2).$$

Z toho, co bylo řečeno o η, plyne, že funkce ta je pro $x < x_1$ záporná, pro $x = x_1$ vymizí, v intervalu $x_1 < x < a$ je kladná, pro $x = a$ má kořen dvojnásobný, v intervalu $a < x < x_2$ je zase kladná, pro $x = x_2$ vymizí a pro $x > x_2$ se stává opět zápornou. Z tohoto průběhu plyne, že má dvě (kladná) maxima, jedno pro $x = \xi_1$ v intervalu (x_1, a), druhé pro $x = \xi_2$ v intervalu (a, x_2), a minimum (rovné 0) pro $x = a$. Vypočtením derivace najdeme, že ξ_1 a ξ_2 jsou kořeny rovnice kvadratické $2ax^2 - (a^2 + 3b^2x)x + 2ab^2 = 0$. Pro naši úlohu má význam kořen ξ_1, pro který nastává maximum objemu V

$$\xi_1 = \frac{a^2 + 3b^2 - \sqrt{(a^2 + 3b^2)^2 - 16a^2b^2}}{4a}$$
$$= \frac{a^2 + 3b^2 - \sqrt{(a^2 + 4ab + 3b^2)(a^2 - 4ab + 3b^2)}}{4a}$$
$$= \frac{a^2 + 3b^2 - \sqrt{(b^2 - a^2)(9b^2 - a^2)}}{4a}.$$

18.

Řada 2, 4, 8, 16, 31, 58, ... vznikla sečtením souhlasných členů řady arithmetické třetího stupně a řady geometrické. Určiti její obecný člen a součtový vzorec.

† Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, studující VI.b tř. gym. v Praze III.

Označme členy řady dané

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 4 \ldots c_n, \ldots$$

členy řady arithmetické třetího stupně $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, členy řady geometrické $b_1, b_2, \ldots b_n = bq^{n-1}, \ldots,$ tak že $c_n = a_n + b_n$.

Označme dále $\Delta c_n = c_{n+1} - c_n$, $\Delta^2 c_n = \Delta c_{n+1} - \Delta c_n, \ldots$ a podobně při a_n a b_n.

Poněvadž při řadě arithmetické stupně třetího se čtvrtá řada rozdílová skládá ze samých null, tedy $\Delta^4 a_n = 0$, bude

$$\Delta^4 c_n = \Delta^4 b_n.$$

Avšak

$$\begin{aligned}
\Delta b_n &= b_{n+1} - b_n = bq^n - bq^{n-1} = bq^{n-1}(q-1)\\
\Delta^2 b_n &= \Delta b_{n+1} - \Delta b_n = bq^{n-1}(q-1)^2\\
\Delta^3 b_n &= \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = bq^{n-1}(q-1)^3\\
\Delta^4 b_n &= \Delta^3 b_{n+1} - \Delta^3 b_n = bq^{n-1}(q-1)^4.
\end{aligned}$$

Utvořme u dané řady postupně řady rozdílové až do čtvrté. I dostaneme

$$\begin{array}{c}
2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 58,\ \ldots\\
2,\ 4,\ 8,\ 15,\ 27,\ \ldots\\
2,\ 4,\ 7,\ 12,\ \ldots\\
2,\ 3,\ 5\ \ldots\\
1,\ 2,\ \ldots
\end{array}$$

tak že $\Delta^4 c_1 = 1$, $\Delta^4 c_2 = 2$.

I máme

$$\begin{aligned}
\Delta^4 c_1 &= \Delta^4 b_1 \quad \text{t. j.} \quad 1 = b(q-1)^4\\
\Delta^4 c_2 &= \Delta^4 b_2 \quad \text{t. j.} \quad 2 = bq(q-1)^4.
\end{aligned}$$

Dělením těchto rovnic dostaneme $q = 2$, a z první z nich pak $b = 1$. Řada geometrická má pak obecný člen $b_n = 2^{n-1}$.

Vypišme si členy počáteční

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$$

a odečtěme je od stejnolehlých členů řady dané. Tak dostaneme hledanou řadu arithmetickou třetího stupně. Utvořme také hned první, druhou a třetí řadu rozdílovou:

$$\begin{array}{c}
1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 15,\ 26\\
1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11\\
1,\ 2,\ 3,\ 4\\
1,\ 1,\ 1.
\end{array}$$

Její obecný člen bude

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 a_1\\
&= 1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3}\\
&= n + \binom{n}{3} = \frac{n(n^2-3n+8)}{6}.
\end{aligned}$$

I bude konečně

$$c_n = a_n + b_n = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{6} + 2^{n-1}.$$

Pro součty dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{n} b_n = 2^n - 1$$

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \binom{n}{4} \Delta^3 a_1$$

$$= \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4}$$

$$= \frac{n(+1)}{24}(n^2 - 3n + 14).$$

I bude

$$\sum_{n-1}^{n} c_n = \frac{n(n+1)(n^2 - 3n + 14)}{24} + 2^n - 1.$$

19.

Určiti jest v rovnicích

α) $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$

β) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

a tak, aby součet třetích mocnin kořenů byl maximem neb minimem.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Václav Střela*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

α)

Jest úlohou najíti extrémy výrazu

$$y = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

Vzhledem k tomu, že můžeme danou rovnici psáti ve tvaru

$$(x - 1)[x^2 + (1 - a)x + 1] = 0,$$

jest $x_3 = 1$ a pro ostatní dva kořeny x_1 a x_2 platí vztahy

$$x_1 + x_2 = a - 1$$
$$x_1 x_2 = 1.$$

Jest tudíž

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (a - 1)^3 - 3(a - 1)$$

a

$$y = (a - 1)^3 - 3(a - 1) + 1,$$

čili

$$y = a^3 - 3a^2 + 6.$$

Pro extrém funkce y musí býti $y' = 0$ a sice pro maximum musí býti dále $y'' < 0$ a pro minimum $y'' > 0$.

$$y' = 3a^2 - 6a = 3a(a - 2) = 0,$$
$$y'' = 6(a - 1).$$

Jest tudíž patrno, že maximum nastává pro $a_1 = 0$ a minimum pro $a_2 = 2$.

β)

Pro kořeny předložené rovnice platí vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 = a \quad (1)$$
$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = b \quad (2)$$
$$x_1 x_2 x_3 = c, \quad (3)$$

z nichž vyjádříme si přímo pomocí koefficientů a, b, c, výraz

$$y = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

Utvořením rovnice

$$(1)^3 - 3(1).(2) + 3(3)$$

dostáváme ihned

$$y = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = a^3 - 3ab + 3c.$$

Pokračujeme pak stejně jako v případě α:

$$y' = 3a^2 - 3b = 0, \quad a = \pm\sqrt{b}$$
$$y'' = 6a - 3, \quad y''' = 6.$$

Aby vůbec mohla nastati extrémní hodnota, musí býti $b \geqq 0$. Je-li $b > 0$, je pro

$$a = +\sqrt{b}, \quad y'' > 0,$$

tedy minimum a pro $a = -\sqrt{b}$ je $y'' < 0$ t. j. maximum.

Pro $b = 0$ je $y'' = 0$, $y''' \neq 0$, tak že nenastane ani maximum, ani minimum.

20.

Bodem, v němž paprsek vedený ohniskem kuželosečky seče příslušnou přímku řídící, vedeny jsou tečny ke kuželosečce. Jest určiti souřadnice středu příslušné poláry a vyšetřiti geometrické místo těchto středů, otáčí-li se paprsek kolem ohniska.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Karel Lerch*, stud. VII. tř. r. v Lounech.

Otáčí-li se paprsek kolem ohniska, probíhá jeho průsečík s příslušnou přímkou řídící všechny body této. Pohybuje-li se pak bod po přímce řídící, otáčí se jeho polára kolem příslušného ohniska.

I vidíme, že v podstatě jde o to, stanoviti geometrické místo středů tětiv vedených ohniskem kuželosečky. Kuželosečky mají společnou rovnici $x^2 + y^2 = (p + \varepsilon x)^2$, zvolíme-li počátek v ohnisku a hlavní osu za osu x. Přímka počátkem — ohniskem vedená nechť má rovnici $y = tx$. Její průsečíky s kuželosečkou nechť jsou (x_1, y_1), (x_2, y_2). Střed tětivy má pak souřadnice

$$\xi = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \eta = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

I budou x_1, x_2 kořeny rovnice

$$x^2 + t^2x^2 = (p + \varepsilon x)^2,$$

neboli

$$x^2 (1 - \varepsilon^2 + t^2) - 2p\varepsilon x - p^2 = 0.$$

Z toho plyne, že

$$\xi = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2 + t^2};$$

dále bude

$$\eta = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = t\xi = \frac{p\varepsilon t}{1 - \varepsilon^2 + t^2}.$$

Vyloučíme-li t, dostaneme rovnici hledaného geometrického místa $\eta^2 = p\varepsilon\xi + (\varepsilon^2 - 1)\,\xi^2$. Je to kuželosečka, jejíž vrchol leží v ohnisku kuželosečky původní, o téže výstřednosti číselné ε (tedy i téhož druhu), o parametru $\frac{1}{2}p\varepsilon$.

Pro $\varepsilon = 1$, kdy daná kuželosečka je parabolou, je to zase parabola, s vrcholem v ohnisku dané paraboly, v parametru polovičním $\frac{1}{2}p$.

Pro $\varepsilon = 1$, kdy daná kuželosečka je ellipsa neb hyperbola, je to zase ellipsa resp. hyperbola s jedním vrcholem v ohnisku kuželosečky dané, druhým ve středu jejím. Hlavní osa (celá, nikoliv poloviční!) má délku e, vedlejší $\dfrac{be}{a}$.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojte kulovou plochu dotýkající se uvnitř stran daného trojúhelníka a přímky s rovinou tohoto trojúhelníka různoběžné.

Prof. *Fr. Granát.*

Řešení. Zaslal p. *Václav Střela,* stud. V. tř. r. v Rakovnice.

Sestrojíme-li danému trojúhelníku tečnovému vepsanou kružnici K, bude tato povrchovou kružnicí hledané plochy kulové, jejímž průměrem bude tudíž přímka p kolmo vztyčená ve středu kružnice K k rovině trojúhelníka. Najděme průsečík S čtvrté dané tečny t s rovinou onoho trojúhelníka a veďme tečny z tohoto bodu k povrchové kružnici K. Naneseme-li pak délku těchto tečen od bodu S na tečnu t na obě strany, získáváme její dotyčné body T a T' (na základě úvahy o mocnosti bodu ke kouli). Roviny σ a σ' kolmo postavené k tečně t v oněch dotyčných bodech T a T' sekou pak průměr p ve středu hledané plochy kulové.

Úloha jest patrně dvojznačná, je-li bod S mimo kružnici K, jednoznačná, bude-li na kružnici K a nemožná, kdyby bod S padl dovnitř kružnice K.

Pan Eduard *Buriánek*, t. č. jednoroční dobr. v Brucku n. L., otáčí tečnu t kol průměru p, až protne některou stranu daného trojúhelníka, ku př. b v bodě T. Roviny souměrnosti úhlu strany b a takto otočené tečny dávají na průměru p středy hledaných ploch kulových.

Poznámka. Úloha dá se převést též na úlohu sestrojiti kružnice jdoucí dvěma body a dotýkající se přímky t, proložíme-li totiž tečnou t libovolnou rovinu a to tak, by protala kružnici K ve dvou reálných bodech. V rovině té pak dostaneme kružnice povrchové hledaných ploch kulových.

2.

Dány jsou dvě přímky mimoběžné o, t nakloněné k oběma průmětnám; o jest osou rotačního válce, který se dotýká přímky t. Má se sestrojiti půdorysná a nárysná stopa tohoto válce.

Prof. *Josef Hanuš.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Lerl*, stud. VII. tř. r. v Lounech.

Poloměr válce bude roven délce osy mimoběžek o, t, kterou sestrojíme známým způsobem. Libovolným bodem v prostoru veďme rovnoběžnou rovinu λ s oběma mimoběžkami. Považujeme-li tuto za průmětnu, přímky o, t promítají se v různoběžky $o^\lambda \parallel o$, $t^\lambda \parallel t$. Průsečík $o^\lambda . t^\lambda$ můžeme považovati za průmět osy mimoběžek, která protíná přímku o v bodě O a tečnu t v bodě T. Bod T bude dotyčným bodem.

Stopu půdorysnou a nárysnou sestrojíme jako vržený stín koule K, o středu O a poloměru $\overline{OT}$, na první resp. na druhou průmětnu. Směr osvětlení jest dán směrem přímky o. Stopy válce budou ellipsy K' a K'', jejíž středy O' a O'' budou stopami osy o, vedlejší osy ellips budou rovny průměru $2 . \overline{OT}$ a ohniska podle věty Quetelet-Dandelinovy vrženými stíny bodů nejvyšších a nejnižších na kouli vzhledem k průmětnám. Velkou osu sestrojíme podle známého vztahu $a = \sqrt{b^2 + e^2}$.

3.

Sestrojiti osu rotační plochy kuželové, která jest určena vrcholem, jedním bodem na povrchu, tečnou přímkou a odchylkou povrchových přímek od osy.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Ant. Konečný,* stud. VII. tř. r. v Brně.

Vrcholem V a bodem na povrchu určena je povrchová přímka a. Vrcholem V a tečnou přímkou určena je tečná rovina τ. Odchylka povrchové přímky od osy budiž α. Osu hledané rotační plochy kuželové sestrojíme jako průsek dvou geometrických míst. Geometrickým místem os rotačních ploch kuželových, které mají společný vrchol V, procházejí danou povrchovou přímkou a, a jichž povrchové přímky svírají s osou úhel α, je plocha kuželová o vrcholu V, ose a a vrcholovém úhlu 2α. Geometrickým místem os rotačních ploch kuželových, které mají společný vrchol V, dotýkají se roviny τ, a jichž povrchové přímky svírají s osou úhel α, je plocha kuželová o vrcholu V, ose kolmé k rovině τ a vrcholovém úhlu $2(R - \alpha)$. Povrchové přímky společné oběma plochám jsou hledané osy. (Průsek dvou rotačních kuželů o společném vrcholu sestrojíme pomocí koule nebo trojhranu. Kolem vrcholu V opišme kouli o libovolném poloměru. Tato koule protíná nám první kužel v kružnici, jež leží v rovině ϱ a druhý kužel v kružnici, jež leží v rovině σ. Rovina procházející vrcholem a průsečnicí rovin ϱ a σ, obsahuje společné povrchové přímky. Nebo řešíme trojhran, určený třemi stranami. Jednou stranou je úhel obou os, druhou a třetí poloviční úhly vrcholové u kuželů.)

Jiné řešení. V podstatě zaslal p. *Josef Neumann,* stud. VII. tř. r. v Praze VII.

Daný vrchol V a bod P stanoví površku p a tečna t s V určuje rovinu tečnou τ hledané plochy kuželové o vrcholovém úhlu 2φ. Osu o tohoto kužele sestrojíme pomocí koule jemu vepsané, jejíž poloměr zvolme r. Střed S' této koule musí býti v rovině $\sigma \parallel \tau$ ve vzdálenosti r vedené, dále na rotačním válci, jehož osou je površka p a poloměr r a na rotační ploše kuželové o ose p, vrcholu V a úhlu vrcholovém 2φ. Pronikem této plochy kuželové se souosou plochou válcovou jsou dvě kružnice v rovinách ϱ, ϱ', kolmých k p a symetr. k vrcholu V. Kružnice tyto protínají rovinu σ ve středech ploch kulových poloměru r a vepsaných hledaným plochám kuželovým. Spojnice jich s vrcholem V jsou osy ploch kuželových. Řešení patrně obecně čtyřznačné. (Zvolíme-li rovinu $\sigma' \parallel \tau$ ve vzdálenosti na straně opáčné k τ dostáváme tytéž výsledky.)

4.

Sestrojiti kouli, dotýkající se dané přímky a dané roviny, jež jsou navzájem rovnoběžné, známe-li jeden průměr co do polohy. Týž.

Řešení. Zaslal p. *Václav Střela*, stud. V. tř. reálky v Rakovníce.

Užijme libovolné roviny σ kolmé k dané přímce t a tudíž i k dané rovině ϱ. Tečna t promítne se do roviny σ jako bod T, rovina ϱ jako přímka ϱ' a daný průměr p jako přímka p'. Hledaná koule pak bude míti za průmět kružnici, jež půjde bodem T, bude se dotýkati přímky ϱ' a střed bude míti na přímce p'. [Sestrojení této kružnice provede se známým způsobem. Buď si najdeme bod T' souměrný k bodu T dle přímky p' a pak jedná se o sestrojení kružnice jdoucí dvěma body (T, T') a dotýkající se dané přímky (ϱ') (na základě mocnosti bodu ke kružnici), anebo si určíme přímku ϱ'' souměrnou k přímce ϱ' dle přímky p' a pak jde o nalezení kružnice jdoucí jedním bodem (T) a dotýkající se dvou přímek (ϱ', ϱ'') (na základě homothetie)].

Tyto kružnice budou dvě. Promítneme-li jejich středy S' a ${}^1S'$ zpět na průměr p, získáme středy S a ${}^1S$ hledaných koulí.

Úloha jest tudíž dvojznačná.

Možno též postupovati přímo prostorovou homothetií, jak činí p. *Karel Fejt*, stud. VI. tř. r. v Praze II.

Sestrojíme libovolnou kouli, mající střed na p a dotýkající se ϱ. Pak sestrojíme tečny t'' a $t''' \parallel t$ a ležící v rovině $\tau \equiv (t, m)$ $[m \equiv p, \varrho]$. Dotyčným bodům T'' a T''' těchto odpovídají spojením s M na t dotyčné body T a T' a v průseku kolmých rovin v bodech těch k t vztyčených a přímky p obdržíme středy S a ${}^1S$ hledaných ploch kulových.

5.

Zobraziti rotační paraboloid, jsou-li dány čtyři body na povrchu a podmínka, že osa je kolmá k půdorysně.

Prof. *Ant. Navrátil.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Feit*, stud. VI. tř. r. v Praze II.

Pro paraboloid dány 4 body povrchu A, B, C, D a podmínka, že osa $o \perp \pi$.

Třemi body z daných čtyř, třebas A, B, C resp. A, B, D určena jest rovina ϱ resp. σ, jež protíná paraboloid v elipse e resp. e'. Poněvadž však osa $o \perp \pi$, promítá se jako kruh procházející body A, B, C resp. A, B, D, který můžeme tedy stanoviti a určiti střed S resp. S'.

Hlavní osa elliptického průseku (neb její prodloužení) je různoběžná s osou o a ježto $o \perp \pi$, bude o_1 ležeti na prvním průmětu hlavní osy. Průmět hlavní osy h_1 resp. h_1' prochází bodem (středem) S resp S' a je kolmý ke stopě p_1^{ϱ} resp. p_1^{σ}.

Průsečík h_1 s h_1' určuje o_1; tím známe též o_2.

Zbývá stanoviti obrys nárysu. Za tím účelem sestrojíme v některém z bodů, třebas A tečnu t ležící v rovině ϱ (resp. σ) [t_1 je tečnou k e_1] a tečnu t' k příslušné rovnoběžce. Tečny ty určují rovinu tečnou v A k paraboloidu a ta protíná osu o v bodě W. Vrchol paraboloidu V rozpoluje vzdálenost bodu W od paty kolmice z bodu A spuštěné na osu o. Ohnisko určí se na základě věty, že pata kolmice z ohniska spuštěné k tečně paraboloidy je na vrcholové tečně.

Úloha je jednoznačná a vždy možná, neleží-li všechny body v téže rovině, neb tři v jedné přímce.

Poznámka.

Sestrojena-li osa o paraboloidu, jde tu pak jen o meridián, parabolu to v rovině, jdoucí osou o. Otočíme-li dva z daných bodů A, B do této roviny, dostaneme parabolu určenou osou o a body A_0, B_0. Označíme-li body symetrické dle osy o A_0', B_0', tu vrchol V paraboly půlí vzdálenost průsečíku (o, $\overline{A_0, B_0'}$) od průsečíku (o, $\overline{A_0\ B_0}$). V A_0 sestrojíme tečnu na základě subtangenty a pak určíme ohnisko.

c) Z fysiky.

1.

Jak lze pomocí libelly (I. 115, 125) o poloměru křivosti R měřiti zrychlení? Když zeměkoule obíhá elliptickou dráhu kolem slunce, mění se její rychlost dle druhého zákona Keplerova (I, 93, 99). Bylo by možno vhodně citlivou libellou stanoviti zrychlení zeměkoule? *K.*

Řešení:

Horní skleněná stěna libelly je částí povrchu kruhového prstence o velmi velikém poloměru křivosti R. Označme střed křivosti písmenou C. (Jednoduchý obrazec zhotoví si laskavý čtenář sám.) Je-li libella v klidu nebo v rovnoměrném pohybu vzhledem k okolnímu povrchu zemskému, nachází se střed vzduchové bublinky v nejvyšším místě libelly, v bodě A, ležícím vertikálně nad C. Spojnice AC, vertikální dolů, udává směr nejrychlejšího stoupání hydrostatického tlaku v kapalině spec. hmoty s (alkohol, éther), jíž jest libella naplněna; tlak ten stoupá o sg dyn, postoupíme-li o 1 cm níže. Pohybuje-li se libella podélně na př. z leva na pravo urychlením a, vzniká v kapalině horizontální gradient (t. j. stoupání na jedničku délkovou) tlaku velikosti $s\,a$dyn (Čl. § 1, (1))*) a to z prava na levo. Střed bubliny přejde v místo B libelly, charakterisované tím, že zase spojnice BC udává směr nejrychlejšího stoupání tlaku. Naneseme-li oba gradienty ze středu C a to sg směrem dolů, sa směrem horizontálním z prava na levo, a vytvoříme-li dle pravidla o skládání sil (t. j. součtem geometrickým či vektorovým) gradient výsledný, bude jeho směr udávati směr BC. Tak najdeme místo B. Úhel $\sphericalangle BCA = \alpha$ jest patrně dán vztahem

$$tg\,\alpha = \frac{sa}{sg} = \frac{a}{g}.$$

Je-li x horizontální vzdálenost míst B a A, je pro veliké poloměry R t. j. citlivé libelly dostatečně přibližně

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{x}{R} \quad \text{takže} \quad a = g\frac{x}{R} = \text{Const.}\,x.$$

Volíce veliká R dostáváme i pro malá urychlení značné výchylky x. K témuž výsledku dospějeme, charakterisujeme-li body A a B jakožto místa, v nichž se rovinný povrch volné kapaliny dotýká kruhového oblouku o středu C a poloměru R.

Nikdo z řešitelů nepostřehl, že sebe citlivější libellou v nižádný čas denní nemůžeme změřiti urychlení zeměkoule na její dráze kolem slunce. Všeobecná gravitace působí totiž v tomto případě urychlením na každou hmotnou částici jak libelly, tak její kapaliny, kdežto, jak z § 1. Čl. je patrno, vzniká sklonění volného povrchu kapaliny jen tehdy, když urychlující síla působí pouze na stěny nádoby, kterýmiž se přenáší na uzavřenou v ní kapalinu.

2.

V kapalině jsou vyznačeny proudové trubice tak, že jejich kolmé průřezy jsou všude obráceně úměrny rychlosti toku. Rovněž jsou vyznačeny plochy téhož rychlostního potenciálu a to tak, že rychlostní potenciál stoupne o stálou hodnotu, když přejdeme od jedné plochy k následující. Dokažte, že tyto plochy dělí proudové trubice na útvary buňkovité, které obsahují vždy týž obnos kinetické energie. *K.*

Řešení, jež podal p. *Zd. Horák*, VIII. r. g. na Král. Vinohradech.

Volíme-li proudové trubice dostatečně úzké a rozdíly potenciálu rychlostního malé, budou buňkovité útvary míti tvar komolých ku-

*) Odkazy (Čl. § 1, (1)) týkají se článku prof. Kučery v prvém sešitě Přílohy, kde citován jednak paragraf, jednak oboustranně uzávorkovaný vzorec.

želů nebo jehlanů. Je-li s spec. hmota kapaliny a d vzdálenost dvou sousedních hladin, jest objem útvaru elementárního $q_0 d$, hmota v něm uzavřená $sq_0 d$ a její kinetická energie

$$e_{12} = \tfrac{1}{2} sq_0 d \cdot v_0{}^2 = \tfrac{1}{2} sq_0 v_0 \cdot v_0 d,$$

kdež $q_0 \doteq \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ je střední průřez elementu a v_0 rychlost kapaliny v tomto řezu. Podobně jest u jiného elementu

$$e_{n,n+1} = \tfrac{1}{2} s' q'_0 d' v'_0{}^2.$$

Dle předpokladu úlohy jest v nestlačitelné kapalině $s' = s$ a $q_0' v'_0 = q_0 v_0 = A$. Dosazením tudíž $e_{n,n+1} = \frac{1}{2} sq_0 v_0 \cdot v'_0 d'$.

Ježto však dle definice rychlostního potenciálu ψ jest

$$v_0 d = \psi_2 - \psi_1 \quad \text{a} \quad v'_0 d' = \psi_{n+1} - \psi_n$$

a dle předpokladu úlohy $\psi_2 - \psi_1 = \psi_{n+1} = \Psi$ je patrno, že

$$e_{12} = e_{n,n+1} = \tfrac{1}{2} sA\Psi,$$

což bylo dokázati.

3.

Dvě přímková a rovnoběžná vírová vlákna jsou ve vzájemné vzdálenosti d umístěna v nekonečném objemu nestlačitelné kapaliny. Vírové intensity obou vláken jsou stejné, ale opačného znamení. Spojíme obě vlákna kolmicí, prodloužíme ji přes vlákno druhé, a ve vzdálenosti δ od něho nakreslíme kruh o poloměru R, takže $R^2 = (d + \delta)\,\delta$ v rovině na osách vláken kolmé. Dokažte, že tento kruh je proudovou křivkou. *K.*

Řešení:

Označení délek i úhlů jsou patrna z připojeného obrazce, v němž znamenají A a B vírová vlákna stejných intensit i a $-i$, C střed kruhu v úloze definovaného. Rychlosti proudění v bodě D jsou (Čl. § 9, (24)) $\dfrac{i}{\pi r_1}$ a $\dfrac{i}{\pi r_2}$, a stojí kolmo na AD resp. BD.

Aby kruh byl proudovou křivkou, musí výsledná rychlost býti kolma na poloměru DC, čili nesmí míti žádné složky ve směru DC. Musí tudíž

$$\frac{i}{r_1} \sin\alpha = \frac{i}{r_2} \sin(\alpha + \beta).$$

Dle vět o trojúhelníku však

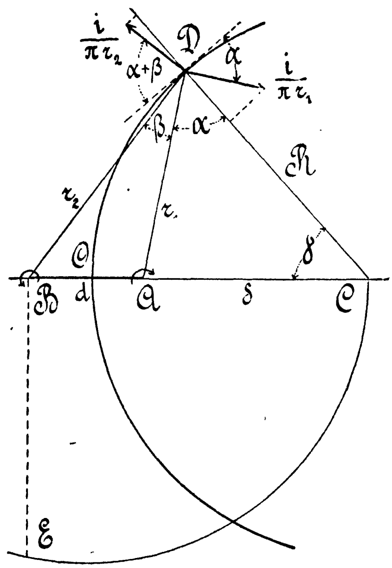
$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{\delta + d}{r_2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\gamma},$$

takže dosazením musí $\left(\dfrac{i\delta}{r_1{}^2} - \dfrac{i(d+\delta)}{r_2{}^2}\right) \sin\gamma = 0.$

Ježto γ není obecně rovno nulle, musí $\dfrac{\delta}{r_1^{\,2}} = \dfrac{d+\delta}{r_2^{\,2}}$.

Za $r_1^{\,2}$ a $r_2^{\,2}$ lze dosaditi ze vztahů

$$r_1^{\,2} = R^2 + \delta^2 - 2R\delta\cos\gamma$$
$$r_2^{\,2} = R^2 + (d+\delta)^2 - 2R(d+\delta)\cos\gamma,$$



takže po krátké redukci plyne, jak bylo dokázati

$$R^2 = \delta(d+\delta).$$

Z tohoto vztahu plyne velmi jednoduchá, spodní polovicí obrazce znázorněná konstrukce poloměru R; rozpůlíme AB a kolem středu O nakreslíme kruh o poloměru OC. Kolmice $BE \perp AB$ v bodě B (nebo v A) je hledaným poloměrem R.

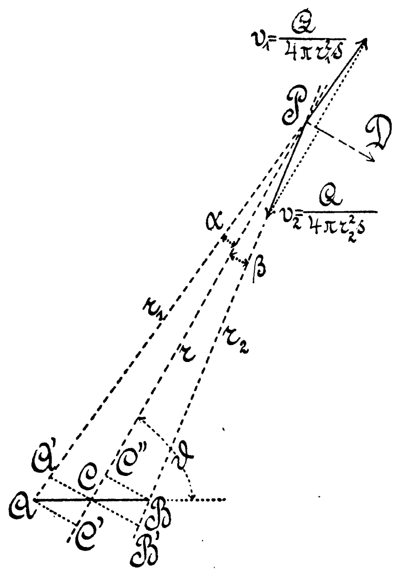
4.

V nekonečné, nestlačitelné kapalině nachází se dublet, to jest vznik A a zánik B téže vydatnosti ve velmi malé vzájemné vzdálenosti. Přímka AB nazývá se osou dubletu. Ve směru, jenž s ní tvoří úhel ϑ a vzdálenosti r od středu C dubletu bod P. Dokažte, že složka rychlosti toku v bodě P, padající do směru PC jest rovna $\dfrac{2\,\sigma\cos\vartheta}{4\,\pi\, s\, r^3}$, kdežto do směru na $P\,C$

kolmého padá vložka $\frac{\sigma \sin \vartheta}{4 \pi s r^3}$, kde s je spec. hmota kapaliny, a σ moment dubletu, to jest součin z vydatnosti vzniku a vzdálenosti A B. *K.*

Řešení:

Úloha může se řešiti přímou úvahou, v níž se odvoláváme na připojený obrazec. Proti vzdálenosti r velmi malou vzájemnou odlehlost



obou zdrojů zveme $2a = \overline{AB}$. Vznik A a zánik způsobují v bodě P rychlosti $v_1 = \frac{Q}{4\pi r_1{}^2 s}$ směru AP a $v_2 = \frac{Q}{4\pi r_2{}^2 s}$ směru PB (Čl. § 5, (9)). Výslednou rychlost ve směru PC obdržíme jakožto

$$v_2 \cos \beta - v_1 \cos \alpha = \frac{Q}{4\pi s}\left(\frac{\cos \beta}{r_2{}^2} - \frac{\cos \alpha}{r_1{}^2}\right).$$

Jedná se pouze o úpravu tohoto výrazu vzhledem k tomu, že $2a$ je velmi nepatrné proti r. Lze tudíž bez znatelné chyby psáti $\cos \alpha = \cos \beta = 1$. Vztyčíme-li kolmici v bodě C na přímku PC a označíme-li konečné její body A' a B', jest patrně dostatečně přesně $\overline{PC} = \overline{PA'} = \overline{PB'}$ a

$$r_1 = r + a . \cos \vartheta \qquad r_2 = r - a . \cos \vartheta .$$

Dosadíme a zanedbáme v druhých mocninách těchto dvojčlenů výrazy, v nichž přichází a^2, uvedeme na společného jmenovatele a máme

$$v = \frac{Q}{4\pi s} \cdot \frac{r^2 + 2ar\cos\vartheta - r^2 + 2ar\cos\vartheta}{r^4 - 4a^2r^2\cos^2\vartheta} = \frac{4a\,Q\cos\vartheta}{4\pi s r^3} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{4\pi s r^3},$$

neboť $4a^2r^2\cos\vartheta$ ve jmenovateli lze oproti r^4 zanedbati a moment dubletu $\sigma = 2a \,.\, Q$.

Pro výslednou rychlost v' kolmou na PC, t. j. ve směru PD obdržíme podobně průmětem v_1 a v_2 na tento směr

$$v' = v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta = \frac{Q}{4\pi s}\left(\frac{\sin\alpha}{r_1^2} + \frac{\sin\beta}{r_2^2}\right).$$

Za sinusy dosadíme ze vztahů

$$A'C = a \,.\, \sin\vartheta = r_1 \sin\alpha \qquad B'C = a \,.\, \sin\vartheta = r_2 \sin\beta$$

dostatečně přesně platných a zanedbávajíce velmi malé veličiny proti konečným, obdržíme

$$v' = \frac{Q\,a\sin\vartheta}{4\pi s}\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right) =$$

$$= \frac{Qa\sin\vartheta}{4\pi s} \frac{r^3 - 3ar^2\cos\vartheta + r^3 + 3ar^2\cos\vartheta}{(r^3 + 3ar^2\cos\vartheta)(r^3 - 3ar^2\cos\vartheta)} =$$

$$= \frac{2a\,Q\sin\vartheta\, r^3}{4\pi s r^6} = \frac{\sigma\sin\vartheta}{4\pi s r^3}.$$

Výpočet lze značně usnadniti, známe-li rychlosti vzbuzené elementárním dubletem jednak v prodloužení jeho osy, jednak v místech, ležících na kolmici uprostřed mezi oběma zdroji na ose dubletu vztyčené, čili v tak zvaných »polohách Gaussových« (srovnej učebnice Jeništova resp. Maškova, díl II. § Intensita magnetického pole).

Dubletem v I. Gaussově poloze vzhledem k bodu P byl by na našem obrázku dublet $C'C''$, kterýž měj vzdálenost zdrojů $\overline{C'C''} = 2c$ a vydatnost Q. Tento dublet nevzbuzuje proudění kolmé na PC, jediné proudění ve směru PC o rychlosti

$$\frac{Q}{4\pi s}\left(\frac{1}{(r-c)^2} - \frac{1}{(r+c)^2}\right) = \frac{Q}{4\pi s} \frac{r^2 + 2cr - r^2 + 2cr}{(r^2 - 2cr)(r^2 + 2cr)} =$$

$$= \frac{4c\,Q}{4\pi s r^3} = \frac{2\sigma'}{4\pi s r^3},$$

kde je psáno za moment dubletu $\sigma' = 2cQ$.

Dubletem v II. Gaussově poloze vzhledem P je na obrázku dublet $A'B'$, kde označíme vzdálenost $\overline{A'B'} = 2b$ a moment dubletu

$2b \cdot Q = \sigma''$. Tento nevzbuzuje žádnou rychlost ve směru kolmice $PC \perp A'B'$ a rychlost ve směru $PD \perp PC$ rovnou

$$\frac{Q}{4\pi s r^2}(\sin\alpha + \sin\beta),$$

ježto dostatečně přesně je $\overline{PA'} = \overline{PB'} = r$. Nyní je přesně $\alpha = \beta$ a dostatečně přesně $\sin\alpha = \frac{b}{r}$, takže rychlost výsledná v PD ležící jest

$$\frac{Q}{4\pi s r^2} \cdot \frac{2b}{r} = \frac{2b\,Q}{4\pi s r^3} = \frac{\sigma''}{4\pi s r^3}.$$

Známe-li tyto jednoduché výsledky, můžeme snadněji řešit úlohu prvotní.

Abychom obdrželi pro dublet AB výslednou rychlost rovnoběžnou s PC, mysleme si vedle vzniku A a zániku B o vydatnosti Q ještě vznik a zánik téže vydatnosti v bodě C', kde $AC' \perp PC$ a podobně vznik a zánik v C'', kde $BC'' \perp PC$. Jest to dovoleno, ježto patrně vydatnost zdrojů těch v C' a C'' se rovná $Q - Q = 0$ a na rychlostech proudění se tím nic nemění. Nyní kombinujeme našich šest zdrojů v dublety AC' a BC'', které jsouce vzhledem P v II. poloze Gaussově nedávají žádnou rychlost v PC. Zbývající dublet $C'C''$ dává rychlost výslednou (I. Gauss. poloha)

$$v = \frac{2\sigma'}{4\pi s r^3} = \frac{4c\,Q}{4\pi s r^3} = \frac{4a\,Q\cos\vartheta}{4\pi s r^3} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{4\pi s r^3}$$

ježto dle konstrukce $\overline{CC'} = \overline{CC''} = c = \overline{CB}\cos\vartheta = a\cos\vartheta$.

Stejně snadno obdržíme rychlost kolmou na PC, připojíme-li k zdrojům A a B dva vzniky a dva zániky, vždy vznik a zánik v bodech A' a B'. Těchto šest zdrojů kombinujeme v dublety AA' a BB', které jsouce v I. Gauss. poloze vzhledem k P nedávají rychlosti kolmé na PC a dublet $A'B'$, který jsa v poloze II, dává rychlost

$$v' = \frac{\sigma''}{4\pi\, s r^3} = \frac{2b\,Q}{4\pi\, s r^3} = \frac{2a Q \sin\vartheta}{4\pi\, s r^3} = \frac{\sigma \sin\vartheta}{4\pi\, s r^3},$$

neboť patrně

$$b = \overline{A'C} = \overline{CB'} = a\sin\vartheta.$$

Ježto zdroj vydatnosti Q působí ve vzdálenosti r rychlost

$$\frac{Q}{4\pi s} \cdot \frac{1}{r^2},$$

kdežto magnetický nebo elektrický pól o náboji m v téže vzdálenosti intensitu pole (t. j. sílu na jedničku magnetického nebo elektrického množství) $\frac{m}{r^2}$, a ježto i rychlost v případě prvém i intensita pole v druhém jsou vektory téhož směru, je patrno, že náš výpočet řeší také obecnou úlohu magnetického dubletu (čili t. zv. elementárního magnetu) nebo elektrického dubletu, nahradíme-li prostě $\frac{Q}{4\pi s}$ nábojem m a slovo výsledná rychlost názvem výsledné pole. Z velmi jednoduchého řešení obecného případu pomocí Gaussových poloh je patrno, proč byly vůbec zavedeny.

5.

Lineární zdroj sestává ze spojité řady zdrojů bodových, v přímku sestavených. Jeho vydatností Q nazýváme množství za sekundu v jedničce délkové vznikající kapaliny. Dokažte, že ve vzdálenosti r nastává rychlost toku $\frac{Q}{2\pi sr}$. *K.*

Řešení.

Vzhledem k symetrii jest patrno, že křivkami proudovými jsou přímky z lineárného zdroje na všechny strany vedené a na zdroji kolmé. Plochy stejného potenciálu čili hladiny mají dle toho tvar souosých válců, jichž osou je zdroj. Jsouť tyto válce také „obálkami“ neboli obalujícími plochami koulí stejných poloměrů, jež jsou hladinami bodových zdrojů, tvořících zdroj lineárný.

Mysleme si hladinu, válec poloměru r, omezený dvěma rovinnými na ose kolmými rovinami ve vzájemné vzdálenosti a. Jeho pláštěm povrchu $2\pi ra$ vystupuje v jedničce časové veškerá kapalina hmoty Qa t. j. objemu $\frac{Qa}{s}$, kterou zdroj z délky a v témž čase vydal. Jsouť základny vytvořeny samými přímkami proudovými, nevystupuje tedy jimi kapalina žádná.

Sekundový objem kapaliny plošnou jedničkou pláště válcového kolmo vystupující, který se rovná numericky rychlosti kapaliny, jest tudíž roven

$$\frac{Qa}{s} \cdot \frac{1}{2\pi ra} = \frac{Q}{2\pi rs},$$

jak bylo dokázati.

Také tento problém má analogon elektrické (resp. magnetické, viz předchozí úlohu). Dá se netěžko dokázati, že velmi tenký váleček vodivý pokrytý na každé jednotce délkové nábojem m vzbuzuje radiální intensitu pole danou výrazem $\frac{2m}{r}$, takže zase $\frac{Q}{4\pi s}$ jest zastoupeno nábojem m.

Vzhledem k formální totožnosti zákona Coulombova a Newtonova zákona o všeobecné atrakci hmot, je výraz $\frac{2m}{r}$ také silou, kterou přitahuje teninká tyč o hmotě m na jedničce délkové, jedničku hmotnou ve vzdálenosti r.

6.

Dva lineární zdroje vydatnosti $+Q$ a $-Q$ rovnoběžné a ve vzdálenosti δ tvoří lineární dublet momentu $\sigma_1 = Q\delta$. Dokažte, že ve vzdálenosti r_1 tvořící s osou dubletu úhel ϑ je radiální složka toku rovna $\frac{\sigma_1 \cos\vartheta}{2\pi s r_1^2}$, kdežto složka kolmá na ní jest $\frac{\sigma_1 \sin\vartheta}{2\pi s r_1^2}$. *K.*

Řešení.

Použijeme výsledku úlohy 5., a methody úlohy 4., jakož i obrázku k ní připojeného, v němž značí A a B stopy lineárních zdrojů kolmých na rovině papíru. Vyšetříme nejprve polohy Gaussovy.

I. U lineárného dubletu $C'C''$ je rychlost $\perp PC$ rovna nule, a rychlost $\| PC$

$$\frac{Q}{2\pi s}\left(\frac{1}{r-c} - \frac{1}{r+c}\right) = \frac{Q}{2\pi s}\,\frac{r+c-r+c}{r^2-c^2} = \frac{2cQ}{2\pi s r^2} = \frac{\sigma'}{2\pi s r^2}.$$

II. U dubletu $A'B'$ je rychlost $\| PC$ rovna nulle, rychlost $\perp PC$ pak

$$\frac{Q}{2\pi s r}(\sin\alpha + \sin\beta) \quad \alpha = \beta \quad \sin\alpha = \frac{b}{r},$$

tedy rychlost

$$\frac{2bQ}{2\pi s r^2} = \frac{\sigma''}{2\pi s r^2}.$$

Případ obecný řešíme zase, myslíce si v jistých místech lineárné zdroje současně vydatnosti Q i $-Q$. Pro rychlost $\| PC$ jsou to místa C' a C''. Zdroje kombinujeme v dublety AC' a $C''B$, které nezpůsobují rychlost žádaného směru a dublet $C'C''$ v I. Gaussově poloze, který působí rychlost

$$v = \frac{\sigma'}{2\pi s r^2} = \frac{2cQ}{2\pi s r^2} = \frac{2aQ\cos\vartheta}{2\pi s r^2} = \frac{\sigma_1 \cos\vartheta}{2\pi s r^2},$$

neboť

$$2aQ = \delta Q = \sigma_1.$$

Složka kolmá na PC najde se pomocí dubletů AA' a BB', jež jí nemají a zbývajícího $A'B'$ v II. Gaussově poloze, jakožto

$$v' = \frac{\sigma''}{2\pi sr^2} = \frac{2bQ}{2\pi sr^2} = \frac{2aQ \sin\vartheta}{2\pi sr^2} = \frac{\sigma_1 \sin\vartheta}{2\pi sr^2}.$$

Analogie elektrické jsou patrny. Představy sil ubývajících do dálky s prvou mocninou vzdálenosti užívá se v nauce o „logarithmickém potenciálu“, jenž jest důležitou pro theorii funkcí komplexní proměnné.

7.

Kapalina spec. hmoty s teče stejnoměrnou rovnou trubicí a ztrácí následkem vnitřního tření množství E energie na jedničku objemu při proběhnutí jedničky délkové. Jaký musí býti sklon trubice k horizontále, aby tlak kapaliny byl podél celé trubice stálý? *K.*

Řešení, jež podal p. *Zd. Horák* z VIII. r. g. na Král. Vinohradech.

Dle rovnice (25) § 10. Článku, jest výraz

$$q_2 v_2 (p_2 + \tfrac{1}{2} s_2 v_2^2) - q_1 v_1 (q_1 + \tfrac{1}{2} s_1 v_1^2)$$

roven sekundovému zisku energie uvnitř kusu trubice délky l mezi průřezy q_1 a q_2.

Dle podmínek úlohy však mají průřez trubice, spec. hmota kapaliny i její tlak a rychlost býti všude stejné, takže levá strana rovnice (25) je rovna nule. Sloupec kapaliny délky l ztrácí však za vteřinu následkem vnitřního tření množství energie $Eql \cdot v$; tato ztráta musí se hraditi gravitační prací, kteráž, ježto kapalina nezískává na živé síle ($v =$ stálé!) a za sekundu klesla z výše $v \cdot \sin\alpha$, jest dána váhou kapaliny $qlsg$ násobenou klesnutím $v \sin\alpha$. α jest úhel sklonu trubice k horizontále. Odtud rovnice

$$Eqlv = qlsg \cdot v \sin\alpha$$

čili

$$\sin\alpha = \frac{E}{sg}.$$

8.

Paprsek kapaliny dopadá rychlostí v na rovinnou plochu a kapalina roztéká se po dopadu tangenciálně po ploše. Dokažte, že síla, kterou působí paprsek na plochu, je sqv^2, kde q je průřez paprsku, s spec. hmota kapaliny. Má sqv^2 význam tlaku? *K.*

Řešení.

Za každou vteřinu dopadá na rovinnou plochu hmota sqv, která ztrácí složku své rychlosti kolmou k rovině. Síla, kterou působí, jest dle Newtonovy zásady rovna změně hybnosti ve vteřině čili výrazu sqv^2.

Chceme-li uvažovati úplněji, můžeme postupovati takto (p. *Zd. Horák* z VIII. r. g. Vinohrady): Paprsek dopadající kapaliny lze považovati za proudovou trubici, v níž síla působící ve směru pohybu jest dle § 14. Čl. rovna $q(p + sv^2)$. Kapalina, jež paprsek tvoří, pohybuje se pouze ve směru rychlosti v. To je možno jen tehdy, když vnitřní tlak kapaliny jest roven tlaku okolního prostředí, t. j. tlaku atmosférickému P, čili je-li $p = P$.

V místě dopadovém zamezuje dopadající paprsek přístup tlaku atmosférickému, takže v tomto místě jest síla působící na rovinu od paprsku rovna

$$q(P + sv^2) - Pq = sqv^2.$$

Tento výsledek dává *sílu* působící na onu část rovinné plochy, na níž existuje právě ještě nějaká k rovině normální složka z původní rychlosti v, kde tedy ještě není tok po rovině dokonale tangenciální. Jest to *síla*, nikoli *tlak*, kterým vždy rozumíme sílu na jedničku plošnou.

9.

Rychlíkové lokomotivy pro dlouhé tratě mohou plniti své vodní nádrže mezi jízdou pomocí následujícího zařízení. Nádrž jest opatřena vertikální trubicí, která dá se spustiti tak, že zasahá do dlouhého reservoiru vodního umístěného mezi kolejemi. Spodní konec trubice jest ohnut v pravém úhlu, takže horizontálním ramenem se pohybuje proti vodě v reservoiru. Je-li horní konec trubice ve výši h nad hladinou vody v reservoiru a je-li rychlost lokomotivy V, s jakou rychlostí poteče voda do nádrže na lokomotivě, zanedbáme-li vnitřní tření?

Pokyn k řešení: Udělme v myšlenkách lokomotivě i reservoiru společnou rychlost $- V$. *K.*

Řešení, jež zaslal p. *Zd. Horák* z VIII. r. g. na Král. Vinohradech.

Udělíme-li v myšlenkách i lokomotivě i reservoiru společnou rychlost $- V$, bude lokomotiva v klidu, a voda v reservoiru bude vstupovati do trubice rychlostí V. Vstoupí-li do ní m grammů vody, jest její kinetická energie $\frac{1}{2}mV^2$. Toto množství energie kinetické podrží voda bez jakékoli ztráty (ježto vnitřní tření zanedbáváme) až do výstupu do výše okolní hladiny vodní v reservoiru, neboť tam dostoupí dle zákona o spojitých nádobách. Potom pohybuje se pohybem rovnoměrně zpozděným, až ve výši h zbude jí rychlost v, kterou vtéká do nádrže. Dle zákona o zachování energie jest

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 - mgh$$

čili hledaná rychlost

$$v = \sqrt{V^2 - 2gh}.$$

K stejnému výsledku vede nás [Čl. § 10., (25)] vztah $q_2 v_2 (p_2 + \frac{1}{2} s_2 v_2^2) - q_1 v_1 (p_1 + \frac{1}{2} s_1 v_1^2) =$ sekundový zisk energie, dosadíme-li za rychlost při vstupu $v_1 = V$, při výstupu $v_2 = v$, za průřez trubice $q_1 = Q$, při výstupu $q_2 = q$, dále u nestlačitelné kapaliny $s_1 = s_2 = s$ a $VQ = vq$. Tlak p_2 u výstupu jest patrně roven tlaku atmosférickému P, tlak při vstupu v hloubce H pod hladinou reservoiru pak $P + gsH$. Voda zvedla se v trubici o výšku $h + H$, takže nabyla na účet své vlastní energie, energie gravitační velikosti za vteřinu $qvsg(h + H)$. Tento výraz se znamením záporným tvoří tedy pravou stranu rovnice. Z toho krácením jako dříve

$$v^2 = V^2 - 2gh.$$

10.

Jak dlouho bude trvati, než se naplní nádrž objemu 10 hektolitrů na lokomotivě ujíždějící rychlostí 60 *km* za hodinu trubicí průměru 10 *cm*, je-li její horní ústí ve výši 250 *cm* nad hladinou vody v reservoiru a je-li energie zmařená v trubici ve tvar tepla rovna $^1/_3$ práce vykonané při zvedání vody. *K.*

Řešení, jež zaslal p. *K. Karl* ze VII*a* r. na Vinohradech.

Oproti úloze předchozí jest vzíti v počet ztrátu energie při průchodu vody trubicí. Nejsnáze stane se tak, když uvážíme, že dle numerického data rovná se tato ztráta $^1/_3$ práce při zvedání vody, to znamená, že kdyby ztráty energie nebylo, dostala by se ideální kapalina nejen do výše h, nýbrž do výše o třetinu větší t. j. $\frac{4}{3}h$.

Tím je řešení dáno, neboť potřebujeme pouze vypočísti v z daného V dle vzorce

$$v^2 = V^2 - 2g \cdot \tfrac{4}{3}h$$

a děliti daný objem nádrže sekundovým množstvím vody, kteréž se rovná

$$v \cdot q = \tfrac{1}{4} v\pi d^2.$$

Při dosazování numerických hodnot dlužno přesně dbáti, abychom užívali bezvýjimečně jediného systému jedniček, na př. systému absolutního, a psáti dle toho

$$V = 60\ km/sec = \tfrac{10000}{3}\ cm/sec = 1667\ cm/sec.$$
$$g = 980\ cm/sec^2,\ \tfrac{4}{3}h = \tfrac{1000}{3}\ cm,$$

z toho

$$v = 1436\ cm/sec.$$
$$q = \tfrac{1}{4} \cdot 3{\cdot}14 \cdot 100 cm^2$$

objem nádrže $= 10\ hl = 10^7\ cm^3$.

Výsledkem plyne pro dobu plnění $\tau = 8{\cdot}857$ sekund. Reservoir musil by býti dle toho délky nejméně

$$V\tau = 14770\ cm = 147\ m.$$

Seznam řešitelů úloh.

Pánové:

F. Bareš, VII. g. v Praze II., v Resslově ul.,
m. 3, 4, 8, 9, 13, 18, 19.

Josef Bečvář, VII*a* r. v Písku,
m. 1, 4, 5, 11, f. 1, 5, 7.

Karel Böhm, abs. r. v Bučovicích, c. k. praporčík dom. pěš. pl. 25,
m. 1, d. 1, 2, 3, 5.

František Brouček, VII. r. Praze III.,
d. 1—5, f. 1, 2, 5, 7—10.

František Bukovský, VI*a*. g. v Praze III.,
m. 1—5, 7, 8, 13, 17, 18, 19.

Eduard Buriánek, abs. r. v Litovli, jednor. dobrov.,
m. 1—4, 6—8, 10, 13, 19. 20, d. 1, 2, 4.

Antonín Čejka, VI. r. v Telči,
d. 1—3.

J. Faus, VII. r. v Pardubicích, jednor. dobrov.,
m. 1—20, d. 1—5.

Karel Fejt, VI. r. v Praze v Ječné ul.,
m. 2, 3, 6, 9, 10, 13, 15, 19, d. 1—5.

Zdeněk Horák, VIII. r. g. na Král. Vinohradech,
f. 1—10.

Jan Chvátal, VII. r. v Praze III.,
m. 1, 3, 4, 6, 9, 18, 19. d. 1—5.

Josef Janko, VI. g. v Třebíči,
m. 1, 4, 18, d. 1—3.

František Jeřábek, VIII. g. v Kroměříži,
m. 1—4, 6—11, 13, 14, 17—20.

K. Karl, VII*a*. I. r. na Král. Vinohradech,
d. 1—5, f. 1, 2, 5, 7—10.

Jiří Klapka, VII. r. v Kostelci n. Orlicí,
m. 1, 4, 5, 6, 8, 13, 18, 19, 20, d. 1—5.

O. Kolátor, VII. r. v Praze III.,
d. 1—5.

Antonín Konečný, VII. II. r. v Brně,
m. 18, 19, d. 1—4.

Frant. Kotán, II. r. pedagog. v Příbrami,
m. 1—4, 6—13, 15, 16, 18—20.

V. Kulda, VII*a*. r. na Král. Vinohradech,
m, 1—4, 6—8, 10, 13, 15, 18—20.

J. Kynčl, stud. v Telči,
d. 1—5.

Karel Lerl, VII. r. v Lounech,
m. 1, 4, 6, 8—11, 19, 20, d. 1—4.

Emil Martinec, VI. I. g. v Brně,
m. 1, d. 1, 2, 3.

Vladimír Matoušek, VI. r. v Turnově,
d. 2, 3.

Jaroslav Mrkos, VI*b*. g. v Praze III.,
m. 1, 3, 4, 5, 7, 8, 13, 17, 18, 19.

Theodor Müller, VII. r. v Telči,
d. 1—5.

Josef Neumann, stud. v Praze VII.,
d. 1—5.

Josef Plašil, VI*b*. r. na Král. Vinohradech,
m. 1, 2, 4, 6, 8, d. 1—4.

V. Průcha, VII. r. g. v Berouně,
m. 1, 3, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 18, 19, 20.

F. Roch, VI. r. v Uh. Brodě,
d. 1—4.

Jiří Rychlý, VII. r. v Mor. Ostravě,
d. 1—5.

Eugen Říman, abs. g. v Opavě,
m. 1, 4, 6, 7, 13, 18.

Jan Smichous, VII. g. v Praze II. v Resslově ul.,
m. 3, 13, 18, 19.

V. Srba, VIII. g. v Praze II. v Resslově ul.,
m. 2, 3, 4, 8, 9, 13, 18, 19.

Václav Střela, V. r. v Rakovníce,
m. 1, 3—6, 8, 9, 10, 13, 14, 16—20, d. 1—5.

Václav Šifalda, VIII. r. g. v Praze v Křemencově ul.,
m. 1, 3, 4, 6—11, 13—15, 17—20.

Theodor Šmíd, VII. r. ve Velkém Meziříčí,
m. 1, 3, 4, 6, 8, 9, 19, d. 1, 3, 4, 5.

Josef Uřidil, VII. r. v Rakovníce,
d. 1—5.

A. Vokurka, v Plzni,
d. 1—4.

Alois Vrba, stud. z Křince u Nymburka,
d. 1, 2, 4.

Udělení cen.

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem »Jednoty českých mathematiků a fysiků«:

Z mathematiky:

Ceny první:

p. *J. Faus*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích,
p. *Frant. Kotán*, stud. II. r. pedagogia v Příbrami,
p. *Frant. Jeřábek*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži,
p. *Václav Střela*, stud. V. tř, r. v Rakovníce,
p. *Václav Šifalda*, stud. VIII. tř. r. g. v Praze, v Křemencově ul.

Mimo to obdrží p. *J. Faus* a p. *Šifalda* spis: Studnička, Úvod do nauky o determinantech (Sborník, sv. II.).

Ceny druhé:

p. *Frant. Bukovský*, stud. VIIa. tř. g. v Praze III,
p. *Eduard Burianek*, jednor. dobrov.,
p. *V. Kulda*, stud. VIIa. tř. r. na Král. Vinohradech,
p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VIb. tř. g. v Praze III,
p. *V. Průcha*, stud. VII. tř. r. g. v Berouně.

Ceny třetí:

p. *Karel Fejt*, stud. VI. tř. r. v Praze, v Ječné ul.,
p. *Jan Chvátal*, stud. VII. tř. r. v Praze III.,
p. *Jiří Klapka*, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl.,
p. *Karel Lerl*, stud. VII. tř. r. v Lounech,
p. *V. Srba*, stud. VIII. tř. g. v Praze II., v Resslově ul.,
p. *Theodor Šmíd*, stud. VII. tř. r. ve Velkém Meziříčí.

Z deskriptivní geometrie:

p. *J. Faus*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, jednor. dobrov.,
p. *Karel Fejt*, stud. VI. tř. r. v Praze, v Ječné ul.,
p. *Václav Střela*, stud. V. tř. r. v Rakovníce,
p. *Václav Šifalda*, stud. VIII. tř. r. g. v Praze, v Křemencově ul.

Z fysiky:

Cenu (knihy Libického, Strouhala a Šafaříka) obdrží:

p. *Fr. Brouček*, stud. VII. r. v Praze III.
p. *Zd. Horák*, stud. VIII. r. g. na Král. Vinohradech.
p. *K. Karl*, stud. VIIa I. r. na Král. Vinohradech.

Mimo to obdrží p. *Zd. Horák* spis: Koláček, Hydrodynamika.