Václav Hübner
Rozmanitosti mathematické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 383--390

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122168

Pro posouzení konvergence napišme rovnici (a) ve tvaru zakončeném

$$\varphi(\xi) = \frac{n(n+1)}{2}\eta^2;$$

Maclaurinovský rozvoj funkce ξ dle mocnin η konverguje až k nejbližšímu singulárnímu bodu η_0, ξ_0, pro nějž vymizí derivace $\varphi'(\xi_0)$, tedy

$$(1+\xi_0)^{n+1} = 1;$$

nejbližší bod η_0 podává nejmenší (absolutně) $\varphi(\xi_0)$,

$$\xi_0 = e^{\pm\frac{2\alpha\pi i}{n+1}} - 1 = \pm e^{\pm\frac{\alpha\pi i}{n+1}} 2i \sin\frac{\alpha\pi}{n+1},$$

$\varphi(\xi_0) = (n+1)\xi_0$ má modul $2(n+1)\sin\frac{\alpha\pi}{n+1}$, který je nejmenší při $\alpha = 1$; tedy

$$|\eta_0|^2 = \frac{2}{n(n+1)} \; |\varphi(\xi_0)| = \frac{4}{n}\sin\frac{\pi}{n+1};$$

řada naše konverguje asi tak rychle jako řada geometrická s poměrem

$$\left|\frac{\eta}{\eta_0}\right|^2 = \frac{C}{2(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}} \sim \frac{C}{2\pi}.$$

V uvedeném číselném příkladě má toto číslo hodnotu 0·04 . . .

Rozmanitosti mathematické.

Podává studujícím školní rada **Václav Hübner** na Král. Vinohradech.

(Dokončení.)

Geometrické místo pat kolmic spuštěných s vrcholu paraboly na její tečny, jest křivka třetího stupně kissoida Dioklova.

Píšeme-li místo $p = 4r$, nabude rovnice kisoidy tvaru

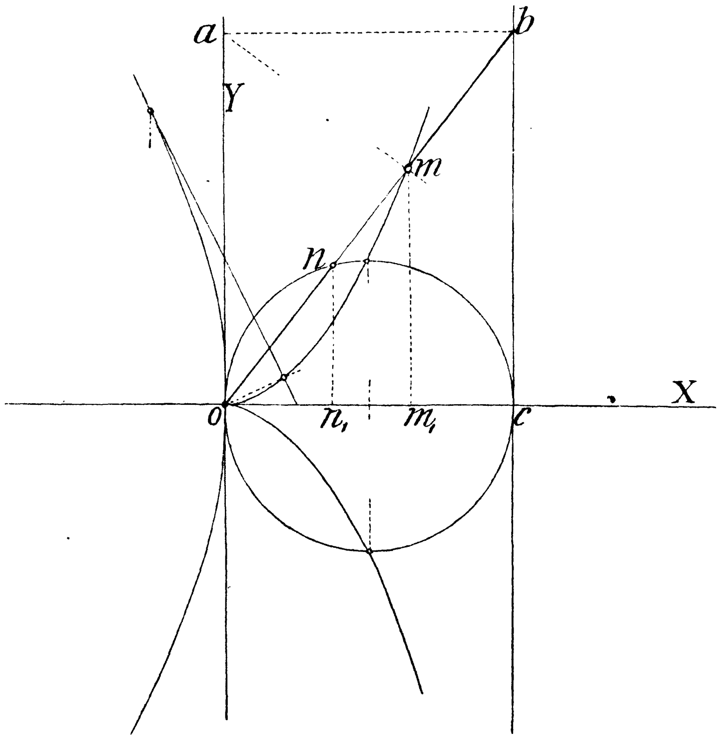
$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

která jest souměrná dle osy X.

Opišme poloměrem r kružnici, která prochází vrcholem paraboly a má střed na kladné ose X; její rovnice zní

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0;$$

libovolná přímka $y = Ax$ vedená počátkem (vrcholem paraboly)



Obr. 4.

protne kružnici v bodě n a kissoidu v bodě m. Úsečka bodu n dána rovnicí

$$x^2(1 + A^2) - 2rx = 0,$$

z čehož

$$x_1 = 0,\ x_2 = \overline{on_1} = \frac{2r}{1 + A^2},$$

a úsečka bodu m stanovena jest rovnicí

$$A^2x^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

z čehož $x_{12} = 0$,

$$x_3 = \overline{om_1} = \frac{2rA^2}{1 + A^2}.$$

Z obrazce zjevno, že $\overline{m_1 c} = 2r - \overline{om_1}$,
čili

$$\overline{m_1 c} = 2r - \frac{2rA^2}{1 + A^2} = \frac{2r}{1 + A^2} = \overline{on_1}$$

a proto též $\overline{on} = \overline{mb}$; tím dán jednoduchý prostředek k sestrojení kissoidy.

Vyšetříme-li směrnici tečny v lib. bodě, obdržíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2}{2y(2r - x)} = \frac{(3r - x)\sqrt{x}}{(2r - x)\sqrt{2r - x}}.$$

Je-li: 1. $x = 0$, jest $y_1 = 0, y_2 = 0$ (bod 0 jest bodem dvojným), směrnice tečny $\frac{dy}{dx}$ v tomto bodě jest $= 0$ a rovnice její jest $y = ox = 0$, t. j. osa x jest tečnou v bodě o (bod úvratu).

2. Pro $x = 2r$ jest $y = \pm \infty$ a směrnice tečny v tomto bodě jest $\frac{dy}{dx} = \infty$, t. j. kolmice v bodě c na osu X vztyčená jest asymptotou kissoidy.

3. Aby y bylo reálné, musí $2r - x > 0$, t. j. $x < 2r$.

4. Pro $x = r$ jest $y = \pm r$ a směrnice tečny

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{4r^2}{2r^2} = \pm 2.$$

5. Řešíme-li rovnici kissoidy s rovnicí přímky $2y + x = 2r$, obdržíme $2y^3 = x^3$ a $x = y\sqrt[3]{2}$. Křivku tuto sestrojil prý řecký geometr Diokles k řešení úlohy délské.

6. Je-li poloměr $r = 0$, přijde rovnice kissoidy ve tvar $y^2 = \frac{x^3}{-x}$, čili $-y^2x - x^3 = 0$, t. j. $-x(y^2 + x^2) = 0$; rovnice představuje tři přímky: $x = 0$, $y = +ix$, $y = -ix$ (degenerovaná kissoida).

V obdélníku $ocba$ budiž strana $\overline{oc} = 2r$ pevná, strana $\overline{oa}$ proměnlivá; spustíme-li s vrcholu a na úhlopříčku $\overline{ob}$ kolmici am, jest bod m na kissoidě.

Rovnice úhlopříčky $\overline{ob}$ jest $y = \frac{m}{2r} x \quad (\overline{cb} = m)$.

„ kolmice $\overline{am}$ » $y - m = - \frac{2r}{m} x$;

ježto $m = \frac{2ry}{x}$, jest $y - \frac{2ry}{x} = - \frac{2rx^2}{2ry}$ čili

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

V kružnici sestrojme dva průměry $ab \perp cd$ a nanesme od bodu a dva rovné oblouky arc ae = arc af, spojme pak bod c s bodem f (bod f na obl. ad), bodem e (na obl. ac) veďme rovnoběžku k ab, i jest průsečík spojnice cf s rovnoběžkou vedenou bodem e bodem kissoidy. (Příslušný obrazec domyslí si čtenář sám.)

Počátek zvolme ve středu kružnice; body e a f mají souřadnice $(\zeta, -\eta)$, (ξ, η), pro něž platí rovnice

$$\zeta^2 + \eta^2 = r^2 \ldots \tag{1}$$

a bod $c(0, -r)$.

Rovnice přímky $\overline{cf}$ jest $y + r = \frac{r + \eta}{\zeta} x \ldots$ (2)

„ rovnoběžky, procházející bodem $e \ldots y = -\eta \ldots$ (3)

Dosadíme za $\eta = -y$ do rov. (2), obdržíme

$$\xi = \frac{r - y}{r + y} x,$$

tudíž

$$y^2 + \frac{(r - y)^2}{(r + y)^2} x^2 = r^2,$$

čili

$$y^2 (r + y)^2 + x^2 (r - y)^2 = r^2 (r + y)^2,$$

anebo

$$x^2 (r - y)^2 = (r + y)^2 (r^2 - y^2),$$

z čehož

$$x^2 = \frac{(r + y)^3}{r - y}.$$

Posuneme-li osu x rovnoběžně do bodu c, pak místo y jest psáti $y - r$, čímž rovnice poslední nabude tvaru

$$x^2 = \frac{y^3}{2r - y}$$

a vyměníme-li osy souřadnic, pak jest

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

V.

Obdobnou cestou jako při parabole odvodíme geometrické místo pat kolmic, spuštěných ze středu hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ na tečny její.

Rovnice hledaného místa geometrického jest

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 + b^2y^2 = 0$$

a pro $a = b$ (hyperbolu rovnoosou)

$$(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0,$$

rovnice lemniskaty (tvar její jest ležící osmička: ∞).

Vytkneme-li na ose x dva body $o_1(c, o)$, $o_2(-c, o)$ tak, aby $c = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ a na lemniskatě bod $m(x, y)$ jest,

$$\overline{mo_1} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad \overline{mo_2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

a součin

$$\overline{mo_1} \,.\, \overline{mo_2} = \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)\,(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)}$$
$$= \sqrt{(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) + c^4}.$$

Ježto $c^2 = \frac{1}{2}a^2$ a $(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0$ (bod m jest na lemniskatě), jest $\overline{mo_1} \,.\, \overline{mo_2} = c^2 = \frac{1}{2}a^2$, t. j. v trojúhelníku mo_1o_2 jest součin stran $\overline{mo_1}$, $\overline{mo_2}$ veličinou konstantní.

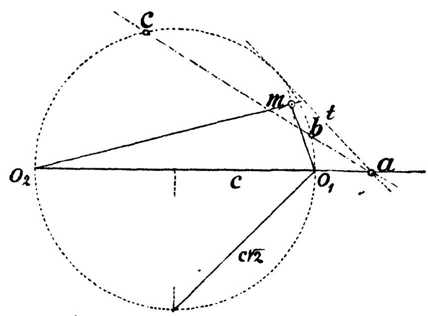
Podmínku tu lze též psáti: $\overline{mo_1} : c = c : \overline{mo_2}$.

Vyšetříme-li z rovnice

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(c^2-x^2-y^2)}{y(c^2+x^2+y^2)},$$

jest $\frac{dy}{dx}=0$, je-li $x^2+y^2=c^2$. Opíšeme-li kružnici ze středu o poloměrem $c=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, protíná tato lemniskatu ve 4 bodech (vrcholech, vzhledem k ose x) a souřadnice jich obdržíme z rovnic $x^2+y^2=c^2$, $x^2-y^2=\frac{1}{2}c^2$. (Průsečíky kružnice a hyperboly rovnoosé o poloosách $\frac{1}{2}c\sqrt{2}$); i jest $x=\pm\frac{1}{2}c\sqrt{3}$, $y=\pm\frac{1}{2}c$. Maximální plocha $\triangle\, mo_1o_2$ při výšce $\frac{1}{2}c$ jest $\frac{1}{2}c^2$ ($\triangle\, mo_1o_2$ jest pravoúhlý).



Obr. 5.

Aby tečna lemniskaty svírala s osou x úhel 45^0, 135^0, musí $\frac{dy}{dx}=\pm 1$, čili

$$x(c^2-x^2-y^2)=\pm\, y(c^2+x^2+y^2);$$

této podmínce se vyhoví, když $x=0$, t. j. tečny v bodě o (uzel křivky) půlí úhly os X, Y.

Vyznačme si dva pevné body o_1, o_2 ($\overline{o_1o_2}=2c$) a sestrojme nad průměrem $\overline{o_1o_2}$ kružnici (obr. 5.); od středu úsečky $\overline{o_1o_2}$ ve vzdálenosti $c\sqrt{2}$ vytkneme bod a. Na každém paprsku, jenž prochází bodem a a uvedenou kružnici protíná v bodech b, c, vymezí tato dva úseky (od a měřené) $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, jež vyhovují podmínce $\overline{ab}\,.\,\overline{ac}=t^2$ (mocnost bodu ke kružnici, t délka tečny, jdoucí bodem a ke kružnici).

Ježto $t^2 = (c\sqrt{2})^2 - c^2 = c^2$, jest $\overline{ab} \,.\, \overline{ac} = c^2$ a tudíž $\overline{mo_1} = \overline{ab}$, $\overline{mo_2} = \overline{ac}$; $\triangle\ mo_1o_2$ lze snadno sestrojiti ze tří stran (základna $\overline{o_1o_2} = 2c$ jest konstantní). Touto jednoduchou konstrukcí obdržíme vždy čtyři souměrně sdružené body lemniskaty.

Vedeme-li kterýmkoliv bodem (v odst. IV. vrcholem paraboly, v odst. V. středem hyperboly) na veškeré tečny křivky kolmice, vytvoří průměty toho bodu na tyto tečny průmětnici této křivky; bod, z něhož kolmice jsou vedeny, jest pólem jejím.

VI.

Budiž $a, a^2, a^3, \ldots a^y$ řada geometrická pak $la, 2la, 3la, \ldots yla$, jest řada arithmetická se stálým rozdílem la (užito přirozených či Napierových logarithmů, které mají za základ číslo irracionální $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n = \infty$, $e = 2{\cdot}71828 \ldots$).

Jsou-li členy této řady arithmetické logarithmy úseček bodů nějaké křivky, možno psáti

$$lx = yla, \quad \text{čili} \quad y = mlx, \ \left(m = \frac{1}{la}\right) -$$

rovnice křivky logarithmické (logistiky).

Ježto logarithmy čísel záporných nemají pro kladný základ reálného logarithmu, jest křivka ta obsažena jen v I. a IV. čtvrti.

Pro $x = 0$ jest $y = -\infty$ a pro $x = \infty$, jest $y = \infty$. Směrnice tečny v libovolném bodě křivky stanovena jest poměrem $\frac{dy}{dx}$. Dle základního výměru jest

$$\frac{dy}{dx} = m \lim \frac{l(x + \Delta x) - lx}{\Delta x} = m \lim \frac{l\,\frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= m \lim l \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}};$$

položíme-li

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha,$$

jest poslední rovnice

$$\frac{dy}{dx} = m \lim l (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{x}};$$

poněvadž pak pro lim $\Delta x = 0$ jest i lim $\alpha = 0$, bude

$$\frac{dy}{dx} = mle^{\frac{1}{x}} = \frac{m}{x}.$$

Je-li $x = 0$, jest $\frac{dy}{dx} = \infty$, t. j. osa y jest asymptotou křivky a při $x = \infty$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$ a tečna v bodě (∞, ∞) (asymptota) jest || s osou x.

Pro $x = m$ jest $\frac{dy}{dx} = 1$.

Je-li rovnice křivky $K \equiv x = ly$, nebo též $y = e^x$, pak jest rovnice křivky K' souměrné ku K dle osy $Y \ldots y = e^{-x}$. Vyznačíme-li na křivkách K, K' body m, m' tak, aby $x_m = x_{m'} = x$, jest $y_m = e^x$ a $y_{m'} = e^{-x}$. Bod uprostřed bodů m, m' ležící má

$$y = \frac{y_m + y_{m'}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Geometrické místo všech bodů, které jsou uprostřed bodů m, m', jest křivka transcedentní, jež slůje řetězovka.

Roentgenologická stanice.

Dr. Viktor Teissler.

(Dokončení.)

V následujícím okamžiku stýká se hrot opět s kapalinou, proud jest spojen, jeho intensita rychle stoupá k maximální hodnotě. Pak opět následuje přerušení.

Podobného účinku se dosáhne také levnějším zařízením (Simon, Swinton): Místo platinové anody jest do zředěné kyseliny sírové vnořena skleněná zkumavka po straně opatřená malým otvorem a. Obr. 7. Do zkumavky sahá olověná tyčinka. V malém otvoru se přerušuje proud.

Elektrolytické přerušovače se spojují bez kondensátoru.