Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 3, 233--238

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122251

Tyto rovnice jsou symetrické, mají tudíž tvar

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

a proto lze z něho ihned přímo ustanoviti vzorec *Cardanův*

$$y = u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}.$$

Úlohy.

Řešení úlohy 3.

(Zaslal p. *V. J. Hübner* v Rakovníku.)

Značí-li s délku oblouku, t délku příslušné tětivy, r poloměr a α úhel středový náležející onomu oblouku, máme

$$t = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Úhel α měřen absolutní mírou dán jest podílem $\frac{s}{r}$, pročež $\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$ a tedy rozvedeme-li sinus v řadu

$$t = 2r\left(\frac{s}{2r} - \frac{1}{2\,.\,3}\frac{s^3}{8r^3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\frac{s^5}{2^5r^5}\cdots\right).$$

Rozdíl mezi obloukem a tětivou

$$s - t = 2r\left(\frac{1}{2\,.\,3}\frac{s^3}{8r^3} - \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\frac{s^5}{2^5 4^5} + \ldots\right).$$

Patrně při $s < r$

$$s - t < \frac{1}{2\,.\,3}\, 2r\, \frac{s^3}{8r^3},$$

tedy stačí předpokládati

$$\frac{1}{24}\frac{s^3}{r^2} < 0{\cdot}001^m,$$

t. j. poněvadž s má býti 10^m,

$$r > \sqrt{41666{\cdot}6\ldots} = 204{\cdot}1^m\ldots$$

Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *M. Grohsmann*, ze VII. real. tř. v Litomyšli.)

Dráha opsaná v první minutě obnáší $\frac{g}{2} \cdot 60^2$;

" " " druhé " " $\frac{3g}{2} \cdot 60^2$;

rozdíl obou $g \cdot 60^2$, čili okrouhle $9^m \cdot 8 \times 60^2 = 35280^m$ jest hledané urychlení v jedné minutě.

Tuto úlohu řešili ještě pp.: *K. Minářík*, suppl. prof. na c. k. střední škole v Přerově; *Od. Kodym*, z VIII. třídy real. gymn. v Praze na Malé Straně; *J. Č.* „VII. reálná v Táboře."

Řešení úlohy 6.

(Zaslal p. *K. Minářík*, suppl. prof. na c. k. střední škole v Přerově.)

Zmařená živá síla čili získaná práce obnáší

$$\frac{pp'}{2g\,(p+p')}\,(v \mp v')^2,$$

kdež platí záporné znamení v případě hmot v stejném směru, kladné v případě hmot proti sobě se pohybujících. Zvýšení teploty obnáší

$$\frac{pp'\,(v \mp v')^2}{2Ag\,(p+p')\,(pc+p'c')}.$$

Řešení zaslal též pan *M. Grohsmann*, ze VII. real. třídy v Litomyšli.

Řešení úlohy 7.

(Zaslal p. *K Minářík*, v Přerově.)

Vzdálenosti hledaných míst od středu země jsou kořeny rovnic

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{81\,(1-x)^2}, \text{ tudíž } x_1 = \frac{9}{10},\ x_2 = \frac{9}{8},$$

volíme-li za jednotku vzdálenost středu země a měsíce.

Řešení zaslali ještě pp.: *M. Grohsmann*, VII. reálné třídy v Litomyšli, *J. Č.*, „VII. reálná v Táboře", *Od. Kodym*, VIII. tř. r. g. v Praze na Malé Straně, *J. Papežík* v Hruškách, *Frant. Škvára*, VII*b*. tř. v. r. v Praze, *A. Cerman*, VIII. tř. gymn. v Mladé Boleslavi.

Řešení úlohy 8.

Nazveme M hmotu, R poloměr země, m hmotu a r poloměr měsíce, a vzdálenost středů obou hmot, s vzdálenost neutralného bodu (rozhraní přítažlivosti země a měsíce) od středu měsíce, ε přítažlivou sílu jednotek hmot v jednotce vzdálenosti. v hledanou rychlost. Pak jest

$\frac{\varepsilon m}{r} + \frac{\varepsilon M}{a - r}$ potencialný úkon obou hmot na povrchu měsíce;

$\frac{\varepsilon m}{s} + \frac{\varepsilon M}{a - s}$ „ „ „ „ v neutralném bodu.

Rozdíl obou jest práce, vykonaná živou silou jednotky hmoty, pohybující se z povrchu měsíce do neutrálného bodu; máme tudíž rovnici, určující v:

$$\frac{v^2}{2} = \varepsilon\left(\frac{m}{r} + \frac{M}{a - r} - \frac{m}{s} - \frac{M}{a - s}\right).$$

Pomocí rovnice, platící pro povrch země

$$\frac{\varepsilon M}{R^2} = g,$$

určíme konstantu ε. Volíme-li $M = 1$, $R = 1$, máme:

$$m = \tfrac{1}{81}, \quad r = \tfrac{3}{11}, \quad s = 6, \quad a = 60, \quad \varepsilon = g = 154 \, . \, 10^{-8},$$

(jednotka délky jest poloměr země, musíme tudíž urychlení g vyjádřené v metrech děliti poloměrem země též v metrech vyjádřeným). Obdržíme tudíž

$v = 0{\cdot}0003572$ ve zvolené jednotce, čili
$v = 2274$ metrů.

Kdybychom nevzali ohled na přítažlivost země, byla by rychlost $v = 2322$ metrů.

Přibližné řešení (bez ohledu na ubývání urychlení s rostoucí vzdálenosti od měsíce) podali pp.: *K. Minářík* v Přerově, *F. Hájek*, VII. tř. g. v Budějovicích, *J. Č.* „VII. reálná v Táboře,“ *Od. Kodym*, VIII. tř. r. g. v Praze na Malé Straně, *F. Škvára* VII*b*. tř. č. v. r. v Praze.

Úlohy.

11.

Přímý kužel s kruhovou podstavou, jejíž obvod se rovná 7^m, jest u výšce 10^m seříznut rovinou, vedenou rovnoběžně k podstavě. Jest-li strana kužele se svým pravoúhlým průmětem na podstavu uzavírá úhel $63^0\ 26'$; jak velký jest krychlový obsah tohoto kužele? (Prof. *H.*)

12.

V rovinné čáře zvolme dva body A a B; v bodu A sestrojme normálu a protněme ji v bodu C přímkou BC kolmou k tětivě AB. Blíží-li se bod B bodu A, jaké mezi se blíží průsečík C?

Buďte dále A a B dva body na čáře prostorové a buď C průsečík hlavní normály bodu A s rovinou vedenou bodem B kolmo ku tětivě AB, kde jest limita bodu C pro případ, že B se blíží bodu A?

Buď dána libovolná plocha a na ní body A a B. Nechť opět C značí průsečík normály v bodu A s rovinou vedenou bodem B kolmo ku AB. Blíží-li se B opět bodu A, v jakých mezích jest limita průsečíku C? (*W.*)

13.

V pravoúhlé soustavě souřadné dány čtyry roviny rovnicemi normalnými

$$A_k \equiv x \cos \alpha_k + y \cos \beta_k + z \cos \gamma_k - p_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Jou-li v_k výšky čtyrstěnu těmito rovinami uzavřeného, platí relace

$$\Sigma \frac{\cos \alpha_k}{v_k} = 0, \quad \Sigma \frac{\cos \beta_k}{v_k} = 0, \quad \Sigma \frac{\cos \gamma_k}{v_k} = 0;$$

zde v_k pojímáme algebraicky co kolmici na rovinu A_k spuštěnou. Důkaz? (*W.*)

14.

Trisekce úhlu pomocí stálé hyperboly.

Dán jest úhel $(AB) = \alpha$. Na rameno jeho A přenesme v kladném směru od vrcholu v libovolnou délku $\overline{va}$, v záporném směru pak $\overline{vb} = -2 . \overline{va}$. Nad délkou $\overline{ab}$ jakožto osou realnou sestrojme hyperbolu H, jejíž asymptoty tvoří s A úhly $\pm 60^0$; poloměrem $\overline{ab}$ ze středu b opišme kružnici K, která seče rameno B v bodech c, d, těmito pak a bodem b stanovme kružnici L, která hyperbolu H v dalších bodech e, f, g proniká. I tvoří potom paprsky $\overline{be}$, $\overline{bf}$, $\overline{bg}$ s kladným směrem A úhly $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\pi + \alpha}{3}$, $\frac{2\pi + \alpha}{3}$. Důkaz? *(A. Strnad.)*

15.

Hmota upevněná na konci vlákna, jehož druhý konec jest nehybný, pohybuje se v rovině vodorovné, opisujíc kružnici; jakou rychlost musí míti, aby se napnutí vlákna rovnalo napnutí jeho při svislém zavěšení téže hmoty? (Laplace.)

16.

V rozích tuhého (pevného) trojúhelníku působí tři rovnoběžné síly, úměrné protilehlým stranám. Má se určiti střed těchto sil.

17.

V rozích čtyrstěnu jsou umístěny hmoty, úměrné protilehlým hmotám; má se vyhledati jejich střed.

18.

Čtyři mužové nesou desku trojhrannou, všude stejně tlustou, z látky stejnorodé. Dva ji vezmou za dva rohy trojhranu; v kterých bodech obvodu musí ji vzíti druzí dva, aby bylo břímě stejným spůsobem mezi ně rozděleno.

19.

Má se řešiti podobná úloha, je-li třem nosičům uloženo nésti desku, mající tvar rovnoběžníku, a vezme-li ji jeden nosič za roh a ostatní dva po stranách.

20.

Na stole leží hra karet. Hořejší karta pošine se ve směru délky tak daleko, jak jest to možné, aniž by spadla. Na to pošine se druhá (pod první ležící) karta, aniž by se poloha karty první vzhledem k ní změnila, opět až potud, pokud se může udržeti na hře. Podobně učiní se s kartou třetí, čtvrtou atd. V jakých polohách následují po sobě jednotlivé karty?

21.

Neroztažitelné vlákno ACB dané délky jest upevněno v pevných bodech A a B a provleknuto malým volným kroužkem C o váze p. V bodu B jest jedním koncem upevněno druhé vlákno provleknuté tímtéž kroužkem, na jehož druhém konci visí závaží P. V jaké poloze (čili pro jaký tvar trojúhelníku ABC) jest soustava ta v rovnováze?

(Připomenutí. Úlohy 15—21. jsou vyňaty z výtečné sbírky: *Jullien*. Problémes de Mécanique rationnelle.)

22.

V Laplaceově „Mécanique céleste" čteme (na str. 118. svazku prvního): Dráha, kterou těleso následkem tíže za jednu sekundu opisuje, obnáší $3,^{m}65548$. — Nyní udává se dráha, kterou těžké hmoty za jednu sekundu opisují, asi na $4,^{m}9$. Z toho musíme souditi (poněvadž jest metr od Laplacea užívaný identický s naším metrem), že jednotka času, kterou Laplace nazývá sekundou, se od naší vteřiny různí. Jaký jest poměr obou těchto jednotek, a jaký poměr Laplaceovy sekundy k délce jednoho dne? Kdo by chtěl výpočet s větší přesností vésti, pro toho budiž připomenuto, že platí číslo shora Laplacem udané pro zeměpisnou šířku, jejíž sinus jest $\frac{1}{\sqrt{3}}$, a že jest dle novějších měření urychlení volného pádu v zeměpisné šířce φ:

$$g = 9,^{m}8309\,(1 - \tfrac{1}{191}\cos^2\varphi).$$

(*A. S.*)