Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 5, 613--664,665--676

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122266

A z toho opět:

b) Na chordále dvojice $(O_1 O_2)$ leží *střed podobnosti* kružnic K_I a K_{II} (obr. 3a. a 3b.), *kterých* se *dvojice* $(O_1 O_2)$ *stejným* [1]) způsobem dotýká.

---

1. Pokládáme-li v *a)* dvojici $(K_I K_{II})$ za *hledanou*, můžeme (ku *pevné* kružnici O_1 přiberouce O_2 ve *dvou* rozličných polohách) vysloviti větu A:

Chordálný střed tří daných kružnic [3]) *je středem podobnosti hledané dvojice.*

2. Pokládáme-li však v *b)* dvojici $(O_1 O_2)$ za *hledanou*, můžeme (přiberouce K_{III}, jížto $(O_1 O_2)$ *stejným* [1]) způsobem jako *kružnic* K_I a K_{II} [4]) se dotýká,) vysloviti větu B:

Tři středy podobnosti daných kružnic [3]) *leží na chordále hledané dvojice.*

3. Z téhož *jednotného pramene* můžeme čerpati i známou větu, na níž založeno *I. sestrojení* obecné Apolloniovy úlohy:

Sjednotíme-li v *a) pohyblivou* kružnici s *pevnou*, splyne *spojnice dotyčných bodů* $T_i' T_i''$ (obr. 4.) s *chordálou sjednocených kružnic*, a jako *taková* prochází nutně *bodem* P.

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti jest rovnici

$$cos\, 3x\, cos^3\, x + sin\, 3x\, sin^3\, x = a \qquad R.$$

Řešení 1. Zaslal pan *Lad. Staněk*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

---

[3]) (v úloze Apolloniově).

[4]) *Dotýká-li se* $(O_I O_{II})$ kružnic K_I, K_{II} $\left\{\begin{matrix}\textit{obou nesouhlasně}\\ \textit{obou souhlasně}\end{matrix}\right\}$, musí se *též* kružnice K_{III} *dotýkati* $\left\{\begin{matrix}\textit{nesouhlasně}\\ \textit{souhlasně}\end{matrix}\right\}$. Tím vysvítá, proč mají oba členy *hledaných* dvojic *stejnolehlé udavatele* buď *vesměs různé* neb *vesměs stejné*. Viz str. 374., kde ovšem v tomto případě místo K sluší položiti O.

Dosaďme do dané rovnice

$$cos\ 3x = cos^3\ x - 3\ sin^2\ x\ cos\ x$$
$$sin\ 3x = 3\ sin\ x\ cos^2\ x - sin^3\ x.$$

I obdržíme

$$cos^6\ x - 3\ cos^4\ x\ sin^2\ x + 3\ sin^4\ x\ cos^2\ x - sin^6\ x = a,$$

neboli

$$(cos^2\ x - sin^2\ x)^3 = a$$

a tudíž

$$cos\ 2x = \sqrt[3]{a}.$$

Aby úloha byla řešitelná (reálnými úhly při reálném a), musí býti $| a | < 1$.

Řešení 2. Zaslali pánové *Theodor Mastný*, stud. VII. tř., *Stanislav Šolta* a *Karel Teige*, stud. VIII. tř. g. v Praze II., v Žitné ul.

Užijme vztahů

$$4\ cos^3\ x = cos\ 3x + 3\ cos\ x$$
$$4\ sin^3\ x = -\ sin\ 3x + 3\ sin\ x.$$

I nabude daná rovnice tvaru

$$cos^2\ 3x - sin^2\ 3x + 3\ (cos\ 3x\ cos\ x + sin\ 3x\ sin\ x) = 4a,$$

neboli

$$cos\ 6x + 3\ cos\ 2x = 4a.$$

Na základě prvního vztahu jest

$$cos\ 6x + 3\ cos\ 2x = 4\ cos^3\ 2n$$

a tudíž

$$cos^3\ 2x = a$$
$$cos\ 2x = \sqrt[3]{a}.$$

2.

Řešiti jest rovnici

$$cos\ 5x\ cos^5\ x + sin\ 5x\ sin^5\ x = a$$

R.

Řešení 1. Zaslal pan *Ludvík Krajný*, stud. VII. tř. r. v Příboře.

Klademe-li do dané rovnice

$$cos\,5x = cos^5\,x - 10\,cos^3\,x\,sin^2\,x + 5\,cos\,x\,sin^4\,x$$
$$sin\,5x = sin^5\,x - 10\,cos^2\,x\,sin^3\,x + 5\,cos^4\,x\,sin\,x,$$

obdržíme

$$cos^{10}\,x + sin^{10}\,x - 10\,sin^2\,x\,cos^2\,x\,(cos^6\,x + sin^6\,x) + 5\,cos^4\,x\,sin^4\,x\,(cos^2\,x + sin^2\,x) = a.$$

Uvážíme-li, že

$$cos^2\,x + sin^2\,x = 1,$$
$$cos^6\,x + sin^6\,x = 1 - 3\,cos^2\,x\,sin^2\,x,$$
$$cos^{10}\,x + sin^{10}\,x = 1 - 5\,cos^2\,x\,sin^2\,x\,(cos^6\,x + sin^6\,x) - 10\,cos^4\,x\,sin^4\,x$$
$$= 1 - 5\,cos^2\,x\,sin^2\,x + 5\,cos^4\,x\,sin^4\,x,$$

promění se nám rovnice daná v rovnici

$$40\,sin^4\,cos^4\,x - 15\,sin^2\,x\,cos^2\,x + 1 = a$$

a klademe-li

$$sin\,x\,cos\,x = \tfrac{1}{2}\,sin\,2x,$$

obdržíme

$$10\,sin^4\,2x - 15\,sin^2\,2x - 4\,(a - 1) = 0,$$

odkudž vypočteme

$$sin\,2x = \pm\sqrt{\frac{15 \pm \sqrt{160a + 65}}{20}}.$$

Řešení 2. Zaslali pánové *Theodor Mastný*, stud. VII. tř., *Stanislav Šolta* a *Karel Teige*, stud. VIII. tř. g. v Praze II. v Žitné ul.

Užijeme-li identit

$$16\,cos^5\,x = cos\,5x + 5\,cos\,3x + 10\,cos\,x,$$
$$16\,sin^5\,x = sin\,5x - 5\,sin\,3x + 10\,sin\,x,$$

dostaneme z dané rovnice

$$cos^2\,5x + sin^2\,5x + 5\,(cos\,3x\,cos\,5x - sin\,3x\,sin\,5\,x) + 10\,(cos\,5x\,cos\,x + sin\,5\,x\,sin\,x) = 16a,$$

neboli

$$1 + 5\,cos\,8x + 10\,cos\,4x = 16a.$$

Klaďme

$$\cos 8x = 2 \cos^2 4x - 1.$$

I obdržíme po krácení dvěma rovnici

$$5 \cos^2 4x + 5 \cos 4x - 8a - 2 = 0,$$

z níž vypočteme

$$\cos 4x = \frac{-5 \pm \sqrt{160a + 65}}{10}.$$

Uvažujme, kdy daná úloha jest řešitelná. Aby odmocnina

$$\sqrt{160a + 65}$$

byla reálná, musí býti

$$160a + 65 > 0 \text{ neboli } a > -\tfrac{13}{32}.$$

Dále musí býti výraz pro $\cos 4x$ absolutní hodnotou menší než 1. I dostáváme, volíme-li při odmocnině znamení kladné, podmínku

$$\sqrt{160a + 65} < 15, \text{ neboli } a < 1$$

a při znamení záporném podmínku

$$\sqrt{160a + 65} < 5, \text{ neboli } a < -\tfrac{1}{4}.$$

Jest zajímavým úkolem provésti diskussi křivky

$$y = \cos 5x \cos^5 x + \sin 5x \sin^5 x$$

(stoupání, klesání, maxima, minima, grafické znázornění).

3.

Vyhledejte kosoúhlé trojúhelníky o racionálných stranách, je-li jeden úhel jejich 120° *neb* 60°. *Jak souvisí spolu poměrná čísla stran v obou těchto případech?*

Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení. Zaslal p. *Mojmír Horák*, stud. VII. třídy g. v Kroměříži.

Jsou-li strany trojúhelníku daného a, b, c, jest dle věty kosinusové při $\gamma = 120^0$

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - ab,$$

tedy

$$(a + b)^2 - c^2 = ab$$

$$(a + b + c)(a + b - c) = ab.$$

Rovnice tato bude splněna, klademe-li

$$a + b + c = \frac{m}{n} a$$

$$a + b - c = \frac{n}{m} b,$$

z čehož sečtením

$$2(a + b) = \frac{1}{mn}(m^2 a + n^2 b).$$

Z rovnice této možno vypočísti poměr

$$a : b = n(2m - n) : m(m - 2n).$$

Klademe-li tedy ve vzorcích

$$\begin{aligned} a &= n(2m - n) \\ b &= m(m - 2n) \\ c &= m^2 + n^2 - mn \end{aligned}$$

za m, n racionálná čísla, obdržíme trojúhelníky o úhlu $\gamma = 120^0$ s racionálnými stranami. Klademe-li za m, n čísla celá, budou strany trojúhelníku vyjádřeny čísly celými.

Při $\gamma = 60^0$ bude

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a - b)^2 + ab.$$

Odtud

$$(c + a - b)(c - a + b) = ab.$$

Položme obdobně jako dříve

$$c + a - b = \frac{m}{n} b$$

$$c - a + b = \frac{n}{m} a,$$

načež vychází

$$\begin{aligned} a &= m(2n + m) \\ b &= n(n + 2m) \\ c &= m^2 + n^2 + mn. \end{aligned}$$

Souvislost stran trojúhelníku o úhlu $\gamma = 120^0$ a o úhlu $\gamma = 60^0$ jest velmi jednoduchá. Jsou-li strany trojúhelníku o úhlu $\gamma = 120^0$ a, b, c, zobrazme nad stranou a neb b trojúhelník rovnostranný, jehož nový vrchol budiž C' — i jest pak v trojúhelníku ABC' úhel γ' (při C') $= 60^0$, a strany $AB = c$, $AC' = a + b$, $BC' = a$ resp. $BC' = a + b$, $AC' = b$.

4.

Krychli o hraně a protnouti rovinou v pravidelném šestiúhelníku, jenž jest kolmým řezem přímé plochy hranolové, a vypočísti obsah tělesa společného oběma útvarům.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal pan *Jaroslav Janko*, stud. VII. tř. g. v Třebíči.

Označme vrcholy dané krychle $ABCDA'B'C'D'$. Rovina protne krychli v pravidelném šestiúhelníku 123456, vedeme-li řez kolmo na úhlopříčku na př. $A'C$ středem krychle. Vrcholy šestiúhelníku 1, 2, 3, 4, 5, 6 půlí pak resp. hrany krychle AB, BB', $B'C'$, $C'D'$, $D'D$, DA. Sestrojíme-li přímou plochu hranolovou, jejímž kolmým řezem jest šestiúhelník 123456, vznikne těleso společné onomu hranolu a krychli, odejmeme-li v šesti hranolech krychle A, B, B', C', D', D od ní spolu shodné čtyřstěny pravoúhlé. Uvažujme na př. čtyřstěn při vrcholu B'. Označme R roh jeho na hraně $A'B'$, tak že rohy jeho jsou 2, 3, RB'. Poněvadž jest čtyřstěn ten při B' pravoúhlý, jest jeho objem $T = \frac{1}{6}\overline{B'2}\,.\,\overline{B'3}\,.\,\overline{B'R}$. Při tom jest $B'2 = B'3 = \frac{a}{2}$. Abychom určili $B'R$, veďme rovinu $A'1C4$, která stojí kolmo na rovině šestiúhelníku a jest tudíž rovnoběžná s rovinou $23R$. Tyto dvě rovnoběžné roviny protnou stěnu krychle $ABB'A'$ v přímkách spolu rovnoběžných $1A'$ a $2R$. Z toho plyne, že trojúhelníky $A1A'$ a $B'R2$ jsou si podobny a tudíž $B'R = \frac{a}{4}$. I bude $T = \frac{a^3}{96}$.

Jest tudíž objem tělesa společného oběma útvarům

$$a^3 - 6\frac{a^3}{96} = \frac{15}{16}a^3.$$

5.

Planimetrický důkaz věty, že toliko v rovnoramenném trojúhelníku mají symmetrály dvou úhlů vnitřních rovné délky, jest dosti obtížný. (Viz na př. články p. prof. Ant. Jeřábka *v Časopise r. XIII. a XIV., kdež připojen i seznam příslušné literatury). Podejte důkaz na základě výrazu pro délku σ_a symmetrály úhlu vnitřního α,*

$$\sigma_a^2 = \frac{bc\,s\,(s-a)}{\left(s-\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Dr. *Marian Haas.*

Řešení. Zaslal p. *B. Mendl,* stud. VIII. tř. g. v Praze II., v Žitné ul.

Pišme výraz pro σ_a^2 ve tvaru

$$\sigma_a^2 = \frac{4bc\,s\,(s-a)}{(b+c)^2}.$$

Podobně bude

$$\sigma_b^2 = \frac{4ac\,s\,(s-b)}{(a+c)^2}.$$

Rovnost symmetrál $\sigma_a = \sigma_b$ vede k rovnici

$$\frac{b\,(s-a)}{(b+c)^2} = \frac{a\,(s-b)}{(a+c)^2},$$

z níž plyne postupně

$$\frac{s-a}{s-b} = \frac{a\,(b+c)^2}{b\,(a+c)^2}$$

$$\frac{(s-a)-(s-b)}{(s+a)+(s-b)} = \frac{a\,(b+c)^2 - b\,(a+c)^2}{a\,(b+c)^2 - b\,(a+c)^2}$$

$$\frac{b-a}{c} = \frac{(b-a)\,(c^2+ab)}{(a+b)c^2 + 4abc + ab\,(a+b)}$$

$$(b-a)\,(c^3 + (a+b)\,c^2 + 3abc + ab\,(a+b)) = 0.$$

Rovnice tato může býti splněna pouze pro $b = a$, tedy pro trojúhelník rovnoramenný. Druhý činitel nemůže se totiž rovnati nulle, poněvadž se skládá ze samých kladných členů. Tím tvrzení dokázáno.

Poznámka.

Věta vyslovená v této úloze nazývá se větou Lehmusovou, poněvadž ji předložil Lehmus slavnému geometrovi Steinerovi, aby podal její elementárně geometrický důkaz. 9 důkazů věty této podal p. prof. Ant. Jeřábek ve dvou pojednáních (Časopis XIII. p. 133 a XIV. p. 20).

V prvém pojednání jest v poznámce redakce obsažen seznam literatury, jednající o této úloze. K vůli úloze následující uvádím tento důkaz věty Lehmusovy:

Pomocí věty sinusové ustanovíme snadno

$$\sigma_a = \frac{c \sin \beta}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}, \quad \sigma_b = \frac{c \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}.$$

Z rovnice $\sigma_a = \sigma_b$ plyne pak

$$\sin \alpha \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \beta \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

a odtud

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}.$$

Užijeme-li vzorce

$$\cos (A + B) \cos (A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B,$$

bude

$$\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) = \cos \frac{\beta}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2}\right)\left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) = 0.$$

Aby rovnice tato byla splněna, musí býti

$$\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} = 0,$$

odkudž plyne $\alpha = \beta$, tak že hledaný trojúhelník musí býti rovnoramenný. Druhý činitel nemůže se rovnati nulle, poněvadž oba členy jsou kladné.

6.

Zdali platí věta, že toliko v trojúhelníku rovnoramenném mají symmetrály dvou úhlů vnějších rovné délky?

R.

Řešení. Zaslal p. *Lad. Staněk,* stud. VII. tř. r. v Litovli.

Symmetrály vnějšího úhlu dány jsou výrazy

$$\sigma'^2_a = \frac{4bc\,(s-b)\,(s-c)}{(b-c)^2}, \quad \sigma'^2_b = \frac{4ac\,(s-a)\,(s-c)}{(a-c)^2}.$$

Rovnost jich $\sigma'_a = \sigma'_b$ vede k rovnici

$$\frac{b\,(s-b)}{(b-c)^2} = \frac{a\,(s-a)}{(a-c)^2},$$

z níž postupem podobným jako v úloze předešlé odvodíme

$$(b-a)\left(c^3 - (a+b)\,c^2 + 3abc - ab\,(a+b)\right) = 0.$$

Rovnice tato bude splněna pro $b = a$, tedy pro trojúhelník rovnoramenný. Zde však může též druhý činitel rovnati se nulle pro jistá kladná čísla a, b, c, tvořící strany trojúhelníku.

Že tomu tak může býti, o tom se snadno přesvědčíme, klademe-li

$$c^3 - ab\,(a+b) = 0, \quad -(a+b)\,c^2 + 3abc = 0.$$

Pak $a + b = \sqrt{3}\,c$, $ab = \frac{c}{\sqrt{3}}$, tak že a, b jsou kořeny rovnice kvadratické

$$x^2 - \sqrt{3}\,c\;x + \frac{c}{\sqrt{3}} = 0$$

a určíme

$$a \doteq 1{\cdot}28c,\quad b \doteq 0{\cdot}45c,\quad s \doteq 1{\cdot}87c,\quad \text{tak že}\quad s < a,\ b,\ c$$

a a, b, c tvoří skutečně strany trojúhelníku, a to nerovnoramenného. I vidíme, že existují trojúhelníky nerovnoramenné, v nichž symmetrály dvou úhlů vnějších jsou si rovny.*)

Obecně vyhovují strany takového trojúhelníku relaci

$$c^3 - (a+b)\,c^2 + 3abc - ab\,(a+b) = 0 \tag{1}$$

Poznámka:

Předpokládáme-li, že a, b ($a > b$) jest dáno, vyhovuje c rovnici třetího stupně

$$f(x) = x^3 - (a+b)\,x^2 + 3abx - ab\,(a+b) = 0.$$

*) O trojúhelnících takových bylo jednáno častěji v Mathesis, kdež se nazývají pseudo-isoscèles.

Lze zjistiti snadno, že rovnice tato má vždy jediný kladný kořen c té vlastnosti, že $a > c > b$, $c > a - b$. Jest totiž $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f(a-b) < 0$. Že pak existuje jediný kořen realný, a to kladný, ležící mezi a, b, plyne z uvažování funkce $\varphi(y)$, kdež $f(x) = -\frac{ab}{y^3}\varphi(y)$, $x = \frac{ab}{y}$. Rovnice $\varphi'(y) = 0$ má totiž kořeny imaginární, tak že jest stále $\varphi'(y) > 0$ pro všechna reálná y a $\varphi(y)$ se vzrůstajícím y stále roste, $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) > 0$.

Klademe li v relaci (1) $3abc = 2abc + abc$, obdržíme

$$-c^2(a+b-c) + 2abc - ab(a+b-c) = 0,$$
$$(c^2 + ab)(s-c) = abc,$$
$$s^2(s-c) = ab(2c-s).$$

Násobíme-li s a uvážíme, že $2cs - s^2 = c^2 - (s-c)^2$, obdržíme

$$sc^2(s-c) = ab(c^2 - (s-c)^2),$$
$$ab(s-c)^2 = c^2(ab - s(s-c)).$$

Avšak

$$ab - s(s-c) = ab - s(2s-c) + s^2 =$$
$$= ab - s(a+b) + s^2 = (s-a)(s-b),$$

tak že

$$\left(\frac{s-c}{c}\right)^2 = \frac{s-a}{a} \cdot \frac{s-b}{c},$$

neb též

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

což jest podmínečná rovnice pro úhly trojúhelníku rovnoramenného, v němž jsou symmetrály dvou vnějších úhlů rovny.

K rovnici této přijdeme ještě jednodušším postupem.

Označme A'', B'', C'' koncové body symmetrál úhlů vnějších.

Pro symmetrálu σ'_a mohou nastati dva případy:

1. Je-li $\beta > \gamma$, leží B mezi C a A'' a pak

$$\sigma'_a = \frac{c\sin\beta}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

2. Je-li $\gamma > \beta$, leží C mezi A'' a B a pak

$$\sigma'_a = \frac{c \sin \beta}{\sin \frac{\gamma - \beta}{2}}.$$

Je-li současně buď $\alpha > \gamma$, $\beta > \gamma$ neb $\alpha > \gamma$, $\beta < \gamma$, lze snadno dokázati, jako v úloze předešlé, že rovnost symmetrál úhlů vnějších nastane jen pro trojúhelník rovnoramenný.

Z rovnosti $\sigma'_a = \sigma'_b$ plyne totiž

$$\sin \alpha \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \beta \sin \frac{\alpha - \gamma}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

a užijeme-li vzorce

$$\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B,$$

obdržíme

$$\sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) = \sin \frac{\beta}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2}\right)\left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}\right) = 0.$$

Z obou činitelů může se rovnati nulle pouze první, a to pro $\alpha = \beta$, tedy pro trojúhelník rovnoramenný.

Uvažujme nyní případ, že buď $\alpha > \gamma$, $\beta < \gamma$ neb $\alpha < \gamma$, $\beta > \gamma$. Pak vede rovnost $\sigma'_a = \sigma'_b$ k rovnici

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \beta \sin \frac{\gamma - \alpha}{2},$$

z níž odvodíme

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2}\right)\left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) = 0.$$

První činitel jest pro úhly v trojúhelníku vždy kladný, takže úhly musí v tomto případě hověti relaci

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

7.

Budtež A', B', C' paty symmetrál vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Dokázati, že $\triangle A'B'C'$ může býti rovnoramenným, i když $\triangle ABC$ rovnoramenným není.

R.

Řešení. Zaslal p. *Václav Steinocher*, stud. VII. tř. gymn. v Č. Budějovicích.

Dle věty kosinusové jest

$$\overline{C'A'}^2 = \overline{CA'}^2 + \overline{CC'}^2 - 2\,\overline{CA'}\,.\,\overline{CC'}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\overline{C'B'}^2 = \overline{CB'}^2 + \overline{CC'}^2 - 2\,\overline{CB'}\,.\,\overline{CC'}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Má-li platiti rovnost $C'A' = C'B'$, musí býti

$$\left(CA' - CB'\right)\left(CA' + CB' - 2\,CC'\cos\frac{\gamma}{2}\right) = 0.$$

Klaďme

$$CA' = \frac{ab}{b+c}, \qquad CB' = \frac{ab}{a+c}$$

$$CC' = \frac{2\sqrt{ab\,s(s-c)}}{ab}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

I shledáme, že

$$CA' - CB' = 0$$

pouze pro $a = b$, t. j. pro trojúhelník rovnoramenný.

Druhý činitel vede k rovnici

$$\frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{a+b} - \frac{4s(s-c)}{a+b} = 0.$$

Odstraníme-li zlomky (jmenovatelé jsou čísla > 0) a upravíme, shledáme, že strany a, b, c musí vyhovovati rovnici

$$c^3 + (a+b)\,c^2 - (a^2 + ab + b^2)\,c - (a+b)(a^2+b^2) = 0.$$

Poznámka:

Předpokládáme-li, že a a b jest dáno, vyhovuje c rovnici třetího stupně $f(x) = 0$, kdež

$$f(x) = x^3 + (a+b)\,x^2 - (a^2+ab+b^2)\,x - (a+b)(a^2+b^2)$$
$$= (x+a+b)(x^2 - a^2 - b^2) - abx.$$

O rovnici té lze zjistiti, že má všechny tři kořeny reálné, z nichž pouze jeden jest kladný a leží mezi $a - b$ a $a + b$, takže tvoří s a a b strany trojúhelníku. Druhé dva jsou záporné, jak plyne z uvažování znamení výrazů $f(-\infty)$, $f(-a-b)$, $f(0)$. Záporný kořen ležící v intervallu $-\infty, -a-b$ nemá geometrického významu. Za to pro kořen x ležící v intervallu $-a-b, 0$ může $-x$ tvořiti s a a b za jistého omezení strany trojúhelníka. Trojúhelník ten má pak tu vlastnost, že pata C' symmetrály vnitřního úhlu γ a paty A'', B'' symmetrál úhlů vnějších k α, β tvoří vrcholy trojúhelníku rovnoramenného.

8.

Řešiti a sestrojiti trojúhelník, dán-li součet dvou stran $a + b$, těžnice t_c a úhel γ.

Professor *Rudolf Hruša.*

Řešení. Zaslal pan *František Soukup*, stud. VII. tř. gymn. v Praze II., v Žitné ul.

Trojúhelník daný ABC doplňme na rovnoběžník $ADBC$ tím, že vedeme $AD \parallel CB$ a $BD \parallel CA$. Pak známe v trojúhelníku ADC součet stran $AC + AD = a + b = m$, úhel jimi sevřený $DAC = 180^0 - \gamma$ a stranu třetí $CD = 2t_c$, čímž daná úloha převedena na úlohu známou.

9.

Řešiti a sestrojiti čtyřúhelník, dány-li délky stran a úhel úhlopříčen.

Professor *Rudolf Hruša.*

Řešení dle p. autora.

Obsah čtyřúhelníka jest dán vzorci

$$P = \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\, tg\, \omega$$

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\beta - \delta}{2}}$$

Srovnáním dostaneme relaci:

$$\tfrac{1}{16}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\, tg^2 \omega = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\beta + \delta}{2}, \qquad (1)$$

ze které můžeme vypočítati úhel $(\beta + \delta)$.

Uvedeme však dříve tuto relaci na vhodnější tvar.

Uvážíme-li, že

$$(s-a)(s-c)=\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)(a+b-c+d)$$
$$=\frac{(b+d)^2-(a-c)^2}{4}$$
$$(s-b)(s-d)=\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)(a+b+c-d)$$
$$=\frac{(a+c)^2-(b-d)^2}{4}$$

jest výraz

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$
$$=\tfrac{1}{16}[b^2+d^2-a^2-c^2+2bd+2ac][a^2+c^2-b^2-d^2$$
$$+2ac+2bd].$$

I můžeme rovnici (1) psáti

$$(a^2-b^2+c^2-d^2)^2\,tg^2\,\omega=4(ac+bd)^2$$
$$-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2},$$

aneb též

$$\left(\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{2\cos\omega}\right)^2=(ac+bd)^2-4abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}.$$

Klademe-li

$$\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}=\frac{1+\cos(\beta+\delta)}{2},$$

obdržíme konečně:

$$\left(\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{2\cos w}\right)^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\beta+\delta) \quad (2)$$

Položíme-li

$$ac=A,\ bd=B$$
$$\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{2\cos\omega}=C$$
$$2S=A+B+C,$$

dostaneme po krátké úpravě vzorec

$$\cos\frac{\beta+\delta}{2}=\sqrt{\frac{S(S-C)}{abcd}} \quad (3)$$

I vidíme, že v trojúhelníku, v němž poměr stran

$$\bar{a}:\bar{b}:\bar{c}=A:B:C$$

jest úhel

$$\bar{\gamma} = \beta + \delta \text{ neb } 360^0 - (\beta + \delta).$$

Ostatní úhly vypočteme opírajíce se o tento vzorec pro obsah čtyřúhelníku:

$$P = \tfrac{1}{2}(ab \sin \beta + cd \sin \delta).$$

Klademe-li

$$P = \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\, tg\, \omega = \tfrac{1}{2} C \sin \omega,$$

obdržíme rovnici

$$ab \sin \beta + cd \sin \gamma = C \sin \omega.$$

Poněvadž známe již $\beta + \delta$, obdržíme známým postupem též β a δ.

Řešení grafické.

Sestrojme z úseček (m jest libovolná úsečka)

$$\bar{a} = \frac{ab}{m}, \quad \bar{b} = \frac{bd}{m}, \quad \bar{c} = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2m \cos \omega} = \frac{C}{m}$$

trojúhelník. Pak jest úhel $\gamma = \beta + \delta$ neb $360^0 - (\beta + \delta)$. Rovnici

$$ab \sin \beta + cd \sin \delta = C \sin \omega$$

pišme ve tvaru

$$ab \cos(90^0 - \beta) + cd \cos(90^0 - \delta) = C \sin \omega.$$

Pak můžeme úhly β, δ sestrojiti takto:

V kosoúhlé soustavě souřadnic o úhlu $180^0 - (\beta + \delta)$ veďme bodem $\left(\frac{ab}{m}, \frac{cd}{m}\right)$ přímku mající od počátku vzdálenost $\frac{C \sin \omega}{m}$. Pak tvoří přímka ta s osami souřadnic úhly β, δ.

V téže soustavě veďme bodem $\left(\frac{ad}{m}, -\frac{bc}{m}\right)$ přímku ve vzdálenosti $\frac{C \sin \omega}{m}$ od počátku tak, aby protínala kladnou část osy x a zápornou část osy y. Úhly, které tvoří s osami, jsou pak co do absolutní velikosti α, γ.

10.

Do dané paraboly vepište daný trojúhelník.

Dr. *Marian Haas.*

Řešení dle p. autora a p. *K. Teige,* stud. VIII. tř. g. v Praze II. v Žitné ul.

Parabola měj rovnici $y^2 = 2px$; strany a, b, c, jakož i úhly α, β, γ trojúhelníka předpokládáme jako známé. Symmetrála úhlu α nechť uzavírá s osou paraboly úhel φ a prochází vrcholem (x_1, y_1). Pak druhé dva vrcholy mají souřadnice

$$x_2 = x_1 - b\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right); \qquad y_2 = y_1 - b\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x_3 = x_1 - c\cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right); \qquad y_3 = y_1 - c\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Tyto musí vyhověti rovnicím

$$y_2^2 = 2px_2; \qquad y_3^2 = 2px_3,$$

což poskytuje

$$y_1^2 - 2by_1\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) + b^2\sin^2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2px_1 - 2pb\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y_1^2 - 2cy_1\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) + c^2\sin^2\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2px_1 - 2pc\cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Poněvadž tu $y_1^2 = 2px_1$, zjednoduší se obě rovnice na

$$2y_1\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = b\sin^2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) + 2p\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$2y_1\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = c\sin^2\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) + 2p\cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Vyloučivše y, dostaneme především

$$\left\{b\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - c\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)\right\}\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$+ 2p\sin\alpha = 0,$$

a po snadné úpravě

$$\left\{(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\varphi-(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right\}(\cos\alpha-\cos 2\varphi)$$
$$+4p\sin\alpha=0,$$

jakožto rovnici pro φ, čímž úkol daný rozřešen, poněvadž souřadnice vrcholů možno jednoduše pomocí φ vyjádřiti.

11.

Do paraboly vepište rovnostranný trojúhelník minimálního obsahu.

Dr. *Marian Haas.*

Řešení na základě úlohy předešlé dle p. autora a p. *K. Teige*, stud. VIII. tř. g. v Praze II. v Žitné ul.

Rovnice pro úhel symmetrály φ přejde v jednodušší formu, jedná-li se o rovnostranný trojúhelník, poněvadž $c=b=a$; $\sphericalangle\ \alpha=60^0$.

Máme tudíž

$$-2a\sin 30^0\cos\varphi\,(\cos 60^0-\cos 2\varphi)+4p\sin 60^0=0,$$

$$\frac{1}{2}\cos\varphi-\cos\varphi\cos 2\varphi=2\sqrt{3}\,\frac{p}{a}.$$

Poněvadž $2\cos\varphi\cos 2\varphi=\cos 3\varphi+\cos\varphi$, máme jednoduchý vzorec k určení směru symmetrály, známe-li stranu trojúhelníka a,

$$\cos 3\varphi=-4\sqrt{3}\,\frac{p}{a}.$$

Z úhlu φ počítáme vrchol trojúhelníka dle vzorce

$$2y_1\sin(\varphi-30^0)=a\sin^2(\varphi-30^0)+2p\cos(\varphi-30^0).$$

Má-li řešení býti reálné, musí býti

$$a>4p\sqrt{3}.$$

Nejmenší $a=4p\sqrt{3}$; příslušný trojúhelník má obsah

$$\varDelta=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=12p^2\sqrt{3}.$$

Vrchol paraboly jest zároveň jedním vrcholem trojúhelníka, druhé dva jsou symmetrické k ose. Neboť z $\cos 3\varphi = -1$ plyne $3\varphi = 180^0$, $\varphi = 60^0$, $2y_1 \sin 30^0 = a \sin^2 30^0 + 2p \cos 30^0$;

$$y_1 = \frac{a}{4} + p\sqrt{3} = 2p\sqrt{3};$$

$$y_2 = y_1 - a \sin 30^0 = 2p\sqrt{3} - \frac{a}{2} = 0;$$

$$y_3 = y_1 - a \sin 90^0 = -y_1 \quad \text{q. e. d.}$$

12.

Paraboly P, P' mají společné ohnisko a osu a týž parametr, jich vrcholy pak leží na opačných stranách ohniska; dokažte, že vedeme-li z libovolného bodu M na parabole P tečny k parabole P', kružnice opsaná trojúhelníku tvořenému oněmi tečnami a polárou bodu M dotýká se paraboly P'.

R.

Řešení. Zaslal p. *Lad. Staněk,* stud. VII. tř. r. v Litovli.

Učiníme-li společné ohnisko obou parabol počátkem a společnou jich osu osou úseček, jsou dané paraboly určeny rovnicemi

$$P \ldots y^2 = 2px + p^2 \tag{1}$$

$$P' \ldots y^2 = -2px + p^2. \tag{2}$$

Bod $M(x_0, y_0)$ paraboly P musí vyhovovati podmínce

$$y_0^2 = 2px_0 + p^2. \tag{3}$$

Polára bodu M vzhledem k parabole P' je dána rovnicí

$$y_0 y = -p(x + x_0) + p^2. \tag{4}$$

Řešením rovnic (2) a (4) obdržíme souřadnice bodů doteku A, B tečen z bodu M k parabole P' vedených:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(-\dfrac{3px_0 + 2y_0\sqrt{px_0}}{p}, \quad y_0 + 2\sqrt{px_0}\right) \\ B\left(-\dfrac{3px_0 - 2y_0\sqrt{px_0}}{p}, \quad y_0 - 2\sqrt{px_0}\right). \end{array}\right\} \tag{5}$$

Kružnice procházející body M, A, B mějž rovnici

$$x^2 + y^2 + Ex + Fy + G = 0. \tag{6}$$

Dosadíme-li do této rovnice za x a y postupně souřadnice bodů A, B, M, obdržíme

$$(3px_0 + 2y_0\sqrt{px_0})\,E - (py_0 + 2p\sqrt{px_0})\,F - pG =$$
$$9px_0^2 + 4y_0\sqrt{px_0}\,(3x_0 + p) + 4x_0y_0^2 + py_0^2 + 4p^2x_0, \tag{7}$$
$$(3px_0 - 2y_0\sqrt{px_0})\,E - (py_0 - 2p\sqrt{px_0})\,F - pG =$$
$$9px_0^2 - 4y_0\sqrt{px_0}\,(3x_0 + p) + 4x_0y_0^2 + py_0^2 + 4p^2x_0, \tag{8}$$
$$x_0^2 + y_0^2 + Ex_0 + Fy_0 + G = 0. \tag{9}$$

Odečtením rovnice (8) od (7) vychází

$$y_0E - pF = 6x_0y_0 + 2py_0 \tag{10}$$

a násobíme-li rovnici (9) p a pak přičteme k rovnici (7),

$$(2px_0 + y_0\sqrt{px_0})\,E - p\sqrt{px_0}\,F$$
$$= 4px_0^2 + 2y_0\sqrt{px_0}\,(3x_0 + p) + 2x_0y_0^2 + 2p^2x_0. \tag{11}$$

Řešením rovnic (10), (11) vychází

$$E = \frac{2y_0^2}{p}, \quad F = -\frac{2x_0y_0}{p}; \tag{12}$$

a dosadíme-li tyto výsledky do rovnice (9), vypočteme

$$G = -x_0^2 - y_0^2.$$

Jest tudíž rovnice kruhu procházejícího body A, B, M

$$x^2 + y^2 + \frac{2y_0^2}{p}\,x - \frac{2x_0y_0}{p}\,y - x_0^2 - y_0^2 = 0. \tag{13}$$

Počítejme průseky této kružnice s parabolou P'; z rovnice (12) vypočteme x a dosadíme do rovnice (13), takže obdržíme

$$y^4 + (2p^2 - 4y_0^2)\,y^2 - 8px_0y_0y + p^4 - 4p^2x_0^2 = 0. \tag{14}$$

Avšak poněvadž dva z hledaných průseků jsou body A, B, musí levá strana rovnice (14) býti dělitelna kořenovými činiteli

$$(y - y_0 - 2\sqrt{px_0})\,(y - y_0 + 2\sqrt{px_0}),$$

čili výrazem

$$y^2 - 2y_0y + y_0^2 - 4px_0.$$

Provedeme-li dělení, redukuje se nám rovnice (14) na rovnici druhého stupně

$$y^2 + 2y_0y + y_0^2 = 0, \tag{15}$$

která má dva kořeny splývající

$$y = -y_0$$

a k tomu dle rovnice (2)

$$x = \frac{p^2 - y_0^2}{2p} = -x_0.$$

Splývají tedy v bodě $N(-x_0, -y_0)$ dva průseky kružnice a paraboly, t. j. tyto křivky se v bodě N dotýkají, majíce společnou tečnu v bodě tom

$$px - y_0 y - p(x_0 + p) = 0,$$

jak se lze snadno přesvědčiti.

Poznámka: Jednodušeji lze danou úlohu řešiti takto:

Rovnice paraboly P' nechť jest $y^2 = 2px$. Pak má parabola P rovnici

$$y^2 = -2p(x - p).$$

Označme A, B dotyčné body tečen vedených z bodu M na parabolu P'. Kružnice K body $M\,A\,B$ vedená nechť protíná parabolu P' ještě v bodech C, D. Přímka AB jakožto polára bodu $M(x_0, y_0)$ vzhledem k parabole P' má rovnici

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Rovnice přímky CD nechť jest $Ax + By + C = 0$. Kružnice K jakožto kuželosečka svazku, tvořeného parabolou P a degenerovanou kuželosečkou, danou přímkami AB a CD, má rovnici

$$K = y^2 - 2px + (Ax + By + C)(-px + y_0 y - px_0 = 0.$$

Aby tato rovnice představovala skutečně kružnici, musí býti

$$Ap + By_0 + 1 = 0$$
$$Ay_0 - Bp = 0,$$

odkudž vypočteme

$$A = -\frac{p}{y_0^2 + p^2}, \quad B = -\frac{y_0}{y_0^2 + p^2}.$$

Kladme ještě $C = -\dfrac{c}{y_0^2 + p^2}$, takže

$$K = y^2 - 2px - \frac{px + y_0 y + c}{y_0^2 + p^2}(-px + y_0 y - px_0) = 0.$$

c určíme z podmínky, že kružnice K má procházeti bodem $M(x_0, y_0)$. Tak nalezneme $c = -p(x_0 - p)$.

Jest tedy rovnice přímky

$$CD \equiv px + y_0 y - p(x_0 - p) = 0.$$

Leží-li však bod M na parabole P, takže jest splněna rovnice $y_0^2 = -2p(x_0 - p)$, lze se snadno přesvědčiti, že přímka CD jest tečnou paraboly P' v bodě

$$C \equiv D\,(\xi = -x_0 + p,\ \eta = -y_0).$$

Z toho pak plyne dále, že kružnice K, procházejíc dvěma splývajícími body $C \equiv D$ paraboly P', dotýká se jí.

13.

Dána jest parabola ohniskem a řídící přímkou. Dokázati, že společné tečny paraboly a kružnice opsané z ohniska poloměrem rovným parametru protínají se na ose v bodě souměrně sdruženém s ohniskem dle řídící přímky, a vyšetřiti úhel obou tečen.

Prof. Ant. Navrátil.

Řešení. Zaslal p. *Adolf Plaček*, VII*b* r. na Král. Vinohradech.

Označme t jednu ze společných tečen oné kružnice a paraboly, T bod, v němž se kružnice dotýká, M bod, v němž protíná osu paraboly. Označme dále G bod souměrně sdružený s ohniskem F vzhledem k tečně t. Bod ten leží na přímce řídící. Body F, T, G leží pak na téže přímce, kolmé na tečnu t. Označíme-li H průsečík osy a přímky řídící, bude v pravoúhlém trojúhelníku FGH, $FG = 2FT = 2p$, $FH = p$, takže $\sphericalangle HGF = 60^0$, $\sphericalangle GFH = 30^0$. Pravoúhlý trojúhelník FMT jest shodný s pravoúhlým trojúhelníkem FGH (stran FT a úhel HFT společný). Z toho plyne $MH = HF = p$, tak že skutečně bod M, který jest též průsečíkem obou společných tečen paraboly a kružnice, jest souměrně sdružený s ohniskem vzhledem k přímce řídící. Tečna t svírá s osou paraboly úhel 30^0, takže obě společné tečny svírají spolu úhel 60^0.

14.

Dány jsou dvě kružnice o středech O a O' a společná vnější tečna AB. Stanovme vnější průsečíky centrály s kružnicemi C a D a určeme dále průsečík M spojnic $\overline{CA}$ a $\overline{DB}$. Dokázati, že úhel AMB jest pravý a že M jest na chordále obou kružnic. Odvoditi z toho konstrukci vnějších tečen ke dvěma kružnicím a vyšetřiti, jak ji třeba modifikovati, abychom dostali společné vnitřní tečny.

Prof. Ant. Navrátil.

Řešení. Zaslal p. *V. Zlatník,* stud. VII. tř. g. v Hradci Králové.

Označme $\sphericalangle AOC = \alpha$, $\sphericalangle BDO' = \beta$.

Z rovnoběžnosti poloměrů OA, $O'B$ plyne, že

$$\sphericalangle COA + \sphericalangle DO'B = 180^0,$$

a odtud, poněvadž trojúhelníky COA a $DO'B$ jsou rovnoramenné

$$180^0 - \alpha + 180^0 - 2\beta = 180^0, \text{ t. j. } \alpha + \beta = 90^0.$$

Z toho plyne dále, že $\sphericalangle CMD = 90^0$. Spusťme ž bodu M kolmici MP na CD a označme S průsečík její s tečnou AB. Pak bude $\sphericalangle PMD = \alpha$, $\sphericalangle CMP = \beta$. Poněvadž $\sphericalangle SBM = \alpha$, $\sphericalangle SAM = \beta$, jsou trojúhelníky SBM a SAM rovnoramenné a tudíž $AS = SM = SB$. Jsou tedy tečny vedené z bobu S na obě dané kružnice O, O' sobě rovny, takže bod S leží na jejich chordále a poněvadž $MP \perp CD$, jest MP onou chordálou.

Odtud plyne tato konstrukce jedné ze společných vnějších tečen obou daných kružnic O, O':

Sestrojíme bod M jako průsečík chordály daných kružnic a kružnice nad průměrem CD. Dotyčné body A, B oné tečny obdržíme pak jako průsečíky přímky CD a kružnice O resp. přímky OM a kružnice O'.

Označme E, F vnitřní průsečíky centrály s kružnicemi O resp. O'. Označíme-li N průsečík přímek AE a BF, jest opět $\sphericalangle ANB$ pravý a bod N leží opět na chordále kružnic O, O'. Označíme-li A_1, B_1 dotyčné body jedné z vnitřních tečen, protínají se A_1E a B_1D a rovněž A_1C a B_1F v pravém úhlu na chordále obou kružnic O, O'.

15.

Je-li p prvočíslo, dokažte, že výraz

$$\frac{(p-2)!-1}{p}$$

jest číslo celé.

Jan Svoboda, úř. hyp. banky v Brně.

Řešení. Zaslal p. *Mojmír Horák*, stud. VII. tř. g. v Kroměříži.

Dle věty Wilsonovy jest

$$\frac{(p-1)!+1}{p}=E$$

číslo celé.

Pišme

$$(p-1)!=(p-2)!\,(p-1)=(p-2)!\,p-(p-2)!$$

Jest tedy

$$\frac{(p-2)!\,p-(p-2)!+1}{p}=E$$

$$\frac{(p-2)!-1}{p}=(p-2)!-E,$$

tedy skutečně

$$\frac{(p-2)!-1}{p}$$

číslo celé, jak bylo dokázati.

16.

Nalézti všechna čísla celá kladná, která se rovnají dvojnásobnému čtverci součtu číslic. *R.*

Řešení.

Budiž hledané číslo

$$N=x_0+10x_1+10^2x_2+\ldots+10^{n-1}x_{n-1}.$$

Pak má býti splněna rovnice

$$N=2s^2,$$

značí-li s součet číslic čísla N, $s=x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}$. Předpokládejme, že hledané číslo N má skutečně n číslic (a ne méně). Z uvažování nejmenšího čísla takového, totiž 10^{n-1}, plyne, že musí býti

$$2s^2 \geqq 10^{n-1} \qquad (\alpha)$$

Avšak $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ jsou vesměs $\leqq 9$, takže musí býti

$$s \leqq 9n \qquad (\beta)$$

Z nerovností (α) a (β) plyne, že musí býti

$$162n^2 \geqq 2s^2 \geqq 10^{n-1}.$$

Aby bylo možno vyhověti těmto mocninám, jest nutno, aby

$$162n^2 \geqq 10^{n-1}.$$

Snadno shledáme, že od $n = 5$ jest stále $162n^2 < 10^{n-1}$, takže musí býti $n \leqq 4$.

Stačí tedy omeziti se dále na uvažování čísel čtyřciferných $N = x_0 + 10x_1 + 100x_2 + 1000x_3$.

Podmínku, jež má býti splněna, pišme ve tvaru soustavy rovnic

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = s \qquad (1)$$

$$x_0 + 10x_1 + 100x_2 + 1000x_3 = 2s^2. \qquad (2)$$

Z rovnice (2) jest patrno, že x_0 jest číslo sudé. Uvážíme-li, že $x_0 \leqq 8$, $x_1, x_2, x_3 \leqq 9$, plyne z (1), že $s \leqq 35$, a z (2), že musí býti

$$1000x_3 \leqq 2s^2 \quad \text{t. j.} \leqq 2450,$$

neboli

$$x_3 \leqq 2.$$

Užijeme-li nyní nerovnosti $x_0 \leqq 8$, $x_1, x_2 \leqq 9$, $x_3 \leqq 2$, obdržíme z (1), že $s \leqq 28$, a z (2)

$$1000x_3 \leqq 2s^2, \quad \text{t. j.} \leqq 1568,$$

tedy

$$x_3 \leqq 1, \text{ takže } x_3 = 1 \text{ neb } 0.$$

Při $x_3 = 1$ poskytuje nám (1) horní mez pro s, totiž $s \leqq 27$.

Při $x_3 = 0$ obdržíme z (1), že $s \leqq 26$, dostaneme však menší horní mez z (2), totiž $2s^2 \leqq 998$, tedy $s \leqq 22$.

Eliminujme x_0 z rovnic (1) a (2). Tak obdržíme

$$s(2s - 1) = 9(x_1 + 11x_2 + 111x_3). \qquad (3)$$

Jest tedy

$$s(2s - 1) \equiv 0 \ (mod\ 9),$$

a tudíž buď

$$s \equiv 0 \ (mod\ 9),$$

anebo

$$2s - 1 \equiv 0, \text{ t. j. } s \equiv 5 \ (mod\ 9).$$

(Aby snad bylo současně $s \equiv 0$ a $2s - 1 \equiv 0$, t. j, $s \equiv 2$ (*mod* 3), není možno.)

Těmto podmínkám a nerovnosti $s \leq 27$, platné při $x_3 = 1$, vyhovují pouze čísla $s = 5, 9, 14, 18, 23, 27$, podmínkám těm a nerovnosti $s \leq 22$, platné při $x_3 = 0$, pouze čísla $s = 5, 9, 14, 18$.

(K řešení $s = 0$, z něhož plyne úloze samozřejmě vyhovující řešení 0, nebude přihlíženo.)

Vypočtěme si ke každému s hodnotu výrazu $\frac{s(2s-1)}{9}$

$$s = 5,\ 9,\ 14,\ 18,\ 23,\ 27$$

$$\frac{s(2s-1)}{9} = 5,\ 17,\ 42,\ 70,\ 115,\ 159.$$

Z rovnice 3. plyne

$$x_1 + 11x_2 + 111x_3 = \frac{s(2s-1)}{9} \qquad (4)$$

Uvažujme nejprve případ $x_3 = 1$.

I vidíme ze (4), že pak musí býti

$$\frac{s(2s-1)}{9} \leq 111,$$

čemuž vyhovují pouze hodnoty $s = 23$, $s = 27$.

Při $s = 23$ jest $x_1 + 11x_2 = 4$, tedy $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

Z rovnice (1) by plynulo $x_0 = 18$, takže nedostáváme řešení dané úloze vyhovující.

Podobně při $s = 27$ jest $x_1 + 11x_2 = 48$, tedy $x_1 = 4$, $x_2 = 4$; bylo by pak dle (1) $x_0 = 18$, což opět úloze nevyhovuje.

Při $x_3 = 0$ poskytuje nám (4)

$$x_1 + 11x_2 = \frac{s(2s-1)}{9}$$

zároveň s rovnicí (1)

$$x_0 + x_1 + x_2 = s$$

řešení úloze vyhovující:

$$\text{při } s = 5, \frac{s(2s-1)}{9} = 5, \quad x_0 = 0, x_1 = 5, x_2 = 0,$$

$$\text{při } s = 9, \frac{s(2s-1)}{9} = 17, \quad x_0 = 2, x_1 = 6, x_2 = 1,$$

$$\text{při } s = 14, \frac{s(2s-1)}{9} = 42, \quad x_0 = 2, x_1 = 9, x_2 = 3,$$

$$\text{při } s = 18, \frac{s(2s-1)}{9} = 70, \quad x_0 = 8, x_1 = 4, x_2 = 6,$$

takže hledaná čísla jsou

50, 162, 392, 648.

17.

Určiti maxima a minima výrazu

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}$$

(K diskussi užiti grafického znázornění.) R.

Řešení. Zaslal p. *B. Mendl*, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.

Pišme

$$y = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)} = 1 + \frac{2}{z},$$

klademe-li $z = (x-1)(x-4)$.

Uvažujíce diskriminant rovnice $x^2 - 5x + 4 - z = 0$, shledáme, že funkce z má extrémní hodnotu $z = -\frac{9}{4}$ při $x = \frac{5}{2}$. Průběh funkce z jest pak tento: Pro $x = -\infty$ jest $z = +\infty$, pak pro rostoucí x funkce z ubývá, pro $x = 1$ jest $z = 0$, až pro $x = \frac{5}{2}$ nastane minimum $z = -\frac{9}{4}$. Pak funkce z roste, pro $x = 4$ jest $z = 0$ a pro $x = \infty$ jest $z = \infty$.

Pro funkci y dostáváme pak tento průběh: Křivka funkci tu znázorňující skládá se ze tří větví, oddělených přímkami $x = 1$ a $x = 4$; pro hodnoty $x = 1$ a $x = 4$ roste totiž y do nekonečna; přímky $x = 1$ a $x = 4$ jsou pak asymptoty křivky té.

Pro $x = -\infty$ jest $y = 1$. Funkce y pak přibývá a blíží-li se x vzrůstajíc 1, nabývá y nekonečně velkých hodnot kladných. Druhá větev, ležící mezi asymptotami $x = 1$ a $x = 4$, roste nejprve od hodnoty $y = -\infty$ pro $x = 1$ do maxima $y = \frac{1}{9}$ pro $x = \frac{5}{2}$ a ubývá pak stále až k $y = -\infty$ pro $x = 4$. Třetí větev vychází od hodnoty $y = +\infty$ pro $x = 4$ a x vzrůstající do nekonečna blíží se y hodnotě 1. Poněvadž přímka $y = 1$ jest asymptotou, můžeme pokládati hodnotu 1, které se blíží y pro x, rostoucí kladnými i zápornými hodnotami do nekonečna, za minimum.

18.

Jest sečísti řadu

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

Stud. fil. *Václav Randák.*

Řešení. Zaslal p. *František Matoušek*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

Obecný člen řady té lze psáti

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

tak že součet její jest

$$1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Roste-li n do nekonečna, konverguje daná řada a má součet 1.

19.

Na obvodě kruhu dány body A, B. Nalézti na obvodě bod M tak, aby výraz $MA^2 - MB^2$ byl maximem neb minimem.

Dr. *Karel Čupr.*

Řešení. Zaslal p. *Eduard Čech*, stud. VII. tř. gymn. v Hradci Králové.

Zvolme střed kruhu za počátek a osu souměrnosti úsečky AB za osu úseček pravoúhlé soustavy souřadnic a to tak, že bod A leží ve čtvrtém, bod B v prvém kvadrantě.

Označme $\sphericalangle MOX = \varphi$, $\sphericalangle BOX = \omega$ a tedy $\sphericalangle AOX = -\omega$. Pak určíme z rovnoramenného trojúhelníka MOA

$$MA = 2r \sin \frac{\varphi + \omega}{2}$$

a podobně z rovnoramenného trojúhelníka MOB

$$MB = 2r \sin \frac{\varphi - \omega}{2}$$

a tedy

$$z = MA^2 - MB^2 = 4r^2 \left(\sin^2 \frac{\varphi + \omega}{2} - \sin^2 \frac{\varphi - \omega}{2}\right).$$

Uvážíme-li, že $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B) \sin(A - B)$, bude $z = 4r^2 \sin \omega \sin \varphi$.

Závisí tedy průběh z na průběhu $\sin \varphi$.

Pro $\varphi = 0$ v bodě M_0 jest $z = 0$, pak funkce z přibývá až pro $\varphi = 90^0$ v bodě M_{max} jest maximum, pak z ubývá, pro $\varphi = 180^0$ v bodě M'_0 jest opět $z = 0$, pak nabývá z hodnot záporných a ubývá stále až pro $\varphi = 270^0$ v bodě M_{min} jest minimum a odtud z přibývá až v bodě M_0 nabude z hodnoty 0. Tím popsán průběh funkce z, proběhne-li bod M jednou obvod kruhu.

Body M_0, M'_0, M_{max}, M_{min} mají jednoduchý geometrický význam. M_0 a M'_0 leží na ose souměrnosti úsečky AB, a sice M_0 půlí menší oblouk kruhový příslušný k tětivě AB, M'_0 větší oblouk, M_{max} a M_{min} leží na ose souměrnosti průměru $M_0 M'_0$, M_{max} půlí polokružnici $M_0BM'_0$, M_{min} polokružnici M'_0AM_0.

20.

Rozděliti trojúhelník na dvě části stejné plochy příčkou co možná nejkratší. Dr. *Karel Čupr.*

Řešení. Zaslal p. *Lad. Staněk,* stud. VII. tř. r. v Litovli.

Od vrcholu A nanesme na stranu AB úsečku $AM = y$ a na stranu AC úsečku $AN = z$. Označme třetí stranu trojúhelníku AMN, $MN = z$.

Poněvadž

$$\triangle AMN = \tfrac{1}{2} yz \sin \alpha$$
$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} bc \sin \alpha$$

a má býti

$$\triangle AMN = \tfrac{1}{2} \triangle ABC$$

obdržíme rovnici

$$2yz = bc. \tag{1}$$

Avšak dle věty Carnotovy jest

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha.$$

a užijeme-li vztahu (1),

$$x^2 = y^2 + z^2 - bc \cos \alpha$$

Jde o to, najíti minimální hodnotu x, je-li splněna současně podmínka (1) x bude minimem, bude-li minimem výraz

$$v = x^2 + bc \cos \alpha = y^2 + z^2$$

za podmínky $yz = \frac{bc}{2}$, neboli $y^2 z^2 = \left(\frac{bc}{2}\right)$.

Klademe-li $y^2 = y'$, $z^2 = z'$, vidíme, že úlohu převedeme na známou úlohu: Ze všech pravoúhelníků o dané ploše nalézti pravoúhelník o nejmenším obvodu. Tím jest čtverec. Obdržíme tedy minimum pro v při $y' = z' = \frac{bc}{2}$ a tedy $y = z = \sqrt{\frac{bc}{2}}$.

Pak $x = \sqrt{bc\,(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2bc}\,\sin \frac{\alpha}{2}$.

Tak nalezli jsme nejkratší ze všech příček ležících proti úhlu α. Abychom mohli rozhodnouti, která ze tří minimálních příček ležících proti úhlům α, β, γ jest nejkratší, užijme vzorce pro plochu trojúhelníku $\varDelta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$. Pak jest $x = \sqrt{2 \varDelta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, tak že nejkratší jest příčka ležící proti nejmenšímu úhlu.

21.

V trojúhelníku ABC vedeny jsou vrcholy příčky protínající se v tomtéž bodě M_1 a protínající protější strany v bodech A_1, B_1, C_1. Půlící body stran a, b, c budtež resp. A_2, B_2, C_2. Bodem A_2 veďme rovnoběžku s příčkou AA_1, podobně body B_2 a C_2 rovnoběžky s BB_1 resp. CC_1. Dokažte, že tyto tři přímky protínají se v tomtéž bodě M_2 a že body M_1, M_2 a těžiště daného trojúhelníku leží v jedné přímce.

Jan Svoboda, úř. hyp. banky v Brně.

Řešení. Zaslal p. *Václav Steinocher*, stud. VII. tř. g. v Čes. Budějovicích.

Trojúhelníky ABC a $A_2B_2C_2$ jsou podobné a podobně položené a jich středem podobnosti jest společné těžiště T. Rovnoběžka vedená bodem A_2 resp. B_2, C_2 k příčce AA_1 resp. BB_1, CC_1 jest s ní homologická. Protínají se tedy ty tři přímky v tomtéž bodě M_2 homologickém s bodem M_1 průsečíkem to přímek AA_1, BB_1, CC_1. Spojnice homologických bodů M_1M_2 musí procházeti středem podobnosti obou trojúhelníků a tím jest jich společné těžiště T.

22.

V trojúhelníku jest vždy

$$sin\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8};$$

rovnost nastane jen pro trojúhelník rovnostranný.

R.

Řešení. Zaslal p. *Karel Teige*, stud. VIII. tř. gymnasia v Praze-II. v Žitné ul.

Z výrazu pro sinus polovičního úhlu v trojúhelníku

$$sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

plyne, poněvadž jest vždy $a^2-(b-c)^2 \leqq a^2$, kdež rovnost nastane jen pro $b=c$, že jest

$$sin\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{bc}},$$

kdež rovnost nastane jen pro $b=c$.

I vidíme, že bude skutečně

$$sin\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8}$$

a že rovnost nastane jen pro $a=b=c$, t. j. pro trojúhelník rovnostranný.

Pan *Eduard Čech*, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, uvádí, že úloha má tento dvojí geometrický význam:

1. V trojúhelníku jest poloměr kružnice opsané větší než průměr kružnice vepsané. Rovnost nastane jen pro trojúhelník rovnostranný. Jest totiž $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{4r}$.

2. Tři tětivy v obloucích kružnice, jež dohromady tvoří půlkružnici, mají největší součin, jsou-li si rovny.

23.

Dána jest základna trojúhelníku a rozdíl druhých dvou stran. Nalézti geometrické místo pat kolmic spuštěných z koncových bodů základny na symmetrálu vnitřního i vnějšího úhlu protějšího. R.

Řešení. Zaslal p. *Lad. Staněk,* stud. VII. tř. r. v Litovli.

Koncové body základny trojúhelníka jsou ohniska hyperboly, jejíž velkou osou je daný rozdíl druhých dvou stran — průvodičů to hyperboly.

Daná úloha přechází tedy v úlohy:

1. Nalézti geometrické místo pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na tečny její.

2. Nalézti geometrické místo pat kolmic spuštěných z ohnisek na normály hyperboly.

Prvním geometrickým místem jest, jak známo, kružnice opsaná kolem středu hyperboly poloměrem rovným hlavní poloose.

Jde o to, nalézti druhé geometrické místo.

Normála hyperboly

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

má směrnici $-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$. Pata kolmice z ohniska F (e, o) na normálu spuštěné budiž N (x, y). Směrnice přímky NF jest

$$\frac{y}{x-e}=\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

z čehož plyne

$$b^2x_1x - a^2y_1y = b^2ex_1 \tag{2}$$

a poněvadž bod M leží na normále, vyhovuje též rovnici

$$a^2y_1x + b^2x_1y = e^2x_1y_1. \tag{3}$$

Z rovnic (2), (3) vypočteme

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2(x^2+y^2-ex)}{e^2(x-e)} \\ y_1 &= \frac{b^2(x^2+y^2-ex)}{e^2y}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

a dosazením těchto hodnot do rovnice (1) plyne po náležité redukci

$$(x^2+y^2-ex)^2\,[a^2y^2-b^2(x-e)^2] = e^4(x-e)^2y^2;$$

dosadíme-li $a^2 = e^2 - b^2$, bude

$$(x^2+y^2-ex)^2\,[e^2y^2-b^2(x^2+y^2-ex-e(x-e)] =$$
$$= e^4(x-e)^2y^2$$

a vynásobením a převedením na jednu stranu,

$$(x^2+y^2-ex)^2e^2y^2 - e^4y^2(x-e)^2 - b^2(x^2+y^2-ex)^2$$
$$[x^2+y^2-ex-e(x-e)] = 0.$$

Z prvních dvou členů vytkneme společného činitele e^2y^2,

$$e^2y^2[(x^2+y^2-ex)^2-e^2(x-e)^2] - b^2(x^2+y^2-ex)^2$$
$$[x^2+y^2-ex-e)] = 0,$$

z čehož vychází, vytkneme-li společného činitele,

$$[x^2+y^2-ex-e(x-e)]\,[e^2y^2(x^2+y^2-ex)$$
$$+ e^3y^2(x-e) - b^2(x^2+y^2-ex)^2] = 0.$$

První činitel

$$x^2+y^2-2ex+e^2 = (x-e)^2+y^2$$

neposkytuje reálného geometrického místa a proto jest hledaným geometrickým místem křivka čtvrtého stupně daná rovnicí
$e^2y^2(x^2+y^2-ex)+e^3y^2(x-e)-b^2(x^2+y^2-ex)^2=0$;
této rovnici můžeme dát spojením prvních dvou členů tvar

$$e^2y^2(x^2+y^2-e^2) - b^2(x^2+y^2-ex)^2 = 0.$$

24.

Dány jsou v téže rovině dva trojúhelníky OAB a OCD téhož vrcholu O; otočiti jeden z nich okolo bodu O tak, aby body ABCD ležely na téže kružnici.

R.

Řešení. Zaslal p. *Lad. Staněk*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

Předpokládejme, že trojúhelník OAB zůstane v původní poloze a že otočíme trojúhelník OCD tak, že body $ABCD$ leží na kružnici. Pak protínají se osy souměrnosti úseček AB, CD v bodě G takovém, že $GA = GB = GC = GD$. Úloha bude řešena, budeme-li znáti tuto úsečku, kterou označíme x, neb úsečku $GO = y$. Označme P, Q středy kruhů opsaných trojúhelníkům OAB, OCD, r, r' jich poloměry E, F středy úseček AB, CD, $d = EP$, $d' = FQ$, $t = PQ$, $t' = QG$, p, p' vzdálenost bodu O od přímek AB, CD.

V trojúhelníku APG, užijeme-li nejprvé pravoúhlého trojúhelníku AEG, jest $AG^2 = AE^2 + EG^2$, neboli $x^2 = AE^2 + (t + d)^2$, a užijeme-li dále pravoúhlého trojúhelníku AEP, jest $AE^2 = AP^2 - EP^2 = r^2 - d^2$, tak že konečně obdržíme

$$x^2 = r^2 + t^2 + 2td. \tag{1}$$

Podobně určíme v trojúhelníku OGP

$$y^2 = r^2 + t^2 - 2t(p - d). \tag{1'}$$

Analogicky můžeme nalézti

$$x^2 = r'^2 + t'^2 + 2t'd', \tag{2}$$

$$y^2 = r'^2 + t'^2 - 2t'(p' - d'). \tag{2'}$$

Z toho plyne

$$x^2 - y^2 = 2tp = 2t'p'.$$

Položme

$$t = p'u, \quad t' = pu, \tag{3}$$

kdež u jest nová neznámá.

Z rovnice (1) a (2) plyne pak

$$x^2 = r^2 + p'^2u^2 + 2p'ud = r'^2 + p^2u^2 + 2pud'.$$

Vyhovuje tedy u rovnici

$$(p^2 - p'^2)u^2 + 2(pd' - p'd)u + r'^2 - r^2 = 0.$$

Z rovnic (3) určíme pak t, t' a z (1) x neb z (1') y.

25.

Dán jest trojúhelník a v něm libovolný bod F; má se do tohoto trojúhelníku vepsati ellipsa, tak aby bod F byl jejím ohniskem.

Prof. *Josef Hanuš.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Drlík,* stud. V. tř. r. v Příboře.

1. Z ohniska F spusťme kolmice na strany daného trojúhelníku. Paty kolmic těchto leží na kružnici, jejíž střed jest zároveň středem dané ellipsy a poloměr roven hlavní poloose. Ohniskem, středem a délkou hlavní poloosy jest pak hledaná ellipsa určena.

2. Sestrojme body souměrně sdružené s ohniskem F dle stran daného trojúhelníku. Ty leží na kružnici, jejímž středem jest druhé ohnisko a poloměrem hlavní osa. Oběma ohnisky a délkou hlavní osy jest hledaná ellipsa určena.

26.

Vyšetřete geometrické místo bodů, z nichž vedené tečny ke kružnici $y^2 = 2rx - x^2$ utínají na tečně rovnoběžné s osou y úsečku rovnou průměru.

Václav Boubal, kand. prof.

Řešení. Zaslal p. *František Matoušek,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

Budiž bod C bodem hledaného geometrického místa. Tečny vedené z tohoto bodu ke kružnici nechť protínají tečnu rovnoběžnou s osou y v bodech A a B. Pak má býti $\overline{AB} = 2r$.

Plochu trojúhelníku ABC lze vyjádřiti dvojím způsobem, buď výrazem $r(x - 2r)$ neb uvážíme-li, že trojúhelník ABC jest kružnici dané připsán, výrazem $tr - 2r^2$, značí-li t délku tečny vedené z bodu C ke kružnici. Porovnáním obou výrazů obdržíme $x = t$ a poněvadž $t^2 = x^2 + y^2 - 2rx$, jest $x^2 = x^2 + y^2 - 2rx$, čili $y^2 = 2rx$.

Hledaným geometrickým místem jest parabola o parametru rovném poloměru kružnice.

27.

Do trojúhelníku ABC vepsán jiný $A_1B_1C_1$ tak, že vrcholy jeho pohybují se na stranách trojúhelníku daného ABC, při čemž strany B_1C_1, A_1C_1 jsou rovnoběžny se stranami BC, resp. AC. Které jest geometrické místo kruhů opsaných $\triangle A_1B_1C_1$? Kdy nabude strana A_1B_1 minimální délky?

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Lad. Staněk*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

V kosoúhlé soustavě, v níž bod C je počátkem, CA osou X, CB osou Y, budiž A_1 $(0, n)$, B_1 $(m, 0)$, C_1 (m, n). Kružnice opsaná trojúhelníku $A_1B_1C_1$ mějž střed M (x_0, y_0) a poloměr r.

Bude tedy její rovnice

$$(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\gamma + (y - y_0)^2 = r^2$$

Poněvadž body A_1, B_1, C_1 na této kružnici leží, musí býti splněny rovnice

$$x_0^2 + 2x_0y_0\cos\gamma + y_0^2 - 2(y_0 + x_0\cos\gamma)\,n + n^2 - r^2 = 0, \tag{1}$$

$$x_0^2 + 2x_0y_0\cos\gamma + y_0^2 - 2(x_0 + y_0\cos\gamma)\,m + m^2 - r^2 = 0, \tag{2}$$

$$x_0^2 + 2x_0y_0\cos\gamma + y_0^2 - 2(x_0 + y_0\cos\gamma)\,n - 2(y_0 + x_0\cos\gamma)\,n + m^2 + 2mn\cos\gamma + n^2 - r^2 = 0. \tag{3}$$

Odečteme-li (1) od (3), dostaneme

$$m^2 + 2mn\cos\gamma - 2(x_0 + y_0\cos\gamma)\,m = 0, \tag{4}$$

a odečteme-li (2) ode (3)

$$n^2 + 2mn\cos\gamma - 2(y_0 + x_0\cos\gamma)\,n = 0. \tag{5}$$

Z rovnic (4), (5) vypočteme, uvážíme-li, že $m \neq 0$, $n \neq 0$

$$m = \frac{2(x_0\cos 2\gamma + y_0\cos\gamma)}{4\cos^2\gamma - 1} \tag{6}$$

$$n = \frac{2(x_0\cos\gamma + y_0\cos 2\gamma)}{4\cos^2\gamma - 1} \tag{7}$$

Poněvadž bod C_1 (m, n) leží na přímce AB, která má rovnici

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \tag{8}$$

obdržíme, dosadíme-li z (6) a (7) do této rovnice

$$2\ (b \cos\gamma + a \cos 2\gamma)\ x_0 + 2\ (a \cos\gamma + b \cos 2\gamma)$$
$$y_0 = ab\ (4 \cos^2\gamma - 1) \qquad (9)$$

Jest tedy geometrickým místem středů kružnic opsaných trojúhelníkem $A_1B_1C_1$ přímka daná rovnicí (9).

Délka strany $A_1B_1 = l$ dána jest výrazem

$$l^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos\gamma \qquad (10)$$

Poněvadž bod C_1 (m, n) leží na přímce AB, splněna jest rovnice (8), tak že

$$\frac{m}{b} + \frac{n}{a} = 1. \qquad (11)$$

Jedná se tedy o určení minima výrázem (10), splněna-li podmínka (11).

Eliminujme n z rovnic (10) a (11); tak obdržíme rovnici pro m

$$(a^2 + b^2 + 2ab \cos\gamma)\ m^2 - 2ab\ (a + b \cos\gamma)\ m$$
$$+ b^2\ (a^2 - l^2) = 0.$$

Uvažováním diskriminanty této rovnice obdržíme minimální

$$l = \frac{2\,\Delta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos\gamma}}$$

při

$$m = \frac{ab\ (a + b \cos\gamma)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma}, \quad n = \frac{ab\ (b + a \cos\gamma)}{a^2 + b^2 + 2ab \cos\gamma}.$$

Výrazy tyto mají jednoduchý geometrický význam.

Nanesme na přímku CA z bodu C na druhou stranu od A úsečku $A'C = CA = b$. Pak má trojúhelník $A'BC$ stejnou plochu jako trojúhelník ABC, strana $A'B = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos\gamma}$ a l jest výškou v tomto trojúhelníku spuštěnou na stranu $A'B$.

Označíme-li pak C'_1 patu této výšky, A'_1 bod ležící na CB, tak že $C'_1A'_1 \parallel A'C$, B'_1 bod na $A'C$, tak že $B'_1C'_1 \parallel CB$, bude $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle CC'_1A'_1 \cong \triangle C'_1B'_1C$.

Přímka $A'B$ má totiž rovnici $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ a přímka CC'_1, poněvadž jde počátkem a stojí kolmo na $A'B$*), má rovnici

$$y = -\frac{a + b \cos \gamma}{b + a \cos \gamma} x,$$

tak že souřadnice bodu C'_1 jakožto průsečíku obou těchto přímek jsou $\left(\frac{ab(b + a \cos \gamma)}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}, \frac{ab(a + b \cos \gamma)}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}\right)$.

28.

V trojúhelníku ABC protíná spojnice středu kruhu opsaného O a průsečíku výšek V stranu AB v bodě, jenž má daný dělicí poměr vzhledem k bodům O a V. Které jest geometrické místo protějšího vrcholu C?

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *V. Steinocher*, stud. VII. g. v Č. Budějovicích.

Označme d_o, d_v vzdálenosti středu kružnice opsané a průsečíku výšek od strany c. Protíná-li přímka OV stranu AB v bodě R a značíme-li λ dělicí poměr $\lambda = \frac{OR}{OV}$, bude též $\lambda = \frac{d_o}{d_v}$.

Lze však snadno vypočítati

$$d_o = \frac{c}{2} \cot g\, \gamma, \quad d_v = \frac{c \cos \alpha \cos \beta}{\sin \gamma},$$

tak že

$$\lambda = \frac{\cos \gamma}{2 \cos \alpha \cos \beta} = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta} = \tfrac{1}{2}(tg\, \alpha\, tg\, \beta - 1).$$

I bude

$$tg\, \alpha\, tg\, \beta = 2\lambda + 1.$$

Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic, jejíž osou x jest strana AB, osou y osa souměrnosti strany AB.

---

*) Podmínka, aby v kosoúhlé soustavě souřadnic dvě přímky

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

stály na sobě kolmo, jest

$$AA' + BB' - (BB' + A'B) \cos(x, y) = 0.$$

Jsou-li x, y souřadnice bodu C, bude

$$tg\,\alpha = \frac{y}{\frac{c}{2} + x}, \qquad tg\,\beta = \frac{y}{\frac{c}{2} - x},$$

tak že rovnice hledaného geometrického místa jest

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(2\lambda + 1)\left(\frac{c}{2}\right)^2} = 1.$$

Rovnice tato představuje:

Při $2\lambda + 1 < 0$, tedy $\lambda < -\frac{1}{2}$ hyperbolu o hlavní ose $AB = \frac{c}{2}$, vedlejší ose $\frac{c}{2}\sqrt{-(2\lambda + 1)}$.

Při $2\lambda + 1 > 0$, tedy $\lambda > -\frac{1}{2}$ ellipsu a to:

při $2\lambda + 1 < 1$, tedy $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$,

ellipsu o hlavní ose AB, vedlejší ose $\frac{c}{2}\sqrt{(2\lambda + 1)}$,

při $2\lambda + 1 = 0$, $\lambda = 0$,

kružnici o poloměru $\frac{c}{2}$ (trojúhelník ABC jest pravoúhlý),

při $2\lambda + 1 > 0$, tedy $\lambda > 0$,

ellipsu o vedlejší ose AB, hlavní ose $\frac{c}{2}\sqrt{2\lambda + 1}$.

29.

Do rovnoběžníku vepište čtverec tak, aby na každé straně rovnoběžníku byl jediný vrchol čtverce.

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Ludvík Krajný,* stud. VII. tř. r. v Příboře.

Do daného rovnoběžníka $ABCD$ budiž vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$, tak že vrchol A_1 leží na straně AB, B_1 na straně BC, C_1 na straně CD, D_1 na straně DA. Vrcholy B_1, D_1 veďme kolmice na strany AB a CD. Tyto kolmice spolu se stranami AB a CD vytvoří čtverec, jehož strana jest rovna vzdálenosti rovnoběžek AB, CD a který tudíž můžeme snadno sestrojiti. Tím dána též konstrukce čtverce hledaného $A_1B_1C_1D_1$.

30.

Do trojúhelníku ABC jest vepsán trojúhelník rovnoramenný, který má vrchol ve středu strany AB a koncové body ramen na stranách BC, AC. Které jest geometrické místo středu jeho podstavy?

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení, částečně dle p. autora.

Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic, jejímž počátkem O jest střed strany AB, vrchol to trojúhelníku rovnoramenného, kladným směrem osy x jest OB, kladný směr osy y zvolen tak, že C leží v prvém neb druhém kvadrantě.

Základna trojúhelníku rovnoramenného nechť jest PQ, bod P na straně AC, bod Q na BC.

Označme úsečky $AP = u$, $BQ = v$.

Pak plyne z rovnosti ramen $OP = OQ$.

$$u^2 - uc \cos \alpha = v^2 - vc \cos \beta \tag{1}$$

Bod P má souřadnice

$$\left(-\frac{c}{2} + u \cos \alpha,\ u \sin \alpha\right),$$

bod Q má souřadnice

$$\left(\frac{c}{2} - v \cos \beta,\ v \sin \beta\right).$$

Souřadnice středu úsečky PQ jsou pak

$$x = \tfrac{1}{2} (u \cos \alpha - v \cos \beta) \tag{2}$$

$$y = \tfrac{1}{2} (u \sin \alpha + v \sin \beta) \tag{3}$$

Rovnici geometrického místa středu podstavy PQ obdržíme, vyloučíme-li u, v z rovnic (1), (2), (3).

Vypočtěme si z rovnic (2), (3)

$$u = \frac{2 (x \sin \beta + y \cos \beta)}{\sin \gamma},\quad v = \frac{2 (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)}{\sin \gamma} \tag{4}$$

Pišme (1) ve tvaru

$$(u + v)(u - v) = c (u \cos \alpha - v \cos \beta).$$

Dosaďme do levé strany z rovnic (4), do pravé z rovnic (2). I obdržíme

$$\left(x\,(sin\,\beta - sin\,\alpha) + y\,(cos\,\beta + sin\,\alpha)\right)\left(x\,(sin\,\beta + sin\,\alpha)\right.$$
$$\left. + y\,(cos\,\beta - cos\,\alpha)\right) = \frac{c}{2}\,sin^2\,\gamma\,x,$$

a z rovnice této plyne po snadné úpravě

$$\left(-x\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2} + y\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left((x\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} + y\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= \frac{c}{4}\,sin\,\gamma\,x. \qquad (5)$$

Otočme osy souřadnic o úhel $\delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Jsou-li transformované souřadnice X, Y, bude

$$x = X\,cos\,\delta - Y\,sin\,\delta, \qquad X = x\,cos\,\delta + y\,sin\,\delta.$$
$$y = X\,sin\,\delta + Y\,cos\,\delta, \qquad Y = -x\,sin\,\delta + y\,cos\,\delta.$$

Nové osy souřadnic X, Y budou rovnoběžné s osami souměrnosti úhlu γ.

Pak nabude rovnice (5) tvaru

$$XY = \frac{c}{4}\,sin\,\gamma\left(X\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} - Y\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

kteroužto rovnici můžeme také psáti

$$\left(X + \frac{c}{4}\,sin\,\gamma\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(Y - \frac{c}{4}\,sin\,\gamma\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= -\frac{c^2}{16}\,sin^2\,\gamma\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{c^2}{16}\,sin^2\,\gamma\,sin\,(\alpha-\beta).$$

Jest to rovnice rovnostranné hyperboly o středu

$$S\left(X_S = -\frac{c}{4}\,sin\,\gamma\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad Y_S = \frac{c}{4}\,sin\,\gamma\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

a asymptotách rovnoběžných s osami X, Y t. j. rovnoběžných s osami souměrnosti úhlu γ.

V soustavě x, y budou souřadnice středu hyperboly S

$$x_S = -\frac{c}{4}\,sin\,\gamma\,sin\,(\alpha-\beta), \qquad y_S = \frac{c}{4}\,sin\,\gamma\,cos\,(\alpha-\beta).$$

Svírá tedy OS s kladným směrem osy x úhel $90^0 + \alpha - \beta$.

Ona rovnostranná hyperbola prochází vrcholem C jakož i bodem O půlícím stranu AB.

Označme V_a, V_b, V_c paty výšek trojúhelníku ABC. Pak jsou trojúhelníky OAV_a, OBV_b, OV_aV_b vepsány předepsaným způsobem trojúhelníku ABC.

Jsou tedy středy výšek AV_a, BV_b jakož i střed O' úsečky V_aV_b body naší hyperboly.

Lze snadno zjistiti, že úhel $BOO' \doteq 90^0 + \alpha - \beta = BOS$ tak že, poněvadž O i O' jsou body hyperboly, jest střed úsečky OO' středem S hyperboly. To plyne ostatně z výrazů pro x_S, y_S, uvážíme-li, že $OV_a = OV_b = \frac{c}{2}$, $\sphericalangle V_bOV_a = 180^0 - 2\gamma$.

31.

V trojúhelníku ABC sklopte stranu AB na AC (resp. BC, CA na BA, CB) a vzniklý bod B_1 (resp. C_1, A_1) spojte s vrcholem B (resp. C, A). Průseky těchto tří přímek určují nový trojúhelník $A_2B_2C_2$. Vyjádřete jeho úhly, strany a obsah pomocí úhlů a stran trojúhelníku původního ABC.

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení.

Označme v trojúhelníku $A_2B_2C_2$: strany a_2, b_2, c_2; úhly α_2, β_2, γ_2, plochu Δ_2.

Určíme nejprvé úhly.

$$\alpha_2 = \sphericalangle A_2AC + \sphericalangle ACA_2 = 90^0 - \frac{\gamma}{2} + \gamma - \left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Podobně

$$\beta_2 = 90^0 - \frac{\beta}{2},\ \gamma_2 = 90^0 - \frac{\gamma}{2}.$$

Stranu $c_2 = A_2B_2$ určíme takto:

$$A_2B_2 = AB_2 - AA_2 = c\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} - (c - a)\,\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Zavedeme-li sem poloměr kružnice opsané, kladouce

$$c = 2r\sin\alpha,\quad a = 2r\sin\alpha$$

a označíme-li dále

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha = m,$$

obdržíme po snadné úpravě

$$a_2 = r\frac{m}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

a podobně

$$b_2 = r\frac{m}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},\quad c_2 = r\frac{m}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Nyní určíme snadno plochu

$$\Delta_2 = \tfrac{1}{2}a^2 b_2 \sin\gamma_2 = \tfrac{1}{2}r^2\frac{m}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

32.

Určiti mocnost středu kružnice trojúhelníku vepsané ke kružnici témuž trojúhelníku opsané a naopak.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *V. Steinocher,* stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích.

Označíme-li r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku, jest mocnost středu kružnice vepsané vzhledem ke kružnici opsané — $2r\varrho$. To lze snadno dokázati. Označme J střed kružnice vepsané, EF průměr kružnice opsané kolmý k tětivě AB (F půlící bod oblouku ACB), D bod, v němž se kružnice vepsaná dotýká strany BC. Pak jest $\triangle CJD \sim \triangle FEB$, tedy $CJ : \varrho = 2r : EB$. Trojúhelník JBE jest rovnoramenný: tudíž $EB = EJ$, tak že $CJ \,.\, JE = 2r\varrho$. Poněvadž bod, střed kružnice vepsané, leží uvnitř kružnice opsané, jest jeho mocnost záporná, tedy $= -\,2r\varrho$. Označíme-li d vzdálenost středu kružnice vepsané od středu kružnice opsané, lze mocnost středu kružnice vepsané vzhledem ke kružnici opsané vyjádřiti výrazem $d^2 - r^2$, z čehož plyne $d^2 = r^2 - 2r\varrho$. Mocnost středu kružnice opsané vzhledem ke kružnici opsané jest pak

$$d^2 - \varrho^2 = r^2 - 2r\varrho - \varrho^2.$$

33.

Dokažte správnost identity

$$tg\,3\alpha = tg\,\alpha\,tg\,(60^0 - \alpha)\,tg\,(60^0 + \alpha)$$

Dr. *Marian Haas.*

Řešení. Zaslal p. *Stanislav Šolta*, stud. VIII. tř. g. v Praze-II. v Žitné ul.

Lze snadno určiti, že

$$tg\,3\alpha = \frac{3\,tg\,\alpha - tg^3\,\alpha}{1 - 3\,tg^2\,\alpha} = tg\,\alpha\,\frac{\sqrt{3} + tg\,\alpha}{1 - \sqrt{3}\,tg\,\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3} - tg\,\alpha}{1 + \sqrt{3}\,tg\,\alpha},$$

tak že skutečně

$$tg\,3\,\alpha = tg\,\alpha\,tg\,(60^0 + \alpha)\,tg\,(60^0 - \alpha).$$

34.

Tři tečny ellipsy tvoří trojúhelník, jehož těžiště jest ve středu ellipsy. Dokažte, že jeho plocha nezávisí na poloze tečen. Které jest geometrické místo jeho vrcholů?

Dr. *Marian Haas.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Janko*, stud. VII. tř. g. v Třebíči.

Považujme danou ellipsu za orthogonálný průmět kružnice K na rovinu E. Při tom průměr kružnice se rovná velké ose ellipsy $2a$. Sklon rovin K a E se určí z rovnice $\cos\varepsilon = \frac{b}{a}$. Střed ellipsy je průmětem středu kružnice. Trojúhelník kružnici opsaný se promítá do roviny E jakožto trojúhelník, jenž je ellipse opsán.

Dále těžnice trojúhelníka má za průmět přímku, která je zase těžnicí průmětu trojúhelníka.

Tudíž těžiště trojúhelníku v rovině K se promítá jako těžiště v rovině trojúhelníku E. Mimo to je známo, že mezi ploským obsahem trojúhelníku a jeho pravoúhlým průmětem jest závislost $\Delta_E = \Delta_K \cos\varepsilon$, tak že v našem případě

$$\Delta_E = \frac{b}{a}\Delta^K.$$

Z toho plyne:

1. Trojúhelník žádané vlastnosti je nutně průmětem rovnostranného trojúhelníka kružnici opsaného, poněvadž jen u rovnostranného splývá těžiště se středem vepsaného kruhu.

2. Ploský obsah rovnostranného trojúhelníku kružnici opsaného jest

$$\Delta_K = 3a^2\sqrt{3},$$

tedy průmět jeho

$$\Delta_E = \frac{b}{a} a^2 3\sqrt{3} = 3ab\sqrt{3},$$

bez ohledu na polohu tečen, jež opsaný trojúhelník tvoří.

3. Geometrické místo vrcholů trojúhelníků rovnostranných, opsaných kružnici (majících tedy těžiště ve středu kružnice vepsané) je kružnice s danou soustředná, jejíž poloměr jest $2a$. Promítneme-li ji do roviny E, jest průmět *ellipsa* s danou soustředná, jejíž poloosy jsou $2a$, $2b$. Tato ellipsa jest pak geometrickým místem vrcholů trojúhelníků dané ellipse opsaných, majících těžiště ve středu ellipsy.

35.

Sestrojiti ellipsu neb hyperbolu, jsou-li dány tečny t_1, t_2, ohnisko F_1, tak aby hlavní osa byla minimální.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení 1. Zaslal p. *Jaroslav Ruda,* stud. VIIb. r. na Král. Vinohradech.

Buďtež P_1, P_2 paty kolmic spuštěných z ohniska F_1 na tečny t_1, t_2. V ellipse neb hyperbole leží paty kolmic spuštěných z ohniska na tečny na kružnici, opsané kol středu poloměrem rovným hlavní poloose. Tato kružnice bude tedy nahoře nutně procházeti body P_1, P_2 a poloměr její bude nejmenší pro bod O půlící úsečku P_1P_2. Je-li $OP_1 > OF_1$, jest hledaná křivka ellipsa, při $OP_1 < OF_1$ hyperbola.

Řešení 2. Zaslal p. *Vlastimil Fiala,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Sestrojme bod G_1 souměrně sdružený s ohniskem F_1 dle tečny t_1 a bod G_2 souměrně sdružený s F_1 dle tečny t_2. Body G_1, G_2 leží na kružnici opsané z druhého ohniska F_2 poloměrem rovným hlavní ose. Poloměr tento bude minimální tehdy, bude-li ohnisko F_2 půliti spojnici $G_1 G_2$. Je-li $F_2 G_1 > F_2 F_1$, vyhovuje úloze ellipsa, je-li $F_2 G_1 < F_2 F_1$, vyhovuje hyperbola.

36.

Které jest geometrické místo půlících bodů úseček procházejících daným bodem (x_0, y_0) a obsažených mezi hyperbolou a její assymptotou.

Dr. *Karel Čupr.*

Řešení. Zaslal p. *Lad. Staněk*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

Asymptoty hyperboly zvolme za osy souřadnic. Rovnice hyperboly jest pak $xy = \frac{e^2}{4}$.

Veďme bodem (x_0, y_0) libovolnou přímku, která protne hyperbolu v bodě (m, n), asymptotu $x = 0$ v bodě $(0, \eta)$.

Budiž (x, y) bod půlící vzdálenost bodů (m, n), $(0, \eta)$. Pak jest

$$2x = m \tag{1}$$

$$2y = n + \eta \tag{2}$$

$$4mn = e^2 \tag{3}$$

$$\eta - y_0 = -\frac{y - y_0}{x - x_0} x_0 \tag{4}$$

Z rovnice (4) vypočteme

$$\eta = \frac{y_0 x - x_0 y}{x - x_0} \tag{5}$$

a dosadíme do rovnice (2)

$$n = \frac{2xy - y_0 x - x_0 y}{x - x_0} \tag{6}$$

Výsledky (1), (6) dosadíme do rovnice (3):

$$2x\,(2xy - y_0 x - x_0 y) = e^2\,(x - x_0). \tag{7}$$

Hledaným geom. místem jest tedy křivka třetího stupně

$$y = \frac{2y_0 x^2 + e^2 x - e^2 x_0}{2x\,(2x - x_0)}.$$

Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojte plochu kulovou, jež procházejíc body a, b, c dělí danou plochu kulovou K v poměru $u : v$.

Prof. *Jos. Doležal.*

Řešení. Zaslal p. *J. Řezníček*, stud. VII. tř. r. v Náchodě.

Hledaná koule **L** rozdělí danou kouli **K** ve dva vrchlíky o výškách resp. x, y. Pak je: $u : v = 2\pi rx : 2\pi ry = x : y$. Všecky roviny, oddělující dva takové vrchlíky, obalí kouli $\mathbf{K}_1$ soustřednou s **K**, dělící její průměr v poměru $u : v$. Tím úloha změněna v tuto: vésti body a, b, c kouli **L**, jejíž chordálná rovina s koulí **K** dotýká se koule $\mathbf{K}_1$.

Střed koule **L** leží na kolmici M vztyčené ve středu kružnice opsané trojúhelníku abc. Chordálné roviny libovolných tří koulí protínají se v přímce. Kol libovolného bodu na M co středu položme kouli **P** jdoucí body abc. Rovina kružnice (**PK**) je jednou, $(abc) \equiv \varrho \equiv (\mathbf{PL})$ druhou rovinou chordální. Průsečnicí obou vedená tečná rovina τ ke $\mathbf{K}_1$ bude třetí; protne **K** v kružnici, ležící na **L**. Kolmice ve středu této kružnice k τ vztyčená seče M ve středu hledané koule **L**. Úloha je dvojznačná.

2.

Zobrazte plochu kulovou, jež procházejíc body a, b, c seče danou rovinu ϱ v kružnici o poloměru r.

Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení 1. Zaslal p. *Miroslav Hrabák*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.

Body (abc) je určena povrchová kružnice K hledané koule **L**, jejíž střed s leží na kolmici M ve středu kružnice K k rov. $\sigma \equiv (abc)$ vztyčené. Veďme přímkou M rovinu $\tau \perp \varrho$. I obdržíme bod $p \equiv (\varrho, \sigma, \tau)$ a přímku $P \equiv (\tau, \varrho)$. Označíme-li pak u, v průsečíky hledané koule **L** s přímkou P, jest $\overline{uv} = 2r$. Mocnost bodu p ke kouli **L** jest $\mathfrak{M}_p = \overline{pm} : \overline{pn} = \overline{pu} : \overline{pv}$, kdež m, n jsou průsečíky kružnice K s přímkou (τ, σ), z čehož pro střed d kružnice koulí **L** v rovině ϱ vyťaté plyne $\overline{pd}^2 = \mathfrak{M}_p + r^2$.

Kolmice v d na ϱ vedená seče M ve středu koule **L**. Řešení dvojznačné.

Řešení 2. Zaslal p. *Jos. Hladík*, stud. VI. tř. r. ve Vel. Meziříčí.

Přímka $A \parallel$ P ležící v ϱ, jejíž vzdálenost od P jest r, bude tečnou koule **L**. Známe tedy: průměr M koule **L** co do polohy, bod koule **L** (na př. a) a tečnu A koule **L**; konstrukce koule **L** je podána v *úloze 7*.

Poznámka: Řešení reálné, pokud $- r^2 < \mathfrak{M}_p$.

3.

Zobrazte rotační plochu kuželovou, dána-li její osa O, jeden bod obliny m a tečna ku oblině T; zobrazte průměty části plochy omezené povrchovou kružnicí bodu m!

Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení. Zaslal p. *L. Staněk*, VII. tř. r. v Litovli.

Bodem m vede se rovina $\varrho \perp O$ a sestrojí se průsečík $(O, \varrho) \equiv s$; kružnice K poloměrem $\overline{sm}$ kol s v ϱ opsaná leží na hledaném kuželi **K**. Je-li T daná tečna, tu tečny P, P' z bodu (T, ϱ) ke K vedené určí dvě tečné roviny kužele: $\tau \equiv (T, P)$, $\tau' \equiv (T, P')$. Body (O, τ), (O, τ') jsou vrcholy obou řešení úlohy.

Poznámka: Řešení dvojznačné a reálné, pouze pokud bod (T, ϱ) padne vně K.

4.

Zobrazte obecnou plochu kuželovou druhého stupně, dán-li její vrchol v, dvě normály N, N' a jedna tečna T.

Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení. Zaslal p. *Jos. Řezníček*, stud. VII. tř. r. v Náchodě.

Vrcholem v vedené roviny $\varrho \perp N$, $\varrho' \perp N'$, $\varrho'' \equiv (v, T)$ jsou třemi tečnými rovinami hledaného kužele **K**. Jsou-li $t_1 \equiv (\varrho, N)$, $t_2 \equiv (\varrho', N')$, jsou $t_1 v$, $t_2 v$ dotyčné površky rovin ϱ, ϱ' s **K**. Protněme celý útvar libovolnou rovinou σ, na př. body t_1, t_2 vedenou a označme: $T_1 \equiv (\varrho, \sigma)$, $T_2 \equiv (\varrho', \sigma)$, $T_3 \equiv (\varrho'', \sigma)$; řídicí kuželosečka L kužele **K** pak je určena tečnami T_1, T_2 s body dotyčnými t_1, t_2 a tečnou T_3. Dotyčný bod t_3 na T_3 dostaneme dle věty Brianchonovy. Přímka t_3 $(T_1 T_2)$ jde průsečíkem přímek t_1 $(T_2 T_3)$ s t_2 $(T_1 T_3)$. V kuželosečce spojnice půlícího bodu tětivy s polem tětivy prochází středem. Z toho plyne konstrukce středu c kuželosečky L: Bod c jest průsečíkem přímek, spojujících střed úseček $t_1 t_2$, $t_2 t_3$, $t_3 t_1$ s body resp. $(T_1 T_2)$, $(T_2 T_3)$, $(T_3 T_1)$. Přímka ct_1 jest průměrem kuželosečky L a přímka $\parallel T_1$ středem c vedená jest průměrem s ct_1 sdruženým. Jak nalézti délku obou sdružených průměrů, je-li bod c v konečnu (L jest ellipsa neb hyperbola) a jak se konstrukce modifikuje při c v nekonečnu (L jest parabola), jest známo. Pan M. Šmejkal, stud. VI. tř. r. v Praze III., užívá při konstrukci tohoto obratu. Rovinu σ totiž místo libovolně vedeme $\parallel \varrho''$, na př. bodem t_1, takže L bude parabolou, jíž známe dvě tečny s dotyčnými body. Střed úsečky, spojující dotyčné body, spojen s průsečíkem obou tečen, dává směr osy. Ohnisko se najde dle věty, že tečna paraboly půlí úhel průvodiče s osou; vrcholová tečna se najde tím, že je úpatnicí tečen paraboly pro ohnisko.

Poznámka. Úlohu, najíti dva sdružené průměry kuželosečky L dané tečnami T_1, T_2 s body dotyčnými, resp. $t_1 t_2$ a třetí tečnou T_3, lze řešiti dle věty, že každou kuželosečku lze uvésti do středové (centrálné) kollineace s kružnicí. Při tom jdou spojnice odpovídajících si bodů kuželosečky a kružnice týmž bodem s a příslušné si přímky se protínají na ose kollineace O. Patrně i kuželosečka i kružnice protínají O v týchž dvou bodech; mimo to tečny ke kuželosečce bodem s vedené musí patrně býti i tečnami kružnice, takže dotyčný bod s kuželosečkou odpovídá dotyčnému bodu s kružnicí. Dle toho přivedeme L do kollineace s nějakou kružnicí K takto: Zvolme kružnici K jdoucí body t_1, t_2 a v t_1 se dotýkající T_1. Bude tedy $t_1 t_2 \equiv O$ osou kollineace, jejíž střed s bude na T_1. Z bodu $(O T_3)$ veďme jednu z obou tečen ke K, na př. T'_3, a v t_2 veďme tečnu T'_2 ke K. Pak patrně T_2, T'_2, T_3, T'_3 jsou dva páry odpovídajících přímek, tedy spojnice bodů $(T_2 T_3)$ $(T'_2 T'_3)$ jde bodem s, který tak známe. Nyní vedeme ke K obě tečny T'_4, T'_5 rovnoběžné s O. Jim odpovídající tečny T_4, T_5 k L jsou rovněž $\parallel O$, neboť T_4 se s T'_4 protíná na O; najdeme je pak tím, že spojnice bodů:

$(T''_4 T''_3)(T_4 T_3)$ jde bodem s; podobně T_5. Jsou-li t'_4, t'_5 dotyčné body tečen T''_4, T'_5 s K, protne st'_4 tečnu T_4 v dotyčném bodě t_4 s L. Podobně t_5. $t_4 t_5$ je tedy průměr sdružený se směrem O. Učiníme-li $\overline{t_4 c} = \overline{ct_5}$, bude c středem kuželosečky L. Délku průměru $\overline{mcn} \parallel O$ najdeme takto: bodu c odpovídá při kružnici bod c', průsečík to přímek $t'_4 t'_5$, sc; protože je $\overline{mcn} \parallel O$, bude i spojnice bodů m', n' procházeti bodem c', a $\parallel O$. Vedu-li tedy bodem c' přímku $m'c'n' \parallel O$, najdu její průsečíky m', n' s K, a sm', sn' protne mcn v hledaných bodech m, n. Řešení jedno a vždy reálné.

5.

Sestrojiti plochu válcovou, jež prochází danou křivkou rovinnou (na př. kružnicí), daným bodem a dotýká se dané přímky.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení 1. Zaslal p. *L. Klajný*, stud. VII. tř. r. v Příboře.

Buď ϱ rovina dané kružnice K. Přímkou T jdoucí tečná rovina τ válce **V** seče ϱ v tečně (τ, ϱ) ke K vedené bodem (T, ϱ); obecně jdou dvě tečné roviny τ, τ'.

Povrchová přímka válce jdoucí bodem a je $\parallel \tau$ a seče K. Vede se tedy bodem a rov. $\sigma \parallel \tau$; průsečíky σ s K spojeny s a dávají dvé řešení směru površek. Rovina τ' skýtá další dvě řešení, celkem čtyři.

Řešení 2. Zaslal p. *J. Ruda*, stud. VII. tř. na Král. Vinohradech.

Má-li: K; a, T, ϱ, τ týž význam jako dříve, veďme bodem a rov. $\sigma \parallel \varrho$. Pronikem σ, **V** je kružnice K', shodná s K jdoucí bodem a a dotýkající se přímky (σ, τ). Středy kružnic K, K' je určen směr povrchových přímek válce. Rovina τ dá dvě kružnice K', rovina τ' též dvě, celkem *čtyři řešení.*

Řešení 3. Jiný význam konstrukci 1. dal p. *M. Dias*, stud. VI. tř. r. v Kroměříži.

Pronik E rov. $\sigma \equiv (a, T)$ s hledaným **V** je ellipsa affinní s K v rovině ϱ. Osou affinity je (σ, ϱ), směrem směr povrchových přímek válce. T je tečnou k E. T' odpovídající T je jedna z obou tečen z bodu (T, ϱ) ke K vedených. Tětivě křivky E bodem a jdoucí $\parallel T$ odpovídá tetiva $\parallel T'$ v křivce K. Ta protne obecně K ve dvou bodech, jichž každého spojnice s a udává jedno řešení. Podobně druhá tečna T' dá dvě řešení.

Poznámka: Kdyby K byla řádu n a třídy m, šlo by z (T, ϱ) ke K m tečen, každá z nich by s T určila tečnou rovinu k **V**; bodem a vedená s ní rovnoběžná rovina by protla K v n bodech; tedy celkem je úloha mn - značná. Některá řešení — a to vždy sudý počet — mohou býti imaginárná.

6.

Sestrojte kouli, která prochází daným bodem P a dotýká se dvou mimoběžek a přímky je protínající.

Prof. *Arnold Budík.*

Řešení Zaslal p. *J. Ruda*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

Buďte a, b mimoběžky, c jich příčka. Místem středů koulí dotýkajících se různoběžek a, c je symetrálná rovina σ obou (dvě roviny σ, σ'); místem středů koulí dotýkajících se přímek b, c je symetrála ϱ (ϱ') obou těchto různoběžek. Tedy průsečnice $o \equiv (\sigma, \varrho)$ (jsou celkem čtyři: $o' \equiv (\sigma, \varrho')$, $o'' \equiv (\sigma', \varrho)$, $o''' (\sigma', \varrho')$) je místem středů koulí a, b, c. Bodem P veď rovinu $\omega \perp o$. ω protne hledanou kouli **K** v kružnici k o středu (ω), jdoucí P. Z bodu (a, ω) vedené tečny ke **K** jsou všecky stejně dlouhé, rovné délce tečny z (a, ω) ke k vedené. Naneseme-li tuto délku na a od (a, ω) (což se může státi na obě strany), dostaneme dotyčný bod t_a. Rovina v t_a vztyčená $\perp$ a seče o ve středu S hledané koule **K**. Řešení je tedy celkem osmiznačné.

Pan *J. Hladík*, stud. VI. r. ve Velkém Meziříčí, podotýká, že najitím přímky o, která je průměrem koule **K**, je tato úloha převedena na *úlohu 7.* a lze ji dále tak řešiti.

Poznámka: Všech osm řešení je reálných.

7.

Sestrojiti kouli, procházející daným bodem a dotýkající se dané přímky, známe-li jeden průměr (co do polohy).

Prof. *Josef Hanuš.*

Řešení. Zaslal p. *F. Matoušek*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

Otočí-li se bod daný m kolem průměru P, vytvoří povrchovou kružnici plochy kulové. Sestrojme průsečík dané tečny T s rovinou oné kružnice a veďme z bodu toho tečny ke kružnici. Přeneseme-li délku této tečny od onoho průsečíku na přímku T, obdržíme bod dotyčný t. Vedeme-li bodem tímto rovinu kolmou ku tečně T, protíná tato rovina osu P ve středu s žádané plochy kulové. Poloměr její $r \equiv st$. Úloha jest dvojznačná, jelikož délku tečny lze přenésti na tečnu T ve dvojím směru.

Jiné řešení zaslal p. *L. Klajný*, stud. VII. r. v Příboře.

Označme daný bod m, tečnu T a přímku, která jest průměrem co do polohy P.

Rovina $\varrho \equiv (T, m)$ protne **K** v kružnici L, jdoucí bodem m a dotýkající se T. Střed kružnice L bude na pravoúhlém průmětu M přímky P do roviny ϱ. Sestrojíme přímku S souměrně s T položenou vzhledem k M. Nyní v ϱ sestrojíme kružnici L, jdoucí bodem m a dotýkající se přímek T, S. Střed koule je na kolmici v středu L vztyčené k ϱ. Úloha je dvojznačná.

Poznámka: Úloha je možná, pokud: V prvém řešení jsou obě tečny kružnice K reálné; a v druhém řešení, pokud bod m leží v témž úhlu přímek T, S jako M.

8.

Dán jest rotační kužel a uvnitř libovolný bod F; má se určiti rovina ϱ tak, aby její průsek s kuželem byla kuželosečka, jejímž ohniskem jest bod F.

Prof. *Josef Hanuš.*

Řešení. Zaslal p. *J. Ruda*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

K řešení se užije věty Dandelinovy. Dle ní máme do kužele vepsati kouli jdoucí daným bodem F. Úlohu sestrojíme dle věty, že všecky koule jsou podobné a podobně položené [1]). Pak

[1]) Nejlépe pomocnou průmětnou jdoucí bodem F a osou O, již volíme $\perp \pi$.

v F vedeme tečnou rovinu ϱ ke kouli a ta rovina dle věty Dandelinovy protne kužel v hledané kuželosečce. Úloha je dvojznačná, protože bodem F jdou dvě koule do kužele vepsané.

9.

V prostoru dána jest libovolná přímka a mimo ni dva libovolné body. Sestrojiti jest rotační paraboloid, který danými body prochází a jehož osou jest daná přímka.

Prof. *Jos. Hanuš.*

Řešení. Zaslal p. *M. Dias*, stud. VIa. tř. r. v Kroměříži.

Buď O daná přímka, a, b dané body. Jimi jdou na hledaném paraboloidu **P** dvě povrchové kružnice, jichž roviny jsou $\perp$ O a jichž středy leží na O. Libovolná osou O jdoucí rovina seče onen paraboloid v parabole P a ony kružnice ve čtyřech bodech $a'a''$, $b'b''$ po dvou souměrně dle osy O ležících. Body $(a'b', a''b'') \equiv q$, $(a'b'', a''b') \equiv p$ leží na O a polára Q bodu q ku P jde bodem $p \perp O$; t. j. $\overline{pq}$ je subtangentou jisté tečny paraboly a tedy střed v této úsečky vrcholem. Tím je parabola P určena.

Jiné řešení zaslal p. *K. Setínek*, stud. VII. r. v Bučovicích.

Vrchol v paraboly P body $a'a''$, $b'b''$ jdoucí a mající O za osu ustanovíme pomocí věty Pascalovy.

Poznámka: při tom označíme v libovolném pořádku body $a'a''$, $b'b''$ číslicemi 1 2 3 4, úběžný bod osy O číslicí 5 a $v \equiv 6$.

10.

Povrchové přímky daného rotačního kužele tvoří s rovinou půdorysnou úhel 60^0; *mají se určiti ony tečné roviny kužele, jež jsou k oběma průmětnám stejně nakloněny.*

Prof. *Jos. Hanuš.*

Řešení 1. Zaslal p. *L. Staněk*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

Budiž v vrchol daného kužele. Všechny dotyčné roviny k němu vedené svírají s π úhel 60^0. Mají-li též s ν svírati týž úhel, musí býti tečnými ke kuželi shodnému, o vrcholu v a ose $\perp$ ν.

Společné tečné roviny budou tečnými rovinami bodem v položenými ke dvěma shodným koulím **K**, **K**$_1$, po jedné do každého z obou kuželů vepsaným. Takové tečné roviny jsou čtyři, dvě jdou přímkou vrcholem v vedenou rovnoběžně se společnou centrálou obou koulí, druhé dvě jdou spojnicí v s půlicím bodem úsečky spojující středy obou koulí.

Řešení 2. Zaslal p. *J. Řezníček*, stud. VII. r. v Náchodě.

K sestrojení společných tečných rovin obou kuželů protněme oba rovinou ϱ, protínající osy obou kuželů v bodech stejně od společného vrcholu v vzdálených [1]). Průsečné křivky jsou dvě shodné ellipsy podobně položené o společné ose, neboť relativní poloha roviny ϱ k oběma kuželům je táž. Společná osa je $\perp X_{12}$. Ze společných tečen těchto ellips jsou dvě rovnoběžné se společnou osou a druhé dvě jdou středem podobnosti v konečnu. Každou touto tečnou a vrcholem je určena jedna hledaná rovina. Úloha čtyrznačná.

Jiné řešení zaslal p. *K. Lamser*, stud. VII. r. v Bučovicích.

Hledaná rovina je patrně kolma k přímce, svírající úhly 30^0 s oběma průmětnami. Takové přímky jsou čtyři (můžeme je na př. vésti vrcholem v) a hledané roviny bodem v jdoucí a k nim kolmé jsou také čtyři.

Pan *F. Rosenbach*, stud. VII. reálky v Pardubicích, zaslal následující řešení:

Roviny stejně k oběma průmětnám skloněné jsou kolmé buď k rovině souměrnosti nebo k rovině totožnosti. Vedeme-li tedy vrcholem v přímku $A \perp$ k rov. souměrnosti a $B \perp$ k rovině totožnosti a položíme těmito přímkami všecky čtyři tečné roviny k danému kuželi, jsou tyto roviny hledanými.

Poznámka: Protože A i B padnou vně daného kužele, jsou všecky čtyři roviny reálné.

Z fysiky.

1.

Částice hmoty m nachází se v rovnováze v bodě N na přímce, na níž nacházejí se po obou jejích stranách dvě pevná attrakční centra O a O', jimiž je přitahována silou rovnou $m \,.\, \mu^n \,.\, (vzdálenost)^n$ a $m \,.\, \mu_1^n \,.\, (vzdálenost)^n$. Je-li n positivní

[1]) ϱ je $||$ s rovinou souměrnosti neb totožnosti, ostatně libovolná.

dokažte, že koná částice byvši velmi málo z rovnovážné polohy v N vychýlena pohyb harmonický kolem zmíněného bodu, a vyčíslete dobu oscillační. *Red.*

Řešení, jež zaslal p. *Theodor Mastný* ze VII. gymn. v Praze v Žitné ulici.

Budiž $NO = r$, $NO' = r_1$. Je-li x výchylka částice směrem k O, je urychlení

$$\gamma = \mu_1^n (r_1 + x)^n - \mu^n (r - x)^n$$
$$= \mu_1^n r_1^n + \binom{n}{1} \mu_1^n r_1^{n-1} x + \binom{n}{2} \mu_1^n r_1^{n-2} x^2 + \dots$$
$$- \mu^n r^n + \binom{n}{1} \mu^n r^{n-1} x - \binom{n}{2} \mu^n r^{n-2} x^2 + \dots$$

Ježto v bodě N jest rovnováha, platí $\mu_1^n r_1^n = \mu^n r^n$. Zanedbáme-li při velmi malém x všechny vyšší mocnosti počínaje druhou, zbývá $\gamma = n\,(\mu^n r^{n-1} + \mu_1^n r_1^{n-1})\,x$. Urychlení jest úměrno výchylce z rovnovážné polohy, a ježto jest n positivní, směřuje k ní. Částice koná tedy pohyb harmonický o době kmitové

$$T = 2\pi \,.\, \sqrt{\frac{x}{\gamma}} = \frac{2\pi}{\sqrt{n\,(\mu^n r^{n-1} + \mu_1^n r_1^{n-1})}}.$$

2.

Kyvadlové hodiny zpozďují se denně o 5 vteřin; oč musí kyvadlo býti zkráceno, mají-li jíti správně? *Red.*

Řešení, jež zaslal p. *Theodor Mastný* ze VII. gymn. v Praze v Žitné ulici.

Je-li l délka kyvadla daného a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ jeho doba kyvu a podobně l_0 délka kyvadla zkráceného (správného) a

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} = 1$$

jeho doba kyvu, platí

$$T : T_0 = 24 \,.\, 60^2 : (24 \,.\, 60^2 - 5).$$

Z toho plyne

$$l : l_0 = 86400^2 : 86395^2 = 1{\cdot}000115.$$

Jest tudíž $l_0 = \frac{l}{1{\cdot}000115}$ či přibližně

$$l_0 = l\,(1 - 0{\cdot}000115).$$

Zkrácení musí obnášeti $115 \,.\, 10^{-6}$ původní délky kyvadla.

3.

Olověná krychle o hraně rovné 4 cm má býti ve vodě vyvážena (suspendována) zavěšením na korkovou kouli. Jak veliký musí býti poloměr této, je-li spec. hmota korku $0{\cdot}24 \frac{gr}{cm^3}$, *olova* $11{\cdot}35 \frac{gr}{cm^3}$? *Red.*

Řešení, jež zaslal p. *Mojmír Horák* ze VII. gymn. v Kroměříži.

Nazveme-li hranu krychle $l = 4 cm$, poloměr koule x, specifické hmoty

vody $\sigma = 1 \frac{gr}{cm^3}$, olova $S = 11{\cdot}35 \frac{gr}{cm^3}$ a korku $s = 0{\cdot}24 \frac{gr}{cm^3}$

a konečně urychlení zemské tíže g, musí dle zákona Archimedova celkový vztlak býti roven celkové váze krychle a koule, to jest

$$\left(l^3 + \frac{4}{3}\pi x^3\right)\sigma g = l^3 S g + \frac{4}{3}\pi x^3 s g,$$

z čehož

$$x^3 = \frac{l^3 (S - \sigma)}{\frac{4}{3}\pi(\sigma - s)}.$$

Dosazením hodnot plyne $x = 5{\cdot}926\ cm$.

4.

Pod zvoncem vývěvy nacházejí se správné váhy, na nichž jsou zavěšeny dvě krychle; prvá má hranu 3 *cm a váží* 26·324 *grammů, druhá o hraně* 5 *cm váží* 26·2597 *grammů. Při jistém zředění vzduchu nastane na vahách rovnováha; jaký je tlak v tom okamžiku?* *Red.*

Řešení, jež zaslal p. *Ludvík Krajný* za VII. reál. v Příboře.

Budiž specifická váha vzduchu při vážení σ_0, objem první krychle $V_1 = a_1^3$, objem druhé krychle $V_2 = a_2^3$. Jsou-li P_1 a P_2 váhy krychlí za těchto poměrů, M_1 a M_2 váhy jejich ve vakuu, platí

$$P_1 = M_1 - V_1\sigma_0 \qquad P_2 = M_2 - V_2\sigma_0.$$

Za jistého zředění, když spec. váha vzduchu klesne na hodnotu σ, budou obě váhy stejné, to jest

$$M_1 - V_1\sigma = M_2 - V_2\sigma \quad \text{čili} \quad \sigma = \frac{M_1 - M_2}{V_1 - V_2}.$$

Dosazením za M_1 a M_2 plyne

$$\sigma = \frac{P_1 - P_2 + \sigma_0 (V_1 - V_2)}{V_1 - V_2}.$$

Výsledek patrně závisí na poměrech, jež stávaly za prvého vážení; zde předpokládáme poměry normálné, tlak $b_0 = 760$ *mm* rtuti, teplotu 0^0 *C* a tedy $\sigma_0 = 0{\cdot}001293$ *gr*-závaží.

Dosazením hodnot plyne $\sigma = 0{\cdot}000637$ *gr*-závaží, a ježto dle zákona Boyle-Mariotteova $\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{b_0}{b}$ plyne pro tlak pod recipientem za rovnováhy $b = 374{\cdot}4$ *mm*.

5.

Bublina mydlinová v průměru 8 *cm naplněná směsí jednoho objemu vodíku (hutnost vzhledem ke vzduchu* = 0·0693) *a patnácti objemů vzduchu (spec. hmota* 0·001293 $\frac{gr}{cm^3}$) *právě plove ve vzduchu. Je-li specif. hmota roztoku mydlinového* 1·1 $\frac{gr}{cm^3}$, *vypočtěte tloušťku stěn bubliny!* *Red.*

Řešení, jež zaslal p. *Lad. Staněk* ze VII. reál. v Litovli.

Zveme-li poloměr bubliny r, její tloušťku x, hutnost vodíku δ, tedy jeho hmotu specifickou $\sigma_1 = \delta \,.\, \sigma$, kde σ je specif. hmota vzduchu a s spec. hmotu roztoku mydlinového, jest

váha uzavřeného vzduchu $\frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \,.\, \sigma \,.\, g$,

váha uzavřeného vodíku $\frac{1}{16} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \,.\, \delta \,.\, \sigma \,.\, g$,

váha obalu bubliny $\frac{4}{3} \pi (r^3 - (r - x)^3) \,.\, s \,.\, g = 4\pi r^2 x \,.\, s \,.\, g$

a vztlak na bublinu působící $\frac{4}{3} \pi r^3 \,.\, \sigma \,.\, g$.

Dle zákona Archimedova

$$4\pi r^2 x \sigma g + \frac{15}{15}\frac{4}{3} \pi r^3 \sigma g + \frac{1}{16}\frac{4}{3} \pi r^3 \delta \sigma g = \frac{4}{3} \pi r^3 \sigma g.$$

V rovnici je až na x vše známo. Dosazením plyne hodnota

$$x = 0{\cdot}000912 \ mm.$$

6.

Jaká vertikální síla musí působiti na vrchní dno skleněného válce, jenž spodním (otevřeným) koncem ponořen jest pod hladinu rtuťovou a jest úplně rtutí naplněn, vyčnívá-li jeho dno o 18 cm nad hladinu rtuťovou a je-li atmosférický tlak dán rtuťovým sloupcem 77 cm? Vlastní váhu a tloušťku válce zanedbejte, jeho vnitřní průměr jest 6 cm. *Red.*

Řešení, jež zaslal p. *Miloš Šmejkal* ze VI. reál. v Praze-III.

Na hoření dno válce působí směrem dolů tlak, daný vahou sloupce rtuťového, výšky $b = 77$ *cm*; směrem vzhůru působí tlak sloupce rtuťového výšky $b - h = (77 - 18)$ *cm*, neboť v horizontální rovině uvnitř rtuti válce v téže výši, jako jest vnější hladina rtuti, působí směrem nahoru tlak barometrický. Odpovídá tedy přetlak směrem dolů tlaku sloupce rtuťového výšky 18 *cm* a síla vertikální směrem nahoru, jež mu drží rovnováhu, jest

$$\pi r^2 \,.\, h \,.\, s \,.\, g,$$

kde s jest specifická hmota rtuti.

Dosazením

$$s = 13{\cdot}6 \,\frac{g}{cm^3}, \quad r = 3\ cm, \quad h = 18\ cm, \quad g = 981 \,\frac{cm}{sec^2}$$

plyne, že jest rovna 6·79 megadyn čili 6·921 *kg*-závaží, vlastní váze zvednuté rtuti

7.

Jaká musí býti tloušťka drátu železného a měděného, jež jsouce stejně dlouhé a napjaté dávají týž tón? Spec. hmota železa je 7·8 a mědi 8·8 $\frac{gr}{cm^3}$. *Red.*

Řešení, jež zaslal p. *Ladislav Staněk* ze VII. reál. v Litovli.

Výška základního lomu napiaté struny jest dána vzorcem Taylorovým

$$N = \frac{1}{2l} \,.\, \sqrt{\frac{P}{q \,.\, s}},$$

kde l jest délka, q průřez, s specifická hmota struny, P síla napínající. Dle podmínek úlohy má pro drát prvý a druhý

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{q_1 s_1}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{q_2 s_2}},$$

to jest $q_1 s_1 = q_2 s_2$ a tedy jsou-li d_1 a d_2 průměry drátů

$$d_1 : d_2 = \sqrt{s_2} : \sqrt{s_1}$$

čili v daném případě

$$\frac{d_{Fe}}{d_{Cu}} = \frac{1 \cdot 062}{1}.$$

8.

Tekutý fosfor ochladí se na 30° C a v okamžiku, kdy začne tuhnouti, se přenechá sám sobě — tepelně se isoluje. Ztuhne všechen či jen jeho část? Kolikátá část zůstane tekutou? Skupenské teplo tání je 5·4 a teplo specifické 0·2

Red.

Řešení, jež zaslal p. *Karel Teige* z VIII. gymn. v Praze v Žitné ulici.

Budiž M hmota látky o bodu tání T, přechlazené na teplotu $t < T$, σ její skupenské teplo tání, C teplo specifické. Množství látky, jež ztuhne, budiž x. Při tom vydá množství tepla $x \, . \, \sigma$, jež se spotřebuje na zvýšení teploty veškeré látky z t na T, takže

$$x \, . \, \sigma = MC\,(T - t) \text{ čili } x = \frac{C}{\sigma}\,(T - t) \, . \, M.$$

V daném případě, předpokládáme-li bod tání $T \doteq 44^0$, plyne $x = \frac{14}{27} M$; tedy $\frac{14}{27}$ původního množství fosforu ztuhne, $\frac{13}{27}$ zůstane tekutým.

9.

Najděte vztah pro krajní hodnotu lomeného úhlu φ hranolu o indexu lomu n, při níž dopadající paprsek právě ještě vystupuje druhou plochou z hranolu. Pod kterým úhlem vystoupí první paprsek dovnitř hranolu odražený z jeho třetí plochy, je-li tato kolmá na rovině půlící úhel lámavý. *Red.*

Řešení:

Lámavý (v textu úlohy tisk. chybou „lomený") úhel hranolu φ z látky o indexu lomu n bude maximální tehdy, vstupuje-li paprsek do plochy prvé pod dopadovým úhlem $\alpha = 90^0$ a vystupuje-li z plochy druhé pod týmž úhlem $\alpha' = 90^0$. Je-li úhel lomu u plochy prvé β a úhel dopadu na plochu druhou uvnitř hranolu β', platí všeobecně

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \qquad \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = n \qquad \beta + \beta' = \varphi$$

a dle uvedeného tedy

$$\sin\beta = \frac{1}{n} \qquad \sin\beta' = \frac{1}{n} \qquad \beta = \beta' \quad \varphi = 2\beta.$$

Při tom jde paprsek uvnitř hranolu v minimu deviace, rovnoběžně s plochou třetí. Pro prvý paprsek na druhé ploše odražený je úhel odrazu $\beta'' = \beta'$, úhel dopadu na plochu třetí tedy

$$\frac{\pi}{2} - (\beta' + \beta'') = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

a úhel lomu z třetí plochy ven γ dán vztahem

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{\sin\gamma}{\cos\varphi} = n$$

čili

$$\sin\gamma = n \,.\, \cos 2\beta = n(1 - 2\sin^2\beta) = n - \frac{2}{n}.$$

10.

Dynamo 130-voltové napájí 1000 šestnáctisvíčkových žárovek. Jak silného proudu je k tomu potřebí, absorbuje-li každá žárovka 3·6 Wattů na jednu svíčku. Jak silný motor musí dynamo hnáti, počítáme-li na veškeré ztráty 20°/₀ původní energie motoru, a co by stál elektrický pohon tohoto motoru, účtuje-li se (v Praze) za jednu kilowatt-hodinu 0·20 K?

Red.

Řešení, jež zaslal p. *Gustav Měska* z VIII. gymn. v Příbrami.

Celková energie pro žárovky potřebná jest 3·6 . 1000 . 16 = 57600 Watt = 57·6 kilowatt. Při napětí 130 Volt je potřebí proudu $\frac{57600}{130} = 443$ Amper. Motor musí dodávati $\frac{57 \cdot 6}{0 \cdot 8} = 72$ kilowatt, což stojí v Praze 72 . 0·2 = 14·4 korun za hodinu.

Řešení úloh zaslali:

P. *Jaroslav Beneš*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—12., 15., 17.–21., 23.—25., 27.—36., f. 1.—10.,
p. *Jaroslav Brček*, VII. r. I. v Plzni
m. 1., 2., 4., 14., 25., 33., d. 1.—3., 5.—10.,
p. *František Cipro*, VII. g. v Praze, v Křemencové ul.
m. 1., 2., 4., 8., 33., f. 2., 3., 5.,
p. *Eduard Čech*, VII. g. v Hradci Králové
m. 1.—3., 5., 8., 13., 14., 17.—19., 22., 25.,
p. *Miloslav Dias*, VI. r. v Kroměříži.
m. 1.—5., 8., 13., 19., 21., 22., 25., 29., 33. d. 1.—10.
p. *Josef Drlík*, V. r. v Příboře
m. 1., 2., 21., 25.,
p. *Vlastimil Fiala*, VII. r. v Pardubicích
m. 1., 2., 4., 8., 13., 14., 17.—20., 25., 26., 29., 33., 35., d. 1.—10.,
p. *Fr. Frydrych*, VII. r. v Hradci Králové
d. 1.—5., 9., 10.,
p. *Josef Glogar*, VIII. g. v Mor. Ostravě
m. 8., f. 2., 3., 7.,
p. *Oldřich Hanuš*, VII. r. v Lounech
d. 9., 10.,
p. *Josef Hladík*, VI. r. ve Velkém Meziříčí
m. 1., 2., 8., d. 2., 3., 5.—8.,
p. *Jaroslav Horák*, VII. g. v Něm. Brodě
m. 33., f. 2., 3.,
p. *Mojmír Horák*, VII. g. v Kroměříži
m. 1., 3., 5., 6., 8., 13.—21., 33., f. 1.—10.,
p. *Miroslav Hrabák*, VII. r. v Prostějově
m. 1.—4., 13., 15.—22., 25., 33., 35., d. 1.–10., f. 1.—10.,
p. *Jaroslav Janko*, VII. g. v Třebíči
m. 1., 2., 4., 8., 13.—15., 17., 19., 22., 33., 34., f 2. 3., 5.–7.,
p. *Ludv. Krajný*, VII. r. v Příboře
m. 1.–6., 8., 10.–23., 25., 26., 28., 29., 30., 31., 33., 35., d. 1.—9., f. 2.—5., 7., 10.,
p. *Václav Lamser*, VII. r. v Bučovicích
m. 1., 13., 25., 33., 35., d. 2., 3., 5.–8., 10.,
p. *Jan Marek*, VIII. g. v Táboře
m. 28., 30., 33., f. 2., 3., 5.—10.,
p. *J. Mařík*, V. g. v Praze III.
d. 9., f. 5.,

p. *Theodor Mastný*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—8., 13.—20., 22., 23., 25., 27.—35., d. 1.—10.,
p. *František Matoušek*, VI. r. v Kutné Hoře
m. 1., 2., 4., 5., 8., 9., 13., 14., 18.—23., 25., 26., 31.—36., d. 1.—10.
p. *B. Mendl*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—36., f. 1.—10.,
p. *Gustav Měska*, VIII. g. v Příbrami
f. 1.—10.,
p. *Otto Mizera*, VI. r. v Kutné Hoře
m. 25., d. 2.—5., 8., f. 2., 3.,
p. *J. Pazourek*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 4., 8., 18., 25., f. 3., 7.,
p. *Adolf Plaček*, VII*b* r. na Král. Vinohradech
m. 1., 8., 13., 14., 19., 22., 25., 33., 35., d. 2., 3., 5., 10., f. 3., 7.,
p. *Viktor Polanský*, VII. r. v Bučovicích
d. 7., 8.,
p. *František Reich*, VII. r. v Bučovicích
m. 1., 4., 25., 33., d. 3., 5.—8., 10.,
p. *F. Rosenbach*, VII*b* r. v Pardubicích
d. 3., 5.—8., 10.,
p. *Jaroslav Ruda*. VII*b* r. na Král. Vinohradech
m. 3., 4., 19., 25., 35., d. 1.—10.,
p. *Jan Řehoř*, V*b* g. v Českých Budějovicích
m. 1., 2., 4.—8., 11., 13.—15., 19.—22., 25., 29., 32., 33., 35., d. 1.—10., f. 2., 3., 7.,
p. *Josef Řezníček*, VII. r. v Náchodě
m. 1., 8., 9., 23., 25., 33., f. 1., 3.—5., 10., d. 1.—10.,
p. *Karel Setínek*, VII. r. v Bučovicích
m. 1., 4, 13., 25., 33., 35., d. 2., 3., 5.—10.,
p. *Al. Singer*, VII. r. v Písku
m. 1., 33, d. 2., 3., 5.—8., f. 2.—8., 10.,
p. *Jan Sitko*, VII. g. v Kroměříži
m. 1., 8., f. 2., 3., 6.,
p. *Josef Sklenář*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 8., 18.,
p. *J. Skořepa*, VII*b* r. na Žižkově
d. 1.—3., 5., 7.—10.,
p. *Fr. Soukup*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 7.,
p. *Vojtěch Soukup*, VII*b* r. v Praze, v Ječné ul.
d. 1.—10.,

p. *Lad. Staněk,* VII. r. v Litovli
m. 1.—36., d 1.—10., f. 1.—10.,
p. *Václav Steinochr,* VII. g. v Českých Budějovicích
m. 1.—8., 13.—15.. 19.—23., 25., 27., 28., 30.—33., 35., 36., f. 2.—5., 7.—10.,
p. *Miloš Šmejkal,* VI*b* r. v Praze III.
f. 2.—6., 10., d. 1.—7., 9., 10.,
p. *Stanislav Šolta,* VII. g. v Praze. v Žitné ul.
m. 1.—6., 8., 10., 13., 16.—18., 20., 22., 23., 25., 27., 28., 30., 33.—35., f. 1.—10,
p. *V. Štěrba,* V. g. v Českých Budějovicích
m. 4., 8., 21., 25.,
p. *Miroslav Šubert,* VI. g. v Něm. Brodě
m. 31.,
p. *Karel Teige,* VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—36., f. 1.—10.,
p. *Václav Tesař,* V. r., bytem v Praze II.
m. 1., 14.,
p. *Jos. Váňa,* VII. g. v Pelhřimově
m. 1., 33., f. 3., 5.,
p. *J. Vaverka,* VI. r. v Novém Městě na Moravě
m. 33., d. 3., 5., 10., f. 1., 2., 3., 5.,
p. *Jan Zlatník,* VII. g. v Hradci Králové
m 1., 2., 5., 6., 8., 14., 19., 20., 22.,
p. *Jan Zubík,* VI*b* r. v Praze III.
m. 1.—8., 10.—15., 17., 19.—25., 27.—36., d. 1.—10., f. 1.—10.,
p. *Václav Žák,* VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 6.,
Nepodepsaný z reálky v Jičíně
m. 1., 8.—11., 14., 21., d. 2., 3., 5.

Udělení cen.

Z mathematiky:

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto pp. řešitelům ceny vypsané výborem „Jednoty českých mathematiků“.

Ceny první:

Jaroslav Beneš, VIII. g. v Praze v Žitné ul.
Mojmír Horák, VII. g. v Kroměříži.

Ludvík Krajný, VII. r. v Příboře.
Theodor Mastný, VII. g. v Praze v Žitné ul.
František Matoušek, VI. r. v Kutné Hoře.
B. Mendl, VIII. g. v Praze v Žitné ul.
Jan Řehoř, V*b* g. v Českých Budějovicích.
Lad. Staněk, VII. r. v Litovli.
Václav Steinocher, VII. g. v Českých Budějovicích.
Stanislav Šolta, VII. g. v Praze v Žitné ul.
Karel Teige, VIII. g. v Praze v Žitné ul.
Jan Zubík, VI*b* r. v Praze III.

Ceny druhé:

Eduard Čech, VII. g. v Hradci Králové.
Miloslav Dias, VI. r. v Kroměříži.
Vlastimil Fiala, VII. r. v Pardubicích.
Miroslav Hrabák, VII. r. v Prostějově.
Jaroslav Janko, VII. g. v Třebíči.
Adolf Plaček, VII*b* r. na Král. Vinohradech.
Jan Zlatník, VII. g. v Hradci Králové.

Ceny třetí:

Jaroslav Brček, VII. r. I. v Plzni.
František Cipro, VII. g v Praze v Křemencové ul.
Josef Drlík, V. r. v Příboře.
Václav Lamser, VII. r. v *Bučovicích.*
J. Pazourek, VIII. g. v Praze v Žitné ul.
Jaroslav Ruda, VII*b* r. na Král. Vinohradech.
Josef Řezníček, VII. r. v Náchodě.
Karel Setínek, VII. r. v Bučovicích.

Spis: Dr. F. Studnička: Úvod do nauky o determinantech (Sborník J. Č. M. č. III.) obdrží pp.: *B. Mendl, Lad. Staněk, Karel Teige.*

Z deskriptivní geometrie:

Spis: J. Sobotka: Deskriptivní geometrie promítání parallelního (Sborník J. Č. M. č. X.) obdrží p. *Jaroslav Ruda.*

Spisy: Jarolímek: Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné I., II., III.; Jarolímek: Deskriptivní geometrie v úlohách pro vyšší školy reálné obdrží pp.: *Miloslav Dias*, *Vlastimil Fiala*, *František Matoušek*, *Jan Řehoř*, *Josef Řezníček*, *Vojtěch Soukup*, *Lad. Staněk*, *Miloš Šmejkal*, *Jan Zubík*.

Pánové *Josef Řezníček* a *Lad. Staněk* obdrží nad to spis: Cremona-Weyr: Úvod do geometrické theorie křivek rovinných.

Z fysiky:

Spis: Dr. V. Strouhal: Akustika (Sborník J. Č. M. č. VI.) obdrží

p. *Theodor Mastný* ze VII. gymn. v Praze, v Žitné ulici.

Spisy: Briot-Pšenička: Mechanická theorie tepla a Nábělek: O hvězdách. Nebeské hodiny. Praktické poučení, jak možno užíti hvězdného nebe jako hodin a kalendáře, obdrží pp.:

Jaroslav Beneš z VIII. gymn. v Praze v Žitné ul.
Mojmír Horák ze VII. gymn. v Kroměříži.
Jan Marek z VIII. gymn. v Táboře.
B. Mendl z VIII. gymn. v Praze v Žitné ulici.
Gustav Měska z VIII. gymn. v Příbrami.
Alois Singer ze VII. reál. v Písku.
Lad. Staněk ze VII. reál. v Litovli.
Stan. Šolta z VIII. gymn. v Praze v Žitné ul.
Karel Teige z VIII. gymn. v Praze v Žitné ul.
Jan Zubík ze VI*b* reál. v Praze III.