Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Čuřík

Příspěvek k Bernoulliho theoremu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 5, 590--597

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122267

1832: *Taylor* (Results of Astr. Observations, vol. 3. Madras 1836) 8·595″

1849: *Bond* (The astronomical Journal edidet by Gould, V, 1857) 8·605″ ± 0·4

1862: *Liais* (Note sur la vitesse de la lumière ... Comp. Rend. LX) 8·76″

1877: *Hall M.* (Determination of the solar parallax ... M. R. A. S. XLIV) 8·789″ ± 0·06

Gill (Account of a determination... Month. Not. XLI) 8·78″ ± 0·01

Při stanovení konečné hodnoty nepřihlížíme k prvním určením, ježto nebyla provedena s dostatečnou přesností. Z opposice r. 1849 ponecháme pouze hodnotu *Hallovu* a *Newcombovu*, ježto ostatní materiál byl při tom vzat již v úvahu, z opposice r. 1877 odpadá hodnota *Stoneho*, ježto zaujímá jen část pozorování užitých *Eastmanem*. Střed z opposice z r. 1832 a 1829 jest 8·845″, střed z opposice z r. 1862 a 1877 jest 8·844″; hodnoty ty jsou identické, a poněvadž prvá skupina sama o sobě dává značně různé hodnoty, vynecháme ji, a udělíme-li zbývajícím hodnotám váhy nepřímo úměrné čtvercům pravděpodobných chyb, obdržíme pro parallaxu sluneční z pozorování Marta hodnotu

$$\pi_0 = 8{\cdot}802'' \pm 0{\cdot}005''.$$

(Dokončení v ročníku příštím.)

Příspěvek k Bernoulliho theoremu.

F. Čuřík

Ku odvození důležité věty apriorní pravděpodobnosti, známé i pode jménem „zákon velkých čísel“, jejíž interessantní applikaci mimo mathematickou statistiku nalézáme v kinetické theorii plynů (Bolzmana, Gastheorie, str. 39. a násl.), použil Laplace jednak vzorce Stirlingova ku vyjádření fakult, jednak Eulerova summačního vzorce, podávajícího součet řady ve formě omezeného integrálu. V následujícím ukážeme, kterak poněkud delší cestou, avšak do jisté míry elementárněji dospějeme hned k širšímu výsledku Eggenbergerovu.

Pravděpodobnost, že v $s = m + n$ případech nastane m-krát zjev A a n-krát zjev B, je dána, jak známo, obecným členem binomického rozvoje $\sum_{n=0}^{n=s} (s)_n p^m q^n$, kdež p a q jsou apriorní konstantní pravděpodobnosti zjevu A, resp. B, a ovšem $p + q = 1$.

Přímé použití vzorce

$$\frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$$

ku stanovení jednotlivých pravděpodobností naráží při poněkud větším s na ohromné obtíže. Známe-li však jeden člen rozvoje, vypočteme sousední snadno, neboť podíl jejich je číslem poměrně malým. Pak možno i graficky zobraziti tento vzor Lexisovy normální disperse, t. j. seskupení jednotlivých možných případů kolem pravděnejpodobnějšího.

Označíme-li členy

$$\ldots, \binom{s}{n-l} p^{m+l} q^{n-l}, \ldots; \binom{s}{n-1} p^{m+1} q^{n-1}, \binom{s}{n} p^m q^n,$$
$$\binom{s}{n+1} p^{m-1} q^{n+1}, \ldots, \binom{s}{n+l} p^{m-1} q^{n+1}, \ldots$$

k vůli stručnosti

$$\ldots, T_l, \ldots T_1, T_0, T_{-1}, \ldots, T_{-l},$$

při čemž maximální člen T_0 udává i pravděnejpodobnější hodnoty m a n, jest

$$T_1 < T_0 > T_{-1}.$$

Z těchto nerovnic plyne

$$\frac{T_1}{T_0} < 1 > \frac{T_{-1}}{T_0},$$

čili

$$\frac{m+1}{n}\frac{q}{p} > 1, \quad \frac{n+1}{m}\frac{b}{q} > 1,$$

a po další úpravě meze pro m

$$sp - q < m < sp + p,$$

lišící se o jedničku. Pro maximální člen T_0 jest tedy m rovno nebo v okolí sp, n rovno nebo v okolí sq.

Sledujme dále podíl

$$\frac{T_l}{T_0} = \frac{m!\, n!}{(m+l)!\,(n-l)!}\left(\frac{p}{q}\right)^l$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-l+1)}{(m+l)(m+l-1)\dots(m+1)}\left(\frac{p}{q}\right)^l.$$

Čitatel i jmenovatel prvního zlomku mají l faktorů. Dělíme-li oba n^l a dle předcházejícího dosadíme pro maximum hodnoty

$$m = sp,\; n = sq,$$

obdržíme

$$\frac{T_l}{T_0} = \frac{\left(1-\frac{1}{sq}\right)\left(1-\frac{2}{sq}\right)\dots\left(1-\frac{l-1}{sq}\right)}{\left(\frac{p}{q}+\frac{l}{sq}\right)\left(\frac{p}{q}+\frac{l-1}{sq}\right)\dots\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{sq}\right)}\left(\frac{p}{q}\right)^l.$$

Vytkněme ve jmenovateli $\left(\frac{p}{q}\right)^l$ a kraťme; pak jest

$$\frac{T_l}{T_0} = \frac{\left(1-\frac{1}{sq}\right)\left(1-\frac{2}{sq}\right)\dots\left(1-\frac{l-1}{sq}\right)}{\left(1+\frac{l}{sp}\right)\left(1+\frac{l-1}{sp}\right)\dots\left(1+\frac{1}{sp}\right)}.$$

Za účelem další redukce položme

$$\prod_{k=1}^{l-1}\left(1-\frac{k}{sq}\right) = e^u, \qquad \prod_{k=1}^{l}\left(1+\frac{k}{sp}\right) = e^v,$$

tak že

$$\frac{T_l}{T_0} = e^{u-v}. \tag{1}$$

Logarithmujeme-li hořejší součiny a vyvineme logarithmy v řady, máme:

$$u = \sum_1^{l-1} log\left(1-\frac{k}{s}\right) = \sum_1^{l-1}\left\{-\frac{k}{sq}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{sq}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{k}{sq}\right)^3-\dots\right\}$$

$$v = \sum_1 log\left(1+\frac{k}{sp}\right) = \sum_1^{l}\left\{\frac{k}{sp}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{sp}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{sp}\right)^3-\dots\right\}$$

Jednotlivé řady konvergují, neboť $\frac{k}{sq}$; $\frac{k}{sp}$ zůstávají ryzími zlomky.

Uspořádáme-li dále součty, máme

$$u = -\frac{1}{sq}\sum_1^{l-1} k - \frac{1}{2(sq)^2}\sum_1^{l-1} k^2 - \frac{1}{3(sq)^3}\sum_1^{l-1} k^3 - \dots$$

$$v = \frac{1}{sp}\sum_1^{l} k - \frac{1}{2(sp)^2}\sum_1^{l} k^2 + \frac{1}{3(sp)^3}\sum_1^{l} k^3 - \dots$$

a rozdíl obou řad

$$u - v = -\frac{1}{spq}\left(p\sum_1^{l-1} k + q\sum_1^{l} k\right) - \frac{1}{2(spq)^2}\left(p^2\sum_1^{l-1} k^2 - q^2\sum_1^{l} k^2\right)$$

$$-\frac{1}{3(spq)^3}\left(p^3\sum_1^{l-1} k^3 - q^3\sum_1^{l} k^3\right) - \dots$$

Jednotlivé součty možno různým způsobem určiti. Obecný vzorec pro součet stejných mocností prvých k celých čísel podává součtový vzorec Mac Laurinův. Vzhledem k dalšímu vypíšeme pouze první člen posledního rozdílu, nezapomínajíce však, že součet celistvé funkce n-tého stupně jest celistvou funkcí stupně $(n+1)$ho.

Jest tedy:

$$u - v = -\frac{1}{spq}\left\{p\frac{l(l-1)}{2} + q\frac{l(l+1)}{2}\right\} - \dots$$

$$u - v = -\frac{l^2}{2spq}(p+q) + \frac{l}{2spq}(p-q) - \dots$$

Předpokládejme dále, že rostoucím s vzrůstá i odchylka l od počtu případů m v maximálním členu a že při $lim\ s = \infty$, je současně $lim\ l = \infty$, avšak řádu $\sqrt{s}$. Pro tento mezní případ všecky členy pravé strany až na prvý vymizí, neboť jedině v něm jsou při hořejším předpokladu čitatel a jmenovatel nekonečně velkými téhož řádu, kdežto ve všech ostatních je jmenovatel nekonečně velkým řádu vyššího než čitatel.

Jest tedy

$$lim\,(u - v) = -lim\,\frac{l^2}{2spq}$$

aneb dle rovnice (1), vynecháme-li symbol limity,

$$T_l = T_0\, e^{-\frac{l^2}{2spq}}. \qquad (2)$$

Tím způsobem je vyjádřen libovolný člen T_l spojitou funkcí odchylky l. Křivka ji zobrazující jest symmetrickou ku maximální pořadnici T_0. Poněvadž s je vždy velké, applikujeme tuto interpolující funkci na všecky praktické případy. Nejprv třeba stanoviti T_0. Pravděpodobnost, že odchylka zůstane v mezích $l \ldots l + dl$, bude teď dána výrazem

$$T_l\,dl = T_0\,e^{-\frac{l^2}{2spq}}\,dl$$

a jistota, že zůstane v celém rozsahu od $-\infty$ do ∞, bude vyjádřena integrálem

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} T_l\,dl = T_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{l^2}{2spq}}\,dl$$

čili

$$1 = \sqrt{2spq}\;T_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{l^2}{2spq}}\,d\frac{l}{\sqrt{2spq}} = \sqrt{2spq}\;T_0\sqrt{\pi},$$

z čehož konečně

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}.$$

Vlastním problémem však jest určiti pravděpodobnost, že odchylka l zůstane v daných, předem určených mezích.

Pravděpodobnost, že zjev A na $2l$ rozličných způsobů nastane, je vyjádřena dle principu totální pravděpodobnosti součtem jednotlivých pravděpodobností

$$\overset{l}{\underset{-l}{P}} = T_{-l} + T_{-l+1} + \ldots T_0 + T_1 + \ldots + T_l = \sum_{-l}^{l} T_k.$$

K určení jednotlivých pravděpodobností použijeme nalezeného vzorce (2), pro nějž v naší řadě argument postupuje přirozenou řadou celých čísel.

Euler ve svém díle Institutiones calculi differentialis v odstavci Investigatio summae serierum ex termino generali vychází od řady pro $f(x-1)$. Abychom hořejší součet vyjádřili omezeným integrálem, zaveďme v Taylorově řadě

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots +$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + R_n$$

do zbytku

$$R_n = \frac{1}{1 \, . \, 2 \ldots (n-1)} \int\limits_0^h t^{n-1} f^{(n)} (x + h - t) \, dt$$

novou proměnnou substitucí

$$t = h(1-u).$$

Tím přejde zbytek na tvar

$$R_n = \frac{h^n}{1 \, . \, 2 \ldots (n-1)} \int\limits_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)} (x + hu) \, du.$$

Omezíme-li se jen na dva členy rozvoje a zbytek, máme

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \int\limits_0^1 (1-u) f''(x+hu) \, du.$$

Násobme dh a integrujme v takových mezích, aby prvý člen pravé strany zůstal nezměněn a druhý člen aby vymizel. Takové meze jsou $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$; tedy

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+h) \, dh = f(x) \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dh + f'(x) \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h^2 \, dh$$

$$+ \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h^2 \, dh \int\limits_0^1 (1-u) f''(x+hu) \, du,$$

z čehož

$$f(x) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+h) \, dh - \int\limits_0^1 (1-u) \, du \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f''(x+hu) h^2 \, dh.$$

Součet funkce v intervallu $-l \ldots +l$ bude pak dán vzorcem

$$\sum_{-l}^{l} f(x) = \int\limits_{-l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} f(x+h) \, dh$$

$$- \int\limits_0^1 (1-u) \, du \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{-l}^{l} f''(x+hu) \, h^2 \, dh. \qquad (3)$$

Podle první věty o středních hodnotách omezeného integralu

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

kdež $\quad \xi = a - \Theta(b-a) \;$ a $\; 0 < \Theta < 1,$

při čemž oba faktory $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou v integračním intervallu konečné a spojité, a mimo to jeden z nich, $\psi(x)$, má v něm stálé znamení, možno v druhém členu pravé strany rovnice (3) psáti integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{-l}^{l} f''(x+hu)\,h^2\,dh$$

$$= \sum_{-l}^{l} f''\left(x+\Theta_1 u - \frac{u}{2}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h^2\,dh = \frac{1}{12}\sum_{-l}^{l} f''\left(x+\Theta_1 u - \frac{u}{2}\right).$$

Dle téže věty bude celý druhý člen

$$\int_0^1 (1-u)\,du\,\frac{1}{12}\sum_{-l}^{l} f''\left(x+\Theta_1 u - \frac{u}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\sum_{-l}^{l} f''\left(x+\Theta_1\Theta_2 - \frac{\Theta_2}{2}\right)\int_0^1 (1-u)\,du = \frac{1}{24}\sum_{-l}^{l} f''(x+\vartheta),$$

značí-li krátce $\vartheta = \Theta_1\Theta_2 - \frac{\Theta_2}{2}$ ryzí, teď kladný nebo záporný zlomek. Rovnice (3) přejde tím na tvar

$$\sum_{-l}^{l} f(x) = \int_{-l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} f(x+h)\,dh - \frac{1}{24}\sum_{-l}^{l} f''(x-\vartheta).$$

Vyměníme-li v integralu x za h a pak klademe $h = 0$, obdržíme nový vzorec, který dá se i geometricky interpretovati, při čemž druhý člen udává chybu při sečítání ploch obdélníků.

Dle toho pak je v našem případě, uvážíme-li ještě, že funkce (2) je sudá, pravděpodobnost

$$\underset{-l}{\overset{l}{P}} = 2T_0 \sum_0^l e^{-\frac{x^2}{2spq}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}}\int_0^{l+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2spq}}\,dx$$

$$+ \frac{1}{12}\,\frac{1}{spq\sqrt{2\pi spq}}\sum_0^l e^{-\frac{(x+\vartheta)^2}{2spq}}\left\{1 - \frac{(x+\vartheta)^2}{spq}\right\}.$$

Hodnota druhého členu pravé strany v posledním výrazu, zvláště při učiněném předpokladu, že počet pozorovaných případů s je veliké číslo, je velmi malá; lze jej tudíž vynechati.

Klademe-li pak v prvním integrálu

$$\frac{x^2}{2spq} = t^2,$$

obdržíme konečně

$$\overset{l}{\underset{-l}{P}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l+\frac{1}{2}}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2}\, dt$$

jakožto pravděpodobnost, že počet případů zjevu A zůstane v mezích $sp \mp l$.

Kdybychom poslední integrál vyvinuli podle přírůstku horní mezi, obdrželi bychom v prvním členu rozvoje obecně běžný, známý vzorec

$$\overset{l}{\underset{-l}{P}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{l}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2}\, dt.$$

Věstník literární.

Recense knih.

Prof. *Dr. E. Gehrcke*: **Die Strahlen der positiven Elektrizität.** Mit 43 Figuren und 2 Tafeln. Lipsko, S. Hirzel 1909, XII + 124 str.; cena váz. 5·50 M.

Když počátkem let devadesátých století právě minulého bylo pokusy Perrinovými a Lenardovými bezpečně dokázáno, že paprsky kathodové jsou částice záporně elektrické uvedené v pohyb kolmo ke kathodě následkem spádu potenciálního ve výbojové rouře, bylo nutno odpověděti k otázce, zdali existují též paprsky, jež by byly tvořeny částicemi kladně elektrickými a vystupovaly v rourách výbojových z anody obdobně jako paprsky kathodové z kathody. Podati důkaz, že paprsky takovými jsou paprsky objevené již roku 1886 Eugenem Goldsteinem a nazvané paprsky kanálové, povedlo se koncem let devadesátých (r. 1898) professorovi W. Wienovi. Ježto tedy professor Goldstein jest prvním objevitelem paprsků positivní elektřiny, dedikuje mu autor spisu, jemuž tyto řádky jsou věnovány, svou práci, jejímž úkolem jest podati přehled všech hlavních výtěžků vědeckého badání o paprscích positivní elektřiny až do doby nejnovější. Látku rozdělil si spisovatel ve tři díly, jež se skládají z jedenácti kapitol.