Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 1, 27--32

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122300`

Drobné zprávy.

Napsal

prof. **Eduard Weyr.**

Důkaz o transcendenci čísla e podal nejprve *Hermite* v krásném pojednání „Sur la fonction exponentielle", Comptes rendus 1873; pan David *Hilbert* předložil r. 1893 Gottinkské Společnosti nauk (Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π) zjednodušený důkaz, zároveň s důkazem o transcendenci čísla π, zjednodušiv takto též úvahy p. F. *Lindemanna*, jenž první dokázal, že irracionalita π není algebraická (Mathem. Annalen t. XX.). Pan A. *Hurwitz* konečně poukázal k tomu (Göttinger Nachr. 1893 a Comptes rendus 1893, 17 avril), že lze důkaz páně *Hilbertův* v příčině čísla e upraviti takovým způsobem, by se zakládal jen na elementárných částech počtu differencialného, a mohl býti pojat i do počátečných výkladův o počtu infinitesimalném. Důkaz takto zjednodušený jest tento:

Budiž $f(x)$ racionalná celistvá funkce stupně r a položme

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(r)}(x);$$

pak platí totožnost

$$D_x[e^{-x}F(x)] = -e^{-x}f(x).$$

Applikujeme-li nyní známou rovnici

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\vartheta x), \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

na funkci $e^{-x}F(x)$, máme

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -e^{-\vartheta x}f(\vartheta x)\,x,$$

aneb

$$\text{(A)} \qquad F(x) - e^{x}F(0) = -xe^{(1-\vartheta)x}f(\vartheta x).$$

Předpokládejme nyní, že by platila rovnice

$$\text{(B)} \qquad C_0 + C_1e + C_2e^2 + \ldots + C_ne^n = 0,$$

v níž značí C_0, C_1, ..., C_n čísla celistvá, z nichž první C_0 lze patrně předpokládati jakožto kladné a různé od nully.

Označme literou p číslo kmenné větší než C_0 i než n, a položme

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \dots (n-x)^p,$$

a applikujme na tuto funkci formuli (A), kladouce v ní posloupně $x = 1, 2, \dots, n$. Tím nabýváme

$$F(k) - e^k F(0) = \varepsilon_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

kde

$$\varepsilon_k = -ke^{(1-\vartheta)k} \frac{(\vartheta k)^{p-1} (1-\vartheta k)^p (2-\vartheta k)^p \dots (n-\vartheta k)^p}{(p-1)!}$$

s rostoucím p se stává libovolně malým.*)

Hodnoty F(0), F(1), ..., F(n) jsou celistvá čísla, z nichž první není dělitelným číslem p, ostatní však jsou všecka dělitelna číslem p; obdržíme totiž patrně F (k), vyvineme-li $f(k+h)$ dle mocnosti h a nahradíme-li v rozvinutí mocnosti h, h^2, h^3, ... resp. čísly 1!, 2!, 3! ...**) Vložíme-li nyní

$$e^k = \frac{F(k) - \varepsilon_k}{F(0)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

---

*) Stačí uvážiti, že

$$|(1-\vartheta k)(2-\vartheta k) \dots (n-\vartheta k| < a,$$

kde a značí určité číslo, a že tedy

$$\left|\frac{(1-\vartheta k)^p (2-\vartheta k)^p \dots (n-\vartheta k)^p}{(p-1)!}\right| < a \frac{a}{1} \frac{a}{2} \dots \frac{a}{p-1}.$$

**) Snadno nalezneme

$$F(0) = (1.2 \dots n)^p,$$
$$F(1) = (-1)^p p (1.2 \dots \overline{n-1})^p,$$
$$F(2) = (-1)^p p 2^{p-1} (1.2 \dots \overline{n-2})^p, \text{ atd.}$$

do rovnice (B), obdržíme

$$C_0 F(0) + C_1 F(1) + \ldots + C_n F(n) = \varepsilon_1 C_1 + \ldots + \varepsilon_n C_n ,$$

tedy dle pravé strany číslo při rostoucím p libovolně malé; ježto levá strana je číslem celistvým, soudíme, že platí

$$C_0 F(0) + C_1 F(1) + \ldots + C_n F(n) = 0 ,$$

jakmile p přesáhne jistou mez. Rovnice ta není však možna, poněvadž v levo jsou všecky členy dělitelny p, vyjma první. Jest tedy také rovnice (B) nemožna a transcendence čísla e dokázána.

Napsal dr. **Gustav Gruss.**

Určení světlosti planet. Professor G. *Müller* v Postupími spracoval dlouholetá pozorování světelných poměrů planet a diskusse těchto vedla k těmto výsledkům. K vypočtení světlosti (h) (Lichtstärke) planet pro kterýkoliv čas platí vzorce pro

$$\text{Merkura}\begin{cases} h = -1{,}041 + C + 0{,}03679\,(\alpha - 50) \\ h = -0{,}901 + C + 0{,}02838\,(\alpha - 50) \\ \quad + 0{\cdot}0001023\,(\alpha - 50)^2 \end{cases} C = \frac{1}{0{,}4} \log \frac{r^2 \Delta^2}{r_0^2},$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Venuši} & h = -4{,}707 + C + 0{,}01322\,\alpha \\ & \quad + 0{,}0000004247\,\alpha^3 \\ \text{Marse} & h = -1{,}787 + C + 0{,}01486\,\alpha \\ \text{Jupitera} & h = -2{,}233 + C \\ \text{Saturna} & h = 0{,}877 + C + 0{,}0436\,\alpha \\ & \quad - 2{,}5965 \sin A \\ & \quad + 1{,}2526 \sin^2 A \\ \text{Urana} & h = 5{,}863 + C \\ \text{Neptuna} & h = 7{,}661 + C \end{array}\right\} C = \frac{1}{0.4} \times \log \frac{r^2 \Delta^2}{r_0^2 (r_0 - 1)^2};$$

r jest vzdálenost planety od slunce, Δ od země; r_0 jest střední vzdálenost planety od slunce, α jest úhel *fáse*, příslušný vzdálenostem r a Δ, t. j. úhel při planetě v trojúhelníku: slunce-planeta-země; A při Saturnu značí vyvýšení země nad rovinou kruhovou.

Pro *asteroidy* platí vzorce:

Ceres	$h = 6{,}909 + C + 0{,}0423\,\alpha$
Pallas	$h = 7{,}557 + C + 0{,}0424\,\alpha$
Vesta	$h = 6{,}006 + C + 0{,}0266\,\alpha$
Hebe	$h = 8{,}528 + C + 0{,}0362\,\alpha$
Iris	$h = 8{,}457 + C + 0{,}0186\,\alpha$
Flora	$h = 8{,}928 + C + 0{,}0269\,\alpha$
Metis	$h = 8{,}699 + C + 0{,}0414\,\alpha$
Irene	$h = 9{,}638 + C + 0{,}0343\,\alpha$
Eunomia	$h = 8{,}856 + C + 0{,}0283\,\alpha$
Massalia	$h = 9{,}175 + C + 0{,}0262\,\alpha$
Lutetia	$h = 10{,}091 + C + 0{,}0357\,\alpha$
Amphitrite	$h = 8{,}898 + C + 0{,}0246\,\alpha$
Fides	$h = 10{,}409 + C + 0{,}0291\,\alpha$
Laetitia	$h = 9{,}667 + C + 0{,}0223\,\alpha$
Harmonia	$h = 9{,}314 + C + 0{,}0182\,\alpha$
Daphne	$h = 11{,}036 + C + 0{,}0282\,\alpha$
Nausikaa	$h = 9{,}633 + C + 0{,}0239\,\alpha$

$$C = \frac{1}{0{\cdot}4} \times \log \frac{r^2 \Delta^2}{r_0^2 (r_0 - 1)^2};$$

h jest vyjádřeno ve všech vzorcích v třídách velikosti.

Vyjímaje *Jupitera*, *Urana* a *Neptuna* veškeré planety ukazují změny jasnosti, závislé na fási; změny ty dají se jednoduchými křivkami znázorniti. Při *Jupiteru* není znamenati žádných měn jasnosti, rovněž při Uranu a Neptunu.

Měny jasnosti z pozorování odvozené nedají se žádnou z posavadních theorií vyjádřiti, ani Eulerovou ani Lambertovou ani Seeligerovou. Na blízku opposice jsou pozorované měny jasnosti celkem větší než theoretické, ve velké vzdálenosti od opposice jest tomu naopak. Tvar empirické křivky světelné blíží se téměř při všech planetách přímce. Dle velikosti měn v světlosti (vyjímáme Saturna, Urana a Neptuna) stojí v popředí *Jupiter* s nepatrnými změnami světlosti, jichž nelze z pozorování ani odvoditi; pak následuje *Venuše* a *Mars*, na to *asteroidy* a pak *Merkur*, jenž jeví v mezích fáse od 50° do 120° shodu s měsícem. Z toho se soudí, že *Merkur* a *asteroidy* nemají buď *žádné* neb *velmi řídké atmosféry* jako měsíc; že Jupiter jest obklopen neobyčejně hustou atmosférou a že Venuše a Mars mají ovzduší střední, podobné našemu ovzduší zemskému.

Při velkých planetách, hlavně při Jupiteru, jevilo se v jednotlivých rocích kolísání měn jasnosti, o jichž příčině nelze rozhodnouti, zdaž souvisela s periodickými měnami průhlednosti atmosfér neb s měnami světlosti slunce.

Na základě světlostí, odvozených z hořeních vzorců pro vzdálenosti 1 planet od slunce a země a pro plné osvětlení, plyne pro *relativní albedo* (t. j. číslo udávající, kolikráte planeta jedna jest jasnější než planeta jiná, jsou-li obě z plna osvětleny, jestli obě se předpokládají ve vzdálenosti 1 od slunce a v takových vzdálenostech od země, že jich zdánlivé průměry jsou stejné) tento přehled:

Relativní albedo	
Merkur	0,64
Venuše	3,44
Mars	1,00
Jupiter	2,79
Satúrn	3,28
Uran	2,73
Neptun	2,36.

Dle této tabulky Venuše a Saturn má největší schopnosť světlo odrážeti, Merkur nejmenší.

Pro malé planety nelze určiti albedo z *měření fotometrických*, poněvadž nejsou jich průměry známy.

Poněvadž povrch Marse má největší podobnost s povrchem naší země, zvoleno bylo *albedo* Marse za jednotku.

(Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 30. Achten Bandes viertes Stück. Helligkeitsbestimmungen der grossen Planeten u. einiger Asteroiden. Von G. *Müller*. Potsdam 1893).

Největší lesk Venuše. Poněvadž zákon vyjadřující závislost světlosti na fási není posud přesně znám, odchylovala se udání doby největšího lesku dle zákona, který se za základ položil.

G. *Müller* podal přehled výsledků dle jednotlivých thorií v tabulce, takže největší lesk jest:

Dle vzorů:	úhlu fáse	počet dnů před neba po dolení konjunkci	největší jasnost	
Halley-ova	117°56′	36	4·263	v jednotkách jasnosti horní konjunkce.
Lambert-ova	103 46	51	2·126	
Bremiker-ova	115 15	39	2·772	
Seeliger-ova	116 0	38	3·018	

Na základě (158) vlastních pozorování světlosti Venuše při úhlech fáse mezi 22·5° a 157·5° z doby 1877—1891 ukázal G. *Müller*, že pozorováním nevyhovuje žádná theorie.

Z empirického vzorce:

$$h = -4{\cdot}707 + 0{\cdot}01322\,\alpha + 0{\cdot}0000004247\,\alpha^3 - 5 \lg r_0 + 5 \lg r + 5 \lg \Delta$$

(viz určení světlosti planet) plyne *úhel fáse α pro největší lesk Venuše α = 118° 37·1′*. Epochy největšího lesku jsou *35·6 dnů* vzdáleny od dolení konjunkce (je-li země a Venuše v střední vzdálenosti) a největší lesk se rovná pak *— 4·3* (třídy velikosti; poměr dvou po sobě jdoucích tříd jest 2·512, jasnost polárky = 2·15 tříd, α Aquilae jest hvězda *prvé* velikosti; α Canis maioris (Sirius) hvězda — **1.** velikosti).

(*Astronomische Nachrichten Bd. 132. č. 18, 1893.*)