Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Řešení lineárních rovnic vektorových o jedné neznámé. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 139--153

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122324

a, a_1, b opatřme si dva sdružené póly p, q na X_1 podle úl. 1., načež $\overline{o_1 v} = -\overline{o_1 w} = \sqrt{\overline{o_1 p} \, . \, \overline{o_1 q}}$ stanoví vrcholy ellipsy K na ose X_1. Obdobně stanovíme vrcholy ellipsy L', otočíme je kol S do roviny τ zpět atd. Výsledkem je rotační ellipsoid.

Dodatek. Známa je konstrukce poloos hyperboly a, b, dány-li asymptoty její M, N (obr. 13.), tudíž i osy její X, Y a jeden bod křivky c. Vedeme-li bodem c kolmici ku X, která protne asymptoty v bodech r, s, bude $b^2 = \overline{cr} \, . \, \overline{cs}$. Tuto konstrukci odvozuje K. Pelz ve svých „Přednáškách" pomocí průseku rotačního kužele s rovinou (viz také *G. P.* IV. na str. 7. dole). Užitím věty z naší úlohy 8. možno konstrukci odůvodniti rovinnou geometrií synthetickou: vedeme-li $\overline{cp} \parallel M$, $\overline{cq} \parallel N$, budou p, q sdružené póly na ose Y, pročež $b^2 = \overline{op} \, . \, \overline{oq}$, a protože $\overline{op} = \overline{rc}$, $\overline{oq} = \overline{sc}$, jest $b^2 = \overline{rc} \, . \, \overline{sc}$.

Z b, M, N sestrojíme již snadno poloosu hlavní a. Přímá konstrukce je tato: $\overline{ceg} \perp Y$. $a = \overline{ct} = \sqrt{\overline{ce} \, . \, \overline{cg}}$. Důkaz: body h, j $(\overline{cj} \parallel N)$ jsou sdružené póly na ose X, tedy $a^2 = \overline{oh} \, . \, \overline{oj}$; ale $\overline{oh} = \overline{ec}$, $\overline{oj} = \overline{gc}$, tedy $a^2 = \overline{ec} \, . \, \overline{gc}$.

Řešení lineárních rovnic vektorových o jedné neznámé.

Napsal vl. rada **Ant. Libický**.

(Dokončení.)

5. Řešení každé rovnice skalární, která má tvar složitější než rovnice (1), (5) a (9), lze uvésti na řešení těchto jednoduchých rovnic. Jakých obratů se při tom používá, poznáme nejlépe z těchto příkladů:

Příklad 1.

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \, . \, \mathbf{b} = m. \tag{14}$$

Ježto dle *V. A.*, pag. 18

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \, . \, \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \, . \, \mathbf{x},$$

lze tuto rovnici psáti též ve tvaru

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \, . \, \mathbf{x} = m;$$

nahradíme-li tu součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorem $\mathbf{c} = (ab \sin \widehat{\mathbf{ab}}) \, \mathbf{c}_1$, kolmým k rovině vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, nabudeme rovnice

$$\mathbf{c} \, . \, \mathbf{x} = m,$$

jejíž řešení bylo provedeno v odst. 1. Řešení není tedy určité: kořenů jest nesčíslné množství a koncové body jejich leží v rovině kolmé k $\mathbf{c}$ ve vzdálenosti od počátku rovné

$$\frac{m}{ab \sin \widehat{\mathbf{ab}}}$$

jednotkám délkovým. Vyplývá to též z toho, že dle významu skalárního součinu tří vektorů žádá se řešením rovnice (14), aby ustanovena byla z obsahu rovnoběžnostěnu a jeho základny hrana třetí; patrně leží jeho protější základna v rovině rovnoběžné k základně spodní ve vzdálenosti rovné výšce rovnoběžnostěnu.

Podobným způsobem řeší se rovnice

$$\mathbf{x} \,.\, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = m \quad \text{nebo} \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{x}] \,.\, \mathbf{b} = m.$$

Příklad 2.

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \,.\, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = m. \tag{15}$$

Položme na levé straně za součin $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ vektor $\mathbf{d}$, kolmý k rovině vektorů $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$, jehož délka jest $bc \sin \widehat{\mathbf{bc}}$ a jednotkový vektor $\mathbf{d}_1$; tím obdržíme rovnici

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \,.\, \mathbf{d} = m,$$

kterou jsme řešili v příkladě 1.

Podobně řeší se rovnice téhož tvaru (15), v nichž však neznámý vektor $\mathbf{x}$ jest na druhém, třetím nebo čtvrtém místě levé strany.

Příklad 3. Je-li řešiti složitější rovnici skalární

$$m(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a}) + n[\mathbf{x} \times \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{c} + p[\mathbf{x} \times \mathbf{d}] \,.\, [\mathbf{e} \times \mathbf{f}] + q = 0, \tag{16}$$

změníme přiměřeně některé členy její levé strany. Tak ve druhém členu užijme vzorce 14 *V. A.* (str. 18), dle něhož

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{c} = \mathbf{x} \,.\, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}];$$

ve třetím členu nahraďme součin $\mathbf{e} \times \mathbf{f}$ vektorem $\mathbf{g}$, kolmým k $\mathbf{e}$ a $\mathbf{f}$, a píšeme

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{d}] \,.\, \mathbf{g} = \mathbf{x} \,.\, [\mathbf{d} \times \mathbf{g}].$$

Těmito přeměnami vznikne rovnice

$$m(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a}) + n\mathbf{x} \,.\, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + p\mathbf{x} \,.\, [\mathbf{d} \times \mathbf{g}] = -q$$

čili, vytknouce na levé straně vektor **x**,

$$\mathbf{x} \,.\, (m\mathbf{a} + n\,[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + p\,[\mathbf{d} \times \mathbf{g}]) = -\,q.$$

Sečteme-li vektory v závorkách a označíme-li součet ten

$$m\mathbf{a} + n[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + p[\mathbf{d} \times \mathbf{g}] = \mathbf{s},$$

obdržíme rovnici

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{s} = -\,q,$$

čímž jest převedena rovnice (16) na tvar (1), který řešíme dle odst. 1.

Kdyby v dané rovnici (16) neznámý vektor **x**, vyskytující se v součinech na levé straně, byl na jiném místě než na prvém, můžeme součiny ty přetvořiti tak, aby byl na místě prvém. Použijeme při tom známých vzorců:

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{x} \,.\, \mathbf{a},$$

$$[\mathbf{b} \times \mathbf{x}] \,.\, \mathbf{c} = [\mathbf{x} \times \mathbf{c}] \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{x} \,.\, [\mathbf{c} \times \mathbf{b}],$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{x} \,.\, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}],$$

$$[\mathbf{d} \times \mathbf{x}] \,.\, [\mathbf{e} \times \mathbf{f}] = [\mathbf{d} \times \mathbf{x}] \,.\, \mathbf{g} = [\mathbf{x} \times \mathbf{g}] \,.\, \mathbf{d} = \mathbf{x} \,.\, [\mathbf{g} \times \mathbf{d}],$$

je-li $\mathbf{g} = \mathbf{e} \times \mathbf{f}$,

$$[\mathbf{d} \times \mathbf{e}] \,.\, [\mathbf{x} \times \mathbf{f}] = \mathbf{h} \,.\, [\mathbf{x} \times \mathbf{f}] = [\mathbf{x} \times \mathbf{f}] \,.\, \mathbf{h} = \mathbf{x} \,.\, [\mathbf{f} \times \mathbf{h}],$$

$$[\mathbf{d} \times \mathbf{e}] \,.\, [\mathbf{f} \times \mathbf{x}] = \mathbf{h} \,.\, [\mathbf{f} \times \mathbf{x}] = \mathbf{x} \,.\, [\mathbf{h} \times \mathbf{f}],$$

je-li $\mathbf{h} = \mathbf{d} \times \mathbf{e}$.

Z příkladu toho jest patrno, jak jest postupovati, je-li řešiti skalární rovnici tvaru jakéhokoli.

II. Řešení rovnic vektorových.

6. Abychom řešili vektorovou rovnici tvaru

$$m\mathbf{x} - n\mathbf{a} - p\mathbf{b} - q\mathbf{c} - \ldots = 0, \tag{17}$$

ustanovíme

$$\mathbf{x} = \frac{n}{m}\mathbf{a} + \frac{p}{m}\mathbf{b} + \frac{q}{m}\mathbf{c} + \ldots$$

a sečteme vektory na pravé straně, přihlížejíce k jich směru i délce.

Jestliže ve zvláštním případě

$$m = n + p + q + \ldots,$$

jest

$$\mathbf{x} = \frac{n\mathbf{a} + p\mathbf{b} + q\mathbf{c} + \ldots}{n + p + q + \ldots},$$

čímž určen jest střed hmot $n, p, q \ldots$, umístěných v koncových bodech vektorů **a**, **b**, **c** ...

7. *a*) Rovnici

$$(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a})\, \mathbf{b} = \mathbf{m} \tag{18}$$

může býti vyhověno, mají-li vektory **b** a **m** týž směr, tedy také týž vektor jednotkový. Položíme-li tudíž $\mathbf{b} = b\mathbf{b}_1$, $\mathbf{m} = m\mathbf{b}_1$, změní se tato rovnice v

$$b\,(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a}) = m$$

čili

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} = \frac{m}{b},$$

pročež řešení rovnice (18) převedeno jest na řešení skalární rovnice 1 (odst. 1.).

b) Rovnici

$$(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a})\, \mathbf{c} + (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{b})\, \mathbf{d} = \mathbf{m} \tag{19}$$

(v níž **c**, **d** a **m** jsou komplanární) řešíme, násobíme-li obě strany její skalárně nejprve reciprokálním vektorem

$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \,.\, \mathbf{c}}$$

k vektoru **c** ve směru vektoru **v**, který jest veden kolmo k **d** v rovině vektorů **c** a **d**; poněvadž v tom případě

$$\mathbf{c}' \,.\, \mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \,.\, \mathbf{c}} \,.\, \mathbf{c} = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{d}' \,.\, \mathbf{d} = 0$$

(za příčinou kolmosti vektorů **v** a **d**), obdržíme

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{d}' \,.\, \mathbf{m}$$

čili, označíme-li součin $\mathbf{d}' \,.\, \mathbf{m} = p$,

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} = p.$$

Podobně násobíme obě strany rovnice (19) skalárně reciprokálním vektorem $\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{u} \,.\, \mathbf{c}}$ k vektoru **c** ve směru vektoru **u**, vedeného kolmo k **c** v rovině vektorů **c** a **d**; tím obdržíme rovnici

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{b} = q.$$

Tudíž řešení rovnic (19) převedeno jest na řešení rovnic tvaru (5) v odst. 2.

c) Abychom řešili rovnici

$$(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a})\,\mathbf{d} + (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{b})\,\mathbf{e} + (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{c})\,\mathbf{f} = \mathbf{p}, \tag{20}$$

zaveďme soustavu reciprokální $\mathbf{d}'$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{f}'$ k soustavě $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, tedy

$$\mathbf{d}' = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{f}}{(\mathbf{def})}$$

atd. Násobíme-li obě strany rovnice (20) skalárně po řadě vektory $\mathbf{d}'$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{f}'$, obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} &= \mathbf{p} \,.\, \mathbf{d}' \\ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{b} &= \mathbf{p} \,.\, \mathbf{e}' \\ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{c} &= \mathbf{p} \,.\, \mathbf{f}' \end{aligned}$$

(ježto $\mathbf{d} \,.\, \mathbf{d}' = \mathbf{e} \,.\, \mathbf{e}' = \mathbf{f} \,.\, \mathbf{f}' = 1$, $\mathbf{d} \,.\, \mathbf{e}' = \mathbf{d} \,.\, \mathbf{f}' = \ldots = 0$).

Rovnice tyto řešíme dle odst. 3.; kořenem jest jediný vektor, daný dle (12*b*) výrazem

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} \,.\, \mathbf{d}')\,\mathbf{a}' + (\mathbf{p} \,.\, \mathbf{e}')\,\mathbf{b}' + (\mathbf{p} \,.\, \mathbf{f}')\,\mathbf{c}',$$

kde $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ jest soustava reciprokální k soustavě $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Obecně nemohou býti ani vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ani $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ komplanární. Jsou-li ve zvláštním případě vektory $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ komplanární, lze psáti

$$\mathbf{f} = f'\mathbf{d} + f''\mathbf{e},$$

tudíž daná rovnice se změní v

$$(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} + f'\, \mathbf{x} \,.\, \mathbf{c})\,\mathbf{d} + (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{b} + f''\, \mathbf{x} \,.\, \mathbf{c})\,\mathbf{e} = \mathbf{p}$$

čili

$$(\mathbf{x} \,.\, (\mathbf{a} + f'\mathbf{c}))\,\mathbf{d} + (\mathbf{x} \,.\, (\mathbf{b} + f''\mathbf{c}))\,\mathbf{e} = \mathbf{p},$$

kteráž rovnice se řeší dle *b*).

Jsou-li vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ komplanární, lze psáti

$$\mathbf{c} = c'\mathbf{a} + c''\mathbf{b},$$

tudíž

$$(\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a})\,(\mathbf{d} + c'\mathbf{f}) + (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{b})\,(\mathbf{e} + c''\mathbf{f}) = \mathbf{p},$$

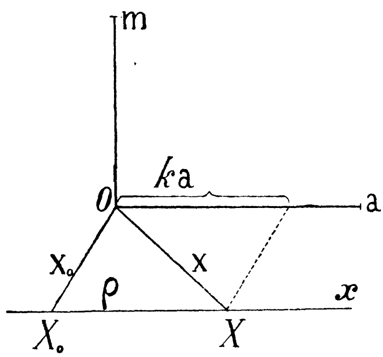
tedy opět případ *b*).

8. Jiný základní tvar rovnice vektorové jest

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{m}. \tag{21}$$

Z definice vektoriálního součinu plyne, že vektor $\mathbf{m}$ musí býti kolmý k $\mathbf{a}$; také všechny vektory $\mathbf{x}$ musí míti polohu kolmou k $\mathbf{m}$, leží tedy v rovině ϱ (obr. 4.), vedené vektorem $\mathbf{a}$ kolmo k $\mathbf{m}$. Jeden z nich $\mathbf{x}_0$ (specielní) jest v této rovině kolmý k $\mathbf{a}$; poněvadž proň rovnoběžník, určující součin $\mathbf{x} \times \mathbf{a}$, jest obdélníkem, jehož obsah ax_0 jest skalární částí m vektoru $\mathbf{m}$, jest délka jeho $x_0 = \frac{m}{a}$.

Utvořme vektoriální součin $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{m}$; skalární část jeho jest m (dle definice vektor. součinu) a příslušný jednotkový vek-



Obr. 4.

tor, kolmý k $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{m}$, jest jednotkový vektor specielního vektoru $\mathbf{x}_0$, totiž

$$\frac{\mathbf{x}_0}{x_0} = \frac{a\mathbf{x}_0}{m}.$$

Pročež

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{m} = m\frac{a\mathbf{x}_0}{m} = a\mathbf{x}_0,$$

z čehož

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{a}\mathbf{a}_1 \times \mathbf{m},$$

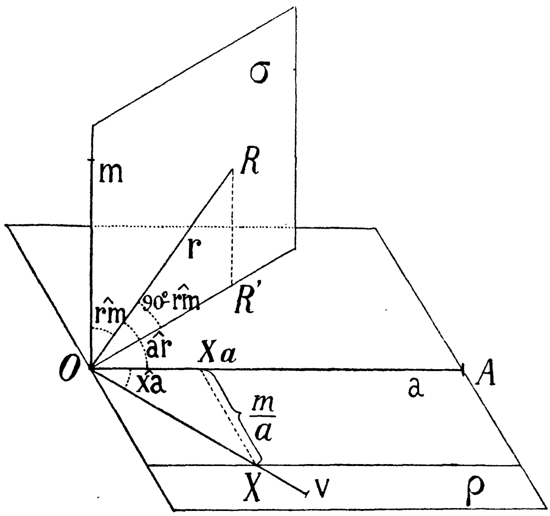
čili, zavedouce převrácenou hodnotu vektoru $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\mathbf{a}} \times \mathbf{m} \qquad (22a)$$

Každý jiný vektor $\mathbf{x}$ lze vyjádřiti jako součet vektorů $\mathbf{x}_0$ a $k\mathbf{a}$, kde k značí libovolné číslo; jest tedy obecné řešení rovnice (21)

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{a}} \times \mathbf{m} + k\mathbf{a}. \tag{22b}$$

Koncové body všech vektorů **x** leží patrně na přímce x, vedené v rovině ϱ ve vzdálenosti $\frac{m}{a}$ od vektoru **a**. Přísluší tu-



Obr. 5.

díž rovnici $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{m}$ určitá přímka x, jako příslušela skalární rovnici $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$ určitá rovina ξ.

Je-li ve zvláštním případě vektor **m** v rovnici (21) jednotkovým, bude

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\mathbf{a}} \times \mathbf{m}_1$$

a příslušející přímka x bude vedena ve vzdálenosti $\frac{1}{a}$ od vektoru **a**.

Je-li $\mathbf{m} = 0$, jest $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = 0$, t. j. kořenem **x** jest každý vektor rovnoběžný s **a**.

Je-li dána o kořenu **x** rovnice (21) podmínka, že má býti určitého směru, daného vektorem **v**, ležícím v rovině ϱ, zavedeme místo tohoto vektoru jiný **r** (obr. 5.), který jest kolmý k **v**. Vektor ten jest libovolně položen v rovině σ, kolmo vztyčené k vektoru **v**. Délku jeho r volíme tak, aby $\mathbf{r} \times \mathbf{m} = \mathbf{v}$; pak bude

$$rm \sin \widehat{\mathbf{rm}} = v.$$

Z $\triangle\ OXX_a$ plyne

$$x = \frac{m}{a \sin \widehat{\mathbf{xa}}};$$

tudíž

$$\frac{x}{v} = \frac{1}{ar \sin \widehat{\mathbf{rm}} \sin \widehat{\mathbf{xa}}}.$$

Avšak v pravoúhlém trojúhelníku sférickém, jehož příslušný trojhran má hrany OR, OR' a OA (u OR' jest úhel pravý), platí

$$\cos \widehat{\mathbf{ra}} = \cos (90^0 - \widehat{\mathbf{xa}}) \cos (90^0 - \widehat{\mathbf{rm}}) = \sin \widehat{\mathbf{xa}} \sin \widehat{\mathbf{rm}},$$

pročež

$$\frac{x}{v} = \frac{1}{ar \cos \widehat{\mathbf{ra}}} = \frac{1}{\mathbf{r} \,.\, \mathbf{a}}.$$

Vektory **x** a **v** mají touž jednotku délkovou $\mathbf{v}_1$, tudíž

$$\mathbf{x} = x\mathbf{v}_1 = \frac{v\mathbf{v}_1}{\mathbf{r} \,.\, \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{r} \,.\, \mathbf{a}}.$$

čili

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{m}}{\mathbf{r} \,.\, \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r} \,.\, \mathbf{a}} \times \mathbf{m}, \tag{23}$$

jakožto jiný výraz pro kořen rovnice $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{m}$.

Podobnost tohoto vzorce s obdobným vzorcem (4*a*) pro kořen rovnice $\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{m}$ jest patrna.

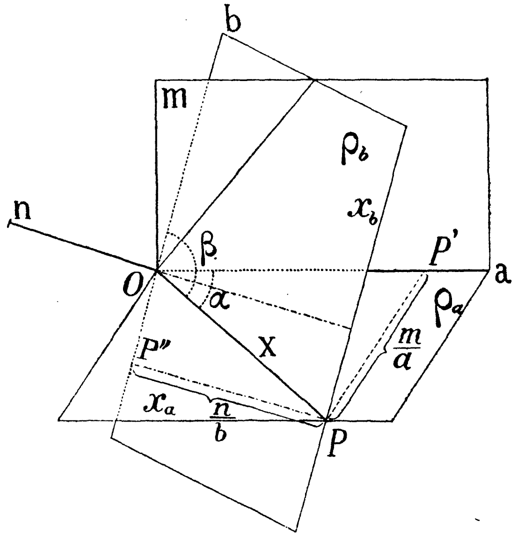
Libovolným vektorem ve vzorci (23) jest vektor **r**; jest zřejmo, že pro všechny vektory **r**, položené v jedné rovině σ, obdržíme jen jeden kořen **x**.

9. Dvě rovnice

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \tag{24}$$

mají reálný kořen jen tenkráte, sekou-li se přímky x_a a x_b příslušející oběma těmto rovnicím.

Je-li $p \equiv OP$ (obr. 6.) průsečnicí rovin ϱ_a a ϱ_b, musí přímka x_b procházeti bodem P, v němž se protíná x_a s p. Kořen **x**, určený úsečkou $\overline{OP}$, tvoří se směrem vektoru **a** úhel α a se směrem vektoru **b** úhel β; i můžeme délku jeho vyjádřiti jednak výrazem $\frac{m}{a \sin \alpha}$ (z pravoúhlého trojúhelníka OPP'), jednak



Obr. 6.

výrazem $\frac{n}{b \sin \beta}$ (z trojúhelníka OPP''), tudíž

$$\frac{m}{a \sin \alpha} = \frac{n}{b \sin \beta},$$

z čehož

$$\frac{m}{a} : \frac{n}{b} = \sin \alpha : \sin \beta,$$

což jest podmínečnou rovnicí, aby rovnice (24) měly společný kořen **x**. Dle ní jsou $\frac{m}{a}$ a $\frac{n}{b}$ dvě strany trojúhelníka, v němž α a β jsou úhly protější.

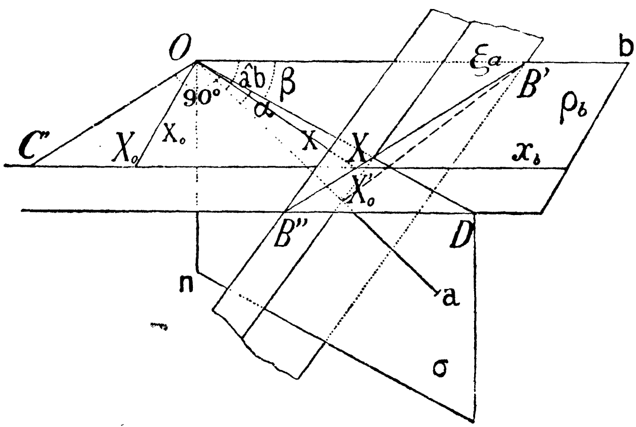
Pro kořen **x** obdržíme ze vzorce (23), kladouce v něm **n** za **r**, výraz

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}\,.\,\mathbf{a}} \times \mathbf{m}.$$

10. K rovnicím těm druží se smíšená soustava rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\,.\,\mathbf{a} &= m \\ \mathbf{x} \times \mathbf{b} &= \mathbf{n}, \end{aligned} \tag{25}$$

při čemž opět $\mathbf{n} \perp \mathbf{b}$.



Obr. 7.

První z těchto rovnic přísluší rovina ξ_a (obr. 7.), kolmá k **a** ve vzdálenosti $\overline{OX'}_0 = \frac{m}{a}$ od počátku, druhé přísluší přímka x_b, rovnoběžná k **b**, ležící v rovině ϱ_b, kolmé k **n** ve vzdálenosti $\frac{n}{b}$ od **b**. Průsečík X přímky x_b s rovinou ξ_a jest koncovým bodem vektoru **x**, který jest jediným kořenem soustavy rovnic (25).

Jest tudíž řešiti úlobu: Stanoviti (vektorovou analysí) průsečík přímky s rovinou.

Rovnici přímky x_b, rovnoběžné k **b**, nalezneme snadno, uváživše, že vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (v obr. $\overline{X_0X}$) má směr vektoru **b**, tudíž $\mathbf{b} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$.

Specielní vektor $\mathbf{x}_0$ druhé rovnice (25) jest dán výrazem (22*a*), totiž

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\mathbf{b}} \times \mathbf{n};$$

rovnice roviny ξ_a jest $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$. Hledaný průsečík tedy nalezneme, řešíce rovnice

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$$
$$\mathbf{b} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

Z druhé rovnice jde

$$\mathbf{b} \times \mathbf{x} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}_0$$

čili, násobíme-li obě strany vektoriálně vektorem **a**,

$$[\mathbf{b} \times \mathbf{x}] \times \mathbf{a} = [\mathbf{b} \times \mathbf{x}_0] \times \mathbf{a},$$

což lze dle vzorce (16*a*) *V. A.* psáti

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{b} \times \mathbf{x}_0] \times \mathbf{a}.$$

Položíme-li v této rovnici v druhém členu $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$, nabudeme

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{x} - m\mathbf{b} = [\mathbf{b} \times \mathbf{x}_0] \times \mathbf{a}$$

a odtud

$$\mathbf{x} = \frac{m\mathbf{b} + [\mathbf{b} \times \mathbf{x}_0] \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}, \tag{26}$$

kde pro $\mathbf{x}_0$ platí výše uvedená hodnota.

Význam obou členů na pravé straně této rovnice jest pak tento: První člen jest

$$\frac{m\mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \frac{mb\mathbf{b}_1}{ab \cos \widehat{\mathbf{ab}}} = \frac{m}{a} \sec \widehat{\mathbf{ab}}\, \mathbf{b}_1,$$

což jest v obr. 7. úsečka $\overline{OB'}$. Neboť v $\triangle\, OB'X'_0$, jehož úhel u vrcholu X'_0 jest pravý (poněvadž $\mathbf{a} \perp \xi_a$), jest

$$\overline{OB'} \cos \widehat{\mathbf{ab}} = \overline{OX'_0} = \frac{m}{a}.$$

Druhý člen výrazu (26) pro **x**, totiž

$$\frac{[\mathbf{b} \times \mathbf{x}_0] \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}},$$

jest dán úsečkou $\overline{XB'}$.

Jest totiž $\mathbf{b} \times \mathbf{x}_0 = \mathbf{n}$; součin $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$ jest pak určen vektorem kolmým k rovině σ vektorů $\mathbf{n}$ a $\mathbf{a}$. Vektor ten jest položen v rovině ϱ_b kolmo k průsečnici OD rovin σ a ϱ_b; délka jeho jest $na \sin \widehat{\mathbf{na}}$. Poněvadž rovina σ jest kolmá k průsečnici $B'B''$ rovin ϱ_b a ξ_a ($\varrho_b \perp \mathbf{n}$, $\xi_a \perp \mathbf{a}$), jest také $B'B'' \perp OD$, t. j. vektor $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$ jest rovnoběžný s $B'B''$. Směr tohoto vektoru jest tedy určen přímkou $OC' \parallel B'B''$. Délka vytčeného druhého členu výrazu (26) jest pak

$$s = \frac{na \sin \widehat{\mathbf{na}}}{ab \cos \widehat{\mathbf{ab}}} = \frac{n \sin \widehat{\mathbf{na}}}{b \cos \widehat{\mathbf{ab}}}.$$

Ve sférickém trojúhelníku pravoúhlém, jemuž příslušející trojhran má hrany $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a OD (při OD jest úhel pravý) jest

$$\cos \widehat{\mathbf{ab}} = \cos \alpha \, . \cos \beta,$$

značí-li α úhel směrů $\mathbf{a}$ a OD a β úhel $\mathbf{b}$ a OD.

Avšak $\alpha = 90^0 - \widehat{\mathbf{na}}$, tudíž

$$\cos \widehat{\mathbf{ab}} = \sin \widehat{\mathbf{na}} \cos \beta,$$

z čehož

$$\frac{\sin \widehat{\mathbf{na}}}{\cos \widehat{\mathbf{ab}}} = \frac{1}{\cos \beta},$$

a hledaná délka

$$s = \frac{n}{b} \frac{1}{\cos \beta}.$$

Konečně jest v $\triangle\, OX_0C'$, pravoúhlém u vrcholu X_0, délka vektoru $\mathbf{x}_0$ rovna $\frac{n}{b}$ a úhel $C'OX_0 = \beta$ (poněvadž ramena těchto úhlů stojí vzájemně na sobě kolmo), tudíž

$$\overline{OC'} \cos \beta = \frac{n}{b},$$

z čehož plyne

$$\overline{OC'} = \frac{n}{b} \frac{1}{\cos \beta}$$

čili délka s jest rovna délce úsečky $\overline{OC'}$.

Jest tedy význam vzorce (26) ten, že jím kořen $\mathbf{x}$ soustavy rovnic (25) jest rozložen ve dva sčítance, z nichž jeden dán jest co do směru a délky úsečkou $\overline{OB'}$ a druhý úsečkou $\overline{XB'}$.

Jestliže rovnice (25) mají ve zvláštním případě tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} &= m \\ \mathbf{x} \times \mathbf{a} &= \mathbf{n}, \end{aligned} \tag{25a}$$

tedy vektor $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$, bude rovina ξ_a kolmá k $\mathbf{a}$. Pak má součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ hodnotu a^2 a první člen výrazu (26) bude

$$\frac{m\mathbf{a}}{a^2} = \frac{ma\,\mathbf{a}_1}{a^2} = m\,\frac{\mathbf{a}_1}{a} = m\,\frac{1}{\mathbf{a}}.$$

Druhý člen zmíněného výrazu změní se v

$$\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{a}}{a^2} = \frac{\mathbf{n} \times a\mathbf{a}_1}{a^2} = \mathbf{n} \times \frac{1}{\mathbf{a}};$$

tudíž kořen rovnic (25a)

$$\mathbf{x} = m\,\frac{1}{\mathbf{a}} + \mathbf{n} \times \frac{1}{\mathbf{a}} \tag{26a}$$

Vektor $\mathbf{x}$ jest rozložen ve dvě složky, z nichž jedna jest průmětem jeho na vektor $\mathbf{a}$ a druhá průmětem jeho na rovinu kolmou k $\mathbf{a}$ *).

11. Řešení složitějších rovnic vektorových lze uvésti na řešení uvedených tvarů základních (17), (18), (19), (20), (21), (24) a (25); jakým způsobem se řešení to provádí, poznáme z těchto příkladů:

Příklad 1. Jest řešiti rovnici

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} = \mathbf{m}, \tag{27}$$

kde musí býti dle *V. A.* str. 20 vektor $\mathbf{m}$ kolmý k průmětu vektoru $\mathbf{b}$ na rovinu ϱ vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{m}$; v rovině té leží také neznámý vektor $\mathbf{x}$.

Dle vzorce (16a) *V. A.* lze psáti rovnici (27) ve tvaru

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{x} = \mathbf{m}.$$

Násobme jako v případě (7b) rovnici tu skalárně vektorem reciprokálním $\mathbf{a}'$ k $\mathbf{a}$ ve směru vektoru $\mathbf{v}$, který jest kolmý k $\mathbf{a}$;

*) Viz *Jaumann*: „Die Grundlagen der Bewegungslehre“, pag. 26.

takže $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} . \mathbf{a}}$; tím nabudeme

$$(\mathbf{x} . \mathbf{b}) (\mathbf{a} . \mathbf{a}') - (\mathbf{a} . \mathbf{b}) (\mathbf{x} . \mathbf{a}') = \mathbf{m} . \mathbf{a}'.$$

Ježto $\mathbf{a} . \mathbf{a}'$ se rovná nulle (jestiť $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$ a tedy také $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}'$), vychází z této rovnice

$$\mathbf{x} . \mathbf{a}' = - \frac{\mathbf{m} . \mathbf{a}'}{\mathbf{a} . \mathbf{b}},$$

kde na pravé straně jest skalár. Tuto rovnici řešíme pak dle odst 1.

Podobně řešíme rovnici

$$\mathbf{x} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{m},$$

použijeme-li vztahu (*V. A.*, vzorec (16*b*) na str. 21.)

$$\mathbf{x} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{x} . \mathbf{b})\, \mathbf{a} - (\mathbf{x} . \mathbf{a})\, \mathbf{b}.$$

Též rovnici

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{m}$$

převedeme na rovnici (27), kladouce $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{d}$.

Příklad 2. Je-li dána rovnice

$$(\mathbf{x} . \mathbf{a})\, \mathbf{b} + n\mathbf{x} = \mathbf{m}, \tag{28}$$

musí kořen $\mathbf{x}$ ležeti v rovině vektorů $\mathbf{b}$ a $\mathbf{m}$.

Rovnici tuto řešíme, zavedeme-li reciprokální soustavu vektorů. Buďtež $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tři vektory jednotkové libovolně počátkem O položené; i lze psáti

$$\mathbf{a} = a'\mathbf{i} + a''\mathbf{j} + a'''\mathbf{k}.$$

Je-li $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ soustava jednotkových vektorů, k $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ reciprokální (tedy $\mathbf{k}'$ kolmo k rovině vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ atd.), platí dle

(12*a*) $$\mathbf{x} = (\mathbf{x} . \mathbf{i})\, \mathbf{i}' + (\mathbf{x} . \mathbf{j})\, \mathbf{j}' + (\mathbf{x} . \mathbf{k})\, \mathbf{k}'.$$

Vložíce hodnotu pro $\mathbf{a}$ do prvního členu a hodnotu pro $\mathbf{x}$ do druhého členu rovnice (28) obdržíme

$$(\mathbf{x} . (a'\mathbf{i} + a''\mathbf{j} + a'''\mathbf{k}))\, \mathbf{b} + n\, ((\mathbf{x} . \mathbf{i})\, \mathbf{i}' + (\mathbf{x} . \mathbf{j})\, \mathbf{j}' + (\mathbf{x} . \mathbf{k})\, \mathbf{k}') = \mathbf{m};$$

roznásobením nabývá tato rovnice tvaru

$$a' (\mathbf{x} . \mathbf{i})\, \mathbf{b} + a'' (\mathbf{x} . \mathbf{j})\, \mathbf{b} + a''' (\mathbf{x} . \mathbf{k})\, \mathbf{b} + n (\mathbf{x} . \mathbf{i})\, \mathbf{i}' + n (\mathbf{x} . \mathbf{j})\, \mathbf{j}' + n (\mathbf{x} . \mathbf{k})\, \mathbf{k}' = \mathbf{m}$$

čili

$$(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,(a'\mathbf{b} + n\mathbf{i}') + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,(a''\mathbf{b} + n\mathbf{j}') + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})$$
$$(a'''\mathbf{b} + n\mathbf{k}') = \mathbf{m}.$$

Položíme-li

$$a'\mathbf{b} + n\mathbf{i}' = \mathbf{c}, \quad a''\mathbf{b} + n\mathbf{j}' = \mathbf{d}, \quad a'''\mathbf{b} + n\mathbf{k}' = \mathbf{e},$$

nalezneme konečně

$$(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,\mathbf{c} + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,\mathbf{d} + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})\,\mathbf{e} = \mathbf{m},$$

což jest rovnice tvaru (20), jejíž řešení jest provedeno v odst. 7*c*).

Kdybychom volili soustavu **i**, **j**, **k** pravoúhlou, bude

$$\mathbf{i}' \equiv \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' \equiv \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}' \equiv \mathbf{k},$$

čímž řešení se zjednoduší.

Příklad 3. Jde-li o řešení rovnice

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] + \mathbf{b}\,(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{c}) + n\mathbf{x} = \mathbf{m}, \tag{29}$$

položíme podobně v prvním a třetím členu

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,\mathbf{i}' + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,\mathbf{j}' + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})\,\mathbf{k}'$$

a ve druhém členu $\mathbf{c} = c'\mathbf{i} + c''\mathbf{j} + c'''\mathbf{k}$; tím nabudeme rovnice:

$$(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,[\mathbf{i}' \times \mathbf{a}] + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,[\mathbf{j}' \times \mathbf{a}] + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})\,[\mathbf{k}' \times \mathbf{a}]$$
$$+ n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,\mathbf{i}' + n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,\mathbf{j}' + n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})\,\mathbf{k}' + c'(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,\mathbf{b}$$
$$+ c''(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,\mathbf{b} + c'''(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})\,\mathbf{b} = \mathbf{m}$$

čili

$$(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,(\mathbf{i}' \times \mathbf{a} + n\mathbf{i}' + c'\mathbf{b}) + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,(\mathbf{j}' \times \mathbf{a} + n\mathbf{j}' + c''\mathbf{b})$$
$$+ (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})\,(\mathbf{k}' \times \mathbf{a} + n\mathbf{k}' + c'''\mathbf{b}) = \mathbf{m}.$$

Kladouce

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{a} + n\mathbf{i}' + c'\mathbf{b} = \mathbf{d},$$
$$\mathbf{j}' \times \mathbf{a} + n\mathbf{j}' + c''\mathbf{b} = \mathbf{e},$$
$$\mathbf{k}' \times \mathbf{a} + n\mathbf{k}' + c'''\mathbf{b} = \mathbf{f},$$

obdržíme

$$(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{i})\,\mathbf{d} + (\mathbf{x}\,.\,\mathbf{j})\,\mathbf{e} + \mathbf{x}\,.\,\mathbf{k})\,\mathbf{f} = \mathbf{m},$$

tedy opět rovnici tvaru (20).

Z těchto příkladů vysvítá, jakých substitucí jest užíti, aby se ustanovily kořeny vektorových rovnic tvarů jakýchkoli.