Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Zahradníček

Methodický příspěvek k analytické geometrii kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 204--220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122332

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1918

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Methodický příspěvek k analytické geometrii kuželoseček.

Dr. Josef Zahradníček.

Řešení jisté skupiny úloh, vyskytujících se v analytické geometrii kuželoseček, značně se zjednoduší, píšeme-li rovnice tečen u kuželoseček v poloze základní takto:

$$y = Ax \pm \sqrt{a^2A^2 + b^2}$$

tečna ellipsy — $a = b$ kruhu —,

$$y = Ax \pm \sqrt{a^2A^2 - b^2}$$

tečna hyperboly,

$$y = Ax + \frac{p}{2A}$$

tečna paraboly*). Odmocnina v předešlých rovnicích je dvojznačná — 2 tečny rovnoběžné, lišící se znaménkem úseku na ose y-ové i x-ové; užívati budeme znaménka horního bez jakékoliv újmy všeobecnosti.

V následujících řádcích podány jsou některé příklady a snadno poznáme rozdíl od řešení způsobem jiným.

Stanoviti součin kolmic spuštěných s ohnisek na tečny ellipsy nebo hyperboly.

Vzdálenosti ohnisek $F_1(e, o)$ a $F_2(-e, o)$ od tečny

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 \pm b^2}$$

mají absolutní hodnotu

$$k_1 = \frac{Ae + \sqrt{A^2a^2 \pm b^2}}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad k_2 = \frac{-Ae + \sqrt{a^2A^2 \pm b^2}}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Hledaný součin jest

$$k_1k_2 = \frac{A^2a^2 \pm b^2 - A^2e^2}{1 + A^2}.$$

Zaveďme

$$a^2 - e^2 = \pm b^2$$

*) Viz na př. Studnička, Úvod do anal. geometrie v rovině str. 134 a násl., Praha 1902.

a dostaneme v obou případech

$$k_1 k_2 = b^2$$

(bez ohledu na znaménko).

Ellipse jest opsati kosočtverec nejmenšího obsahu.

Stranou kosočtverce je tečna

$$y = Ax + \sqrt{a^2 A^2 + b^2}.$$

Určeme její úseky na osách souřadných x_0, y_0 a plocha kosočtverce jest patrně

$$2x_0 y_0 = \text{min.},$$

čili

$$-2\frac{a^2A^2 + b^2}{A} = \text{min.}$$

Diskriminant této rovnice kvadratické podává

$$\text{min.} = 4ab,\ A = -\frac{b}{a}.$$

V případě čtverce ellipse opsaného jest

$$A = -1,$$

úseky na osách souřadných jsou

$$x_0 = y_0 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

plocha pak opsaného čtverce jest

$$2(a^2 + b^2).$$

Stanovte plochu rovnoběžníka, jehož stranami jsou tečny hyperboly k asymptotám kolmé.

Úloha řeší se obdobně jako předešlá. Vycházíme od rovnice

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 - b^2},\ A = -\frac{a}{b},$$

určíme úseky na osách souřadných a odtud plochu

$$\frac{2(a^2 - b^2)\,e^2}{ab}.$$

Určiti geom. místo průseků vzájemně kolmých tečen kuželosečky.

V případě ellipsy a hyperboly jsou rovnice tečen k sobě kolmých:

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 \pm b^2},\ y = -\frac{1}{A}x + \sqrt{\frac{a^2}{A^2} \pm b^2}.$$

Upravme je na tvar:

$$(y - Ax)^2 = a^2A^2 \pm b^2,$$
$$(Ay + x)^2 = a^2 \pm b^2A^2.$$

Sečtením dostáváme rovnici geom. místa

$$(A^2 + 1)(x^2 + y^2 - a^2 \mp b^2) = 0,$$

Výraz v závorce jest nezávislý na A; položíme-li jej rovný nulle dostaneme rovnici geometrického místa hledaného. Jest to kruh.

V případě paraboly jest:

$$y = Ax + \frac{p}{2A},\ y = -\frac{1}{A}x - \frac{pA}{2},$$

odtud plyne odečtením rovnice geom. místa

$$(A^2 + 1)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0;$$

geometrické místo jest přímka

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Určiti jest součin úseků vytvořených tečnou hyperboly na asymptotách.

Z rovnice pro tečnu a asymptoty

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 - b^2}, y = \pm\frac{b}{a}x$$

vypočítejme průseky:

$$x_1 = \frac{a\sqrt{a^2A^2 - b^2}}{b - aA},\ y_1 \ldots,\ x_2 \ldots,\ y_2 \ldots$$

Úseky na asymptotách jsou

$$d_1^2 = x_1^2 + y_1^2,\ d_2^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Snadno dokážeme

$$d_1 d_2 = e^2.$$

Rovněž se snadno odvodí hodnota pro plochu trojúhelníka omezeného tečnou a asymptotami

$$\Delta = ab,$$

jakož i vlastnost, že bodem dotyku je délka tečny mezi asymptotami půlena.

Úpatnice kuželoseček.

Rovnice tečen v uvedeném tvaru hodí se zvláště k určení úpatnic. Úpatnice křivky jest geometrickým místem bodů, jež sestrojíme promítajíce pevný bod roviny (pól) kolmo do všech tečen křivky. Stanovíme tedy úpatnice kuželoseček, napíšeme-li rovnici tečny příslušné kuželosečky a rovnici kolmice s pólu $P(l, o)$ na tečnu spuštěné a z obou rovnic vyloučíme proměnnou směrnici A.

Pro ellipsu a hyperbolu jest obecně:

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 \pm b^2},$$

$$y = -\frac{1}{A}(x - l).$$

Odtud plyne vyloučením A:

$$(x^2 + y^2 - lx)^2 = a^2(x - l)^2 \pm b^2y^2.$$

Pro

$$l = o$$

představuje předešlá rovnice elliptickou, případně hyperbolickou lemniskatu Boothovu.

Pro

$$l = e$$

dá se rovnice úpatnice psáti ve tvaru

$$(x^2 + y^2 - a^2)[(x - e)^2 + y^2] = 0,$$

z čehož uvádí se obyčejně jen část reálná — kruh.*)

Pro

$$a = b, \quad o < l \lesseqgtr a$$

dostáváme tak zvané konchoidy kruhu.

*) Druhé části odpovídá kruh s poloměrem nullovým — bod $F(e, o)$ —, anebo pár imaginárních přímek $y \pm i(x - e) = 0$.

Pro rovnoosou hyperbolu ($a = b$) a pól v počátku souřadnic ($l = o$) jest úpatnicí lemniskata Bernoulliho.

Každou z těchto úpatnic můžeme odvoditi zvlášť pro libovolnou kuželosečku, volíce za pól význačný bod roviny — vrchol, ohnisko kuželosečky, nebo počátek souřadnic. Je-li pól v ohnisku, možno též jinak postupovati (srovnej s úlohou vzájemně kolmých tečen). Pro úpatnici ellipsy a hyperboly jest:

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 \pm b^2}, \quad y = -\frac{1}{A}(x - e).$$

Upravme rovnice ty na tvar:

$$(y - Ax)^2 = a^2A^2 \pm b^2,$$
$$(Ay + x)^2 = e^2 = a^2 \mp b^2.$$

Sečtením obou rovnic plyne:

$$(x^2 + y^2 - a^2)(A^2 + 1) = 0,$$

při čemž

$$A = -\frac{x - e}{y}.$$

Obdobně obdržíme úpatnici paraboly (pól v ohnisku)

$$x(A^2 + 1) = 0,$$

kde

$$A = -\frac{x - \frac{p}{2}}{y}.$$

I v těchto případech uvádí se jen řešení reálné (na př. Studnička, Úvod do anal. geom. str. 135., 171., 198.).

Úpatnicí paraboly pro pól ve vrcholu je Dioklova kissoida. Rovnici paraboly vhodno voliti ve tvaru

$$y^2 = -8rx;$$

její tečna a kolmice s počátku na tečnu spuštěná jsou:

$$y = Ax - \frac{2r}{A}, \quad y = -\frac{1}{A}x.$$

Vyloučením A vyplývá rovnice úpatnice

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

Určete tečny vedené daným bodem P ke kuželosečce.

Řešení úlohy této podáme na zvláštním případě. Budiž dána kuželosečka a pól

$$x^2 + 4y^2 = 16, \quad P(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{14}{5}).$$

Do rovnice tečny

$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 + b^2}$$

dosaďme

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 4$$

a za x, y souřadnice pólu, jenž na tečně leží. Tím obdržíme kvadratickou rovnici pro A, z níž určíme

$$A_1 = \tfrac{2}{3}, \quad A_2 = -\tfrac{3}{8}.$$

Hodnotu a znaménko výrazu

$$\sqrt{a^2A^2 + b^2}$$

určíme, dosadíce do rovnice tečny za x, y souřadnice pólu a za A hodnoty vypočtené; v našem případě jest to

$$-\tfrac{10}{3}, \quad -\tfrac{5}{2}.$$

Jsou tedy rovnice tečen

$$y = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{10}{3}, \quad y = -\tfrac{3}{8}x - \tfrac{5}{2}.$$

Souřadnice bodů dotyku jsou

$$x = -\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}};$$

v našem případě jsou body ony

$$M_1(\tfrac{16}{5}, -\tfrac{6}{5}), \quad M_2(-\tfrac{12}{5}, -\tfrac{8}{5}).$$

V případě hyperboly píšeme pouze $-b^2$ místo b^2; u paraboly jsou body dotyku o souřadnicích

$$x = \frac{p}{2A^2}, \quad y = \frac{p}{A}.$$

Společné tečny dvou kuželoseček.

Řešení případu tohoto podáme jen pro jeden případ, kdy dané křivky jsou v poloze základní a to kruh s poloměrem r a ellipsa s poloosami a, b, při čemž jest

$$a > r > b.$$

Rovnice tečen

$$y = A_1 x + \sqrt{r^2 A_1^2 + r^2},\ y = A_2 x + \sqrt{a^2 A_2^2 + b^2}$$

jsou v případě společné tečny identické — stejné směrnice i úseky. Z rovnosti úseků plyne:

$$A = \pm \sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}}.$$

Body dotyku určí se dle předešlého.

Úhel tečen.

Úhel sevřený tečnami kuželosečky z bodu $P(x, \eta)$, vedenými hoví známé rovnici

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2},$$

kde A_1, A_2 jsou směrnice tečen — kořeny rovnice tečnu vyjadřující. V případě ellipsy nebo hyperboly obdržíme

$$A_{1,2} = \frac{-xy \pm \sqrt{D}}{a^2 - x^2},\quad D = x^2 y^2 - (a^2 - x^2)(\pm b^2 - y^2).$$

Odtud vyplývá:

$$A_1 - A_2 = \frac{2\sqrt{D}}{a^2 - x^2},\quad A_1 A_2 = \frac{\pm b^2 - y^2}{a^2 - x^2}$$

a tedy

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2\sqrt{D}}{a^2 \pm b^2 - x^2 - y^2}.$$

Je-li pól P pevný, je tím ω určeno; je-li naopak dáno ω, představuje poslední rovnice geom. místo bodů, z nichž tečny k ellipse nebo hyperbole vedené svírají daný úhel. Pro $\omega = \frac{\pi}{2}$ jest geom. místem kruh

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2$$

(jmenovatel roven nulle). Týž výsledek podává v tomto případě podmínka

$$A_1 A_2 = -1.$$

Tak řeší úlohu tuto na př. učebnice Jandečka-Libický, Geometrie pro vyšší gymn. III. str. 135. př. 345,, 346. a j.

V případě paraboly jest

$$A_1 - A_2 = \frac{1}{x}\sqrt{y^2 - 2px},\ A_1A_2 = \frac{p}{2x}.$$

Podobně řešíme úlohu: Jest určiti geom. místo bodů, z nichž tečny ke kuželosečce vedené protínají osu x-ovou v úhlech, jichž kottangent součet nebo rozdíl jest veličinou stálou.

Dle podmínky jest

$$\frac{1}{A_1} \pm \frac{1}{A_2} = c;$$

upravme rovnici tu na tvar

$$\frac{A_2 \pm A_1}{A_1A_2} = c.$$

Z příslušné rovnice tečny určíme jako v úloze předcházející čítatele a jmenovatele předešlého výrazu. Uvádíme tu jen výsledek pro případ paraboly

$$x(2y - cp) = 0,\ x^2\left(y^2 - 2px - \frac{c^2p^2}{4}\right) = 0.$$

Ve školní praxi přicházejí i jiné úlohy, které můžeme výhodně řešiti vycházejíce od tečnových rovnic ve tvaru na počátku uvedeném. Snadno se odvodí i obdobné rovnice pro normály kuželoseček; ponecháváme to pilným čtenářům.

Grafické stanovení průsečíků a společných tečen dvou soustředných kuželoseček.

Žákům středních škol podává **Fr. Granát**, prof. v Kostelci n. Orl.

(Dokončení.)

Stanovení průsečíků soustředné kružnice K *s hyperbolou* H vyžaduje řešení rovnic:

$$H \equiv b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,\quad K \equiv x^2 + y^2 = r^2,$$

kde $r > a$.

Abychom našli přímo koncové body průměrů, v nichž se obě křivky protínají, uvažme, že rovnice jednoho z nich je

$$Q \equiv y = kx.$$

(Podobně lze úlohu také řešiti pro ellipsu, ovšem docházíme ku stejným výsledkům.) Stanovme průsečík Q s H, bude tedy

$$b^2x^2 - a^2k^2x^2 = a^2b^2$$

$$x^2(b^2 - a^2k^2) = a^2b^2,$$

tedy $$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} \quad \text{a} \quad x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

a $$y = \pm k \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}.$$

Bod tento však musí náležeti také kružnici, tedy

$$\frac{a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} + \frac{k^2 a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} = r^2$$

upravením dostaneme

$$k^2(a^2b^2 + a^2r^2) = r^2b^2 - a^2b^2,$$

z toho $$k^2 = \frac{b^2}{a^2} \frac{r^2 - a^2}{b^2 + r^2},$$

čili $$k = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{(r + a)(r - a)}{b^2 + r^2}} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{m}{n},$$

ale $$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha,$$

tedy $$k = \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{n} = \frac{u}{n},$$

$$\overline{sv} = m, \ u = \overline{vv_1}, \ n = \overline{cz_2}, = \overline{sz_1}.$$

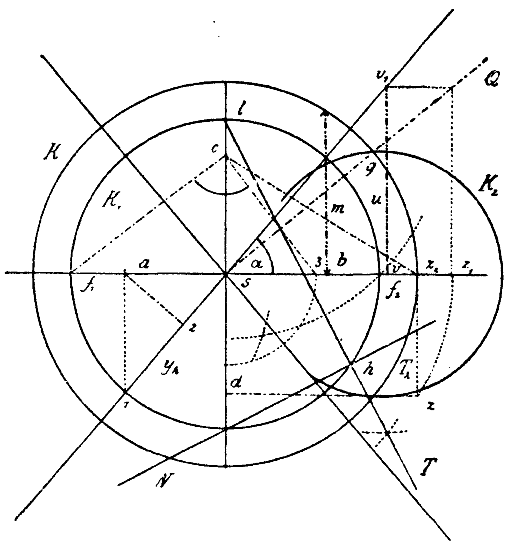
Výrazy takto upravené snadno graficky sestrojíme, jak patrno z obrazce 4., a tím i hledané průsečíky.

I pro hyperbolu dají se přímo nalézti průsečíky soustředné kružnice s hyperbolou. Veďme v průsečíku kružnice K s hlavní osou tečnu ke kružnici T_k, ta seče rovnoběžku s hlavní osou jdoucí vrcholem vedlejší osy v bodě z, jehož vzdálenost od středu s přenesena na osu hlavní dává bod z_1, který s vrcholy a, b tvoří průvodiče koncových bodů průměru, rovného průměru kružnice, tedy průvodiče průsečíků kružnice dané K s hyperbolou H.

Je-li dána $\quad H \equiv b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

a $\quad K \equiv x^2 + y^2 = r^2$

ustanovíme přímo souřadnice průsečíků řešením daných rovnic.



Obr. 4.

Bude
$$b^2(r^2 - y^2) - a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$b^2r^2 - b^2y^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$b^2(r^2 - a^2) = y^2(a^2 + b^2),$$
pro
$$a^2 + b^2 = e^2$$
bude
$$y^2 = \frac{b^2}{e^2}(r^2 - a^2),$$
$$y_{12} = \pm\frac{b}{e}\sqrt{r^2 - a^2}$$
$$x^2 = r^2 - y^2 = r^2 - \frac{b^2}{e^2}(r^2 - a^2)$$
$$x^2 = \frac{e^2r^2 - b^2r^2 + b^2a^2}{e^2} = \frac{r^2(e^2 - b^2) + b^2a^2}{e^2},$$
$$x^2 = \frac{r^2a^2 + b^2a^2}{e^2} = \frac{a^2(r^2 + b^2)}{e^2},$$
$$x_{12} = \pm\frac{a}{e}\sqrt{r^2 + b^2}.$$

Ukážeme nyní, že kružnice K_2 o středu v ohnisku f_2 a poloměru rovném $\overline{bz_1}$ protíná kružnici K v bodech, jichž souřadnice jsou výrazy právě vyhledané. Tím horní konstrukce bude odůvodněna.

Kružnice
$$K \equiv x^2 + y^2 = r^2,$$
„ $$K_2 \equiv (x - e)^2 + y^2 = \overline{bz_1^2},$$
ale $$\overline{bz_1^2} = (\sqrt{r^2 + b^2} - a),$$
tedy $$K_2 \equiv (x - e)^2 + y^2 = (\sqrt{r^2 + b^2} - a)^2$$
$$K_2 \equiv x^2 - 2xe + e^2 + y^2 = r^2 + b^2 - 2a\sqrt{r^2 + b^2} + a^2.$$

Dosadíme-li za $y^2 = r^2 - x^2$ a uvážíme-li, že $a^2 + b^2 = e^2$, bude
$$xe = a\sqrt{r^2 + b^2},$$
$$x = \frac{a}{e}\sqrt{r^2 + b^2},$$
a tedy
$$y^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{a^2}{e^2}(r^2 + b^2),$$
$$y^2 = \frac{r^2e^2 - a^2r^2 - a^2b^2}{e^2} = \frac{r^2(e^2 - a^2) - a^2b^2}{e^2} = \frac{r^2b^2 - a^2b^2}{e^2}$$
$$= \frac{b^2}{e^2}(r^2 - a^2),$$
$$y_{12} = \pm \frac{b}{e}\sqrt{r^2 - a^2},$$
tedy výrazy stejné, které jsme přímo odvodili pro průsečíky kružnice K s hyperbolou H.

Lze tedy vysloviti větu:

Opíšeme-li ze středu hyperboly kružnici poloměrem
$$\varrho = \sqrt{r^2 + b^2},$$
t. j. vzdáleností vrcholu vedlejší osy od průsečíků kružnice K s osou hlavní, protne tato osu hlavní v bodech z_1 . . ., které s body a, b dávají průvodiče hledaných průsečíků kružnice K o poloměru r s hyperbolou H.

Provedení: $\overline{dz} = r$, $\overline{sz} = \overline{sz_1}$, $\overline{az_1}$ a $\overline{bz_1}$ jsou průvodiče hledaných průsečíků g . . .

Prochází li kružnice ohnisky, lze obdobně jako u ellipsy dojíti k průsečíkům. V tom případě řešíme přímo rovnice hyperboly
$$H \equiv b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{a kružnice} \quad K \equiv x^2 + y^2 = e^2$$

dostáváme

$$y = \frac{b^2}{e},$$

t. j. opět b je střední geometrickou úměrnou excentricity e a hledaného y.

Učiňme $\overline{a2} \perp A$, (kde A je asymptota) potom $\overline{12} = y_h$ nebo $\overline{c3} \perp \overline{f_1 c}$ potom $\overline{s3} = y_h$. Konstruktivně opět můžeme hledané body h ... sestrojiti obdobně jako u ellipsy, sestrojíme-li tečny z bodu l, ve kterém kružnice K_1 protíná imaginární osu ku hyperbole, dotyčné body jsou hledanými průsečíky.

Jedná-li se o průsečíky ellipsy soustředné s hyperbolou, převedeme opět ellipsu do soustavy kružnice tím, že ji o určitý úhel otočíme. O týž úhel otočíme také hyperbolu, která přejde opět v hyperbolu o osách závislých na onom úhlu. Takto vzniklé průsečíky kružnice a této nové hyperboly převedeme do původní ellipsy resp. hyperboly.

Společné tečny dvou soustředných kuželoseček.

Budiž dána (obr. 5.) kružnice $K \equiv x^2 + y^2 = r^2$ a ellipsa $E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, při čemž zvolme $a > r > b$, aby tečny byly reálné. Zvolme na E bod o souřadnicích $x_1 y_1$, potom tečna ellipsy v tomto bodě je dána rovnicí $T \equiv b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$. Aby byla též tečnou kružnice, musí její vzdálenost od středu kružnice $s(0, 0)$ rovnati se poloměru kružnice, tedy

$$r = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1 + a^4y_1}}.$$

Druhá podmínka je, že $x_1 y_1$ leží na ellipse, tedy

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

řešením těchto rovnic dostáváme

$$y_1^2 = \frac{b^4}{r^2}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2} = \frac{b^4(a^2 - r^2)}{r^2 \,.\, e^2},$$

a tedy

$$(y_1)_{12} = \pm \frac{b^2\sqrt{(a + r)(a - r)}}{r \,.\, e};$$

podobně určíme souřadnici x_1!

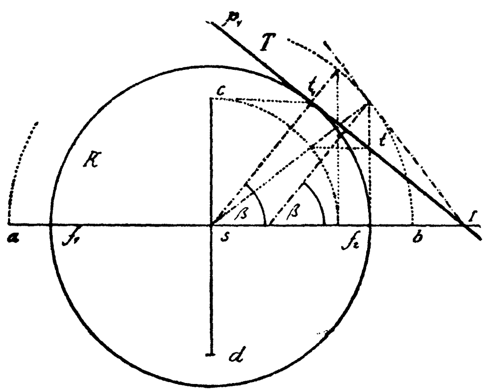
Ale tečnu ellipsy můžeme také předpokládati ve formě dané rovnicí normální

$$T \equiv x \cos \beta + y \sin \beta - d = 0,$$

kde úhel β je odchylka kolmice na tečnu z počátku soustavy spuštěné od osy X.

Pro $d = r$ je

$$T \equiv x \cos \beta + y \sin \beta - r = 0.$$



Obr. 5.

Srovnejme tuto rovnici s rovnicí

$$T \equiv b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$$

a upravme druhou i první rovnici tak, aby koefficient při x byl rovný 1.

$$T \equiv x + y \operatorname{tg} \beta - \frac{r}{\cos \beta} = 0,$$

$$T \equiv x + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \cdot y - \frac{a^2}{x_1} = 0.$$

Srovnáme-li tyto rovnice, bude

$$\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} = \operatorname{tg} \beta ; \frac{r}{\cos \beta} = \frac{a^2}{x_1},$$

z toho

$$x_1 = \frac{a^2 \cos \beta}{r}$$

a tedy

$$\frac{a^2 y_1}{b^2 \cdot \frac{a^2 \cos\beta}{r}} = \operatorname{tg}\beta$$

a tedy $\frac{r y_1}{b^2} = \sin\beta$ čili $y_1 = \frac{b^2}{r}\sin\beta$;

srovnáme-li tento výsledek s výsledkem prvým, kde

$$y_1 = \frac{b^2}{r} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{e},$$

plyne z toho, že

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{e}.$$

Jedná se tedy o to, sestrojiti graficky úhel β, jehož sinus je dán právě odvozenou rovnicí. Je tedy

$$\sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{(a+r)(a-r)}$$

odvěsnou a

$$e = \sqrt{(a-b)(a+b)}$$

přeponou trojúhelníku pravoúhlého, v němž protější úhel je úhel β. [Výrazy $\sqrt{(a+r)(a-r)}$ a $\sqrt{(a-b)(a+b)}$ dají se výhodně sestrojiti užitím střední měřické úměrné, místo užitím Pythagovy poučky.] Potom vedeme počátkem rovnoběžku se sestrojenou přeponou a v průsečíku jejím s danou kružnicí je dotyčný bod hledané společné tečny s danou kružnicí. Chceme-li, můžeme pomocí úhlu β vyjádřiti y souřadnici dotyčného bodu společné tečny s *kružnicí*, bude potom

$$y_2 = r \cdot \sin\beta = \frac{r}{e}\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Užijeme-li tohoto výsledku pro kružnici procházející ohnisky, potom y-ová souřadnice dotyčného bodu společné tečny s kružnicí $y_2 = e \sin\beta$, neboť $r = e$, ale

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{e} = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{e} = \frac{b}{e}$$

a tedy

$$y_2 = \frac{e \cdot b}{e} = b,$$

je tedy *rovna délce vedlejší poloosy.*

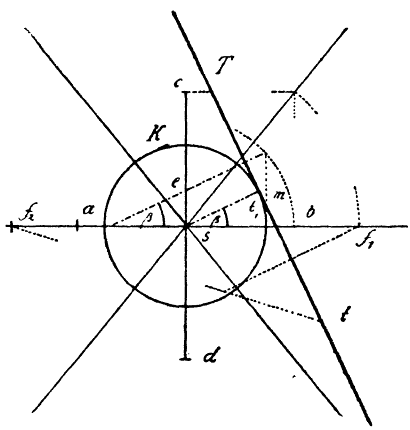
Jedná-li se o stanovení společných tečen dvou soustředných ellips, uveďme opět jednu do vztahu affinního s kružnicí nad některou osou; druhá ovšem přejde v ellipsu o jiných osách. Stanovíme-li potom společné tečny takto vzniklé kružnice a ellipsy, a převedeme-li konstrukci tuto orthogonálnou affinitou do původních útvarů, dostaneme společné tečny dvou soustředných ellips.

Máme-li stanoviti společné tečny hyperboly

$$H \equiv b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

a soustředné kružnice

$$K \equiv x^2 + y^2 = r^2,$$



Obr. 6.

počínejme si právě tak pro hyperbolu jako pro ellipsu. (Obr. 6.) Zvolme na hyperbole H bod o souřadnicích $x_1 y_1$, tečna v tomto bodě má rovnici

$$T_H \equiv b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2.$$

Splňme podmínku, aby byla tečnou dané kružnice, t. j. aby měla od středu kružnice $s(0, 0)$ vzdálenost r, bude potom

$$r = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}},$$

čili

$$b^4x_1^2 + a^4y_1^2 = \frac{a^4b^4}{r^2},$$

ale bod x_1y_1 leží na hyperbole, tedy hoví rovnici

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2;$$

z této rovnice

$$x_1^2 = \frac{a^2b^2 + a^2y_1^2}{b^2}$$

dosazeno do prvé dává

$$b^4 \cdot \frac{a^2b^2 + a^2y_1^2}{b^2} + a^4y_1^2 = \frac{a^4b^4}{r^2};$$

z toho

$$y_1^2(b^2 + a^2) = \frac{b^4}{r^2}(a^2 - r^2)$$

a tedy

$$(y_1)_{12} = \pm \frac{b^2}{r}\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 + a^2}},$$

aby y_1 bylo reálné, musí $a > r$, je-li $a = r$, je $y_1 = 0$, t. j. společné tečny dotýkají se v bodě na ose X a stanovíme li podobně jako $(y_1)_{12}$ také

$$(x_1)_{12} = \pm \frac{a^2}{r}\sqrt{\frac{b^2 + r^2}{b^2 + a^2}},$$

bude tedy pro $a = r$

$$x_1 = \frac{a^2}{a}\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2 + a^2}} = a,$$

t. j. společné tečny pak jsou tečnami vrcholovými hyperpoly.

Tečnu hyperboly možno opět stanoviti jako u ellipsy rovnicí $T \equiv x \cos\beta + y \sin\beta - r = 0$ nebo

$$x + y \operatorname{tg}\beta - \frac{r}{\cos\beta} = 0,$$

$$T \equiv b^2xx_1 - a^2yy_1 - a^2b^2 = 0 \text{ nebo}$$

$$x - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}y - \frac{a^2}{x_1} = 0.$$

Srovnáním zase

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \quad \text{a} \quad \frac{r}{\cos \beta} = \frac{a^2}{x_1} \quad \text{čili} \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{r y_1}{b^2 \cos \beta} \quad \text{nebo}$$

$$y_1 = -\frac{b^2}{r} \sin \beta,$$

srovnáme-li s výrazy prvým způsobem odvozenými, je

$$\sin \beta = \mp \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 + a^2}} = \mp \frac{m}{e}\,.$$

Nebéřeme-li ohled na znaménko, neboť dostáváme celkem čtyři body dle obou os souměrné, můžeme psáti

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 + a^2}}$$

a tento výraz opět jako u ellipsy stanoví nám úhel β jakožto odchylku kolmice ze středu na tečnu spuštěné od osy X, s jehož ramenem vedeme středem rovnoběžku a obdržíme opět dotyčný bod společné tečny na kružnici K. V tomto vedeme tečnu ke kružnici K a ta je společnou hledanou tečnou. Ostatní jsou dle obou os souměrné.

Je-li kružnice nahrazena soustřednou ellipsou, uvedeme tuto orthogonálnou affinitou v kružnici, tím ovšem přejde i daná hyperbola v hyperbolu affinní; tam nalezneme společné tečny takto vzniklé kružnice a nové hyperboly, které pak uvedeme zpět v původní útvary a tím dostaneme společné tečny ellipsy se soustřednou hyperbolou. Samozřejmé jest, že je třeba, aby osa ellipsy, která je totožna s reálnou osou hyperboly, byla menší než reálná osa hyperboly.

Konstrukce tyto, kde nahrazujeme kružnici ellipsou, nechť si pro cvičení provede čtenář sám.