Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

O těžných křivkách

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 112--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122333

čili

$$\varphi(x) = f(x) - \int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{-\int_t^x \nu(\xi)d\xi}\, \nu(t)\, dt,$$

a vrátíme-li se k významu funkcí $\varphi(x)$ a $f(x)$

$$l^{aa}(x) = l(x) - l^i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{l(t)}{l^i(t)}\, e^{-\int_t^x \nu(\xi)d\xi}\, \nu(t)\, dt, \tag{9}$$

čímž nalezen jest pro hledanou funkci analytický výraz závislý na známých funkcích $\mu(x)$, $\mu^i(x)$ a $\nu(x)$ a tím tedy úkol úplně řešen.

(Dokončení.)

O těžných křivkách.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. V knihovně Jednoty českých mathematiků a fysiků našel jsem psané přednášky Kulíkovy o mechanice, které mají nadpis „Höhere Mechanik. Nach den Vorlesungen des Jak. Phil. Kulik, k. k. Prof. zu Prag 1840/1 geschrieben von Wenzel Šimerka.“ Mezi str. 32. a 33. bylo vloženo několik listů, které obsahují nedokončený náčrtek nadepsaný „O křivkách těžných (těžnicích)“, jehož autorem jest snad Šimerka. V Kulíkových přednáškách jest obšírná kapitola o vlastnostech těžiště, ale nenašel jsem tam nic, co by se vztahovalo bezprostředně k onomu náčrtku. Jeho obsah jest takovýto: Zvolme na dané rovinné křivce pevný bod A; pohybuje-li se jiný bod B po křivce, opisuje těžiště M jejího oblouku AB t. zv. *těžnou křivku.* Dokazuje se, že tečna sestrojená v bodě M tečné křivky prochází příslušným bodem B křivky původní a odvozují se rovnice pro těžnou křivku kružnice. Jiný druh těžných křivek dostaneme, když sestrojujeme těžiště plochy omezené obloukem křivky, osou useček a dvěma krajními pořadnicemi dané křivky, z nichž jest jedna pevná, druhá proměnná. —

Domnívám se, že zvláště pozoruhodná jest první tečná křivka, jejíž geometrický vztah ke křivce původní nezávisí na volbě soustavy souřadnic. V následujících řádcích odvozuji některé vlastnosti této těžné křivky; zobecňuji její konstrukci ve dvojím směru: jednak předpokládám, že původní křivka jest prostorová, jednak že hustota hmoty rozložené podél této křivky se od místa k místu mění.

2. Budiž A (x_0, y_0, z_0) pevný bod na dané prostorové křivce Γ, B (x, y, z) pak pohyblivý bod téže křivky a s její oblouk AB čítaný kladně v určitém smyslu; x, y a z považujeme za funkce nezávisle proměnné s. Křivka Γ budiž obložena hmotou tak, že na délkovou jednotku oblouku připadá hmota μ; tato hustota μ jest kladnou funkcí oblouku s.

Těžiště M oblouku AB má souřadnice

$$\xi = \frac{\int_0^s \mu\, x\, ds}{\int_0^s \mu\, ds}, \quad \eta = \frac{\int_0^s \mu\, y\, ds}{\int_0^s \mu\, ds}, \quad \zeta = \frac{\int_0^s \mu\, z\, ds}{\int_0^s \mu\, ds}. \tag{1}$$

Každému bodu B odpovídá určitý bod M; geometrické místo bodu M jest těžná křivka Γ_1 příslušná dané původní křivce Γ. Bod A, od kterého počítáme délku oblouku AB, nazveme *počátkem* těžné křivky. Násobme rovnice pro ξ, η, ζ společným jmenovatelem tří zlomků, derivujme pak dle s a dělme konečně hustotou μ. Zavedeme-li zkratku

$$\frac{1}{\mu} \int_0^s \mu\, ds = m, \tag{2}$$

obdržíme

$$m \frac{d\xi}{ds} = x - \xi, \quad m \frac{d\eta}{ds} = y - \eta, \quad m \frac{d\zeta}{ds} = z - \zeta. \tag{3}$$

Z toho plyne, že

$$d\xi : d\eta : d\zeta = (x - \xi) : (y - \eta) : (z - \zeta).$$

Tečna sestrojená k těžné křivce v bodě M prochází příslušným bodem B křivky původní.

3. Abychom určili oskulační rovinu křivky Γ_1, derivujeme první rovnici (3) dle s. Vychází

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\xi}{ds^2} &= -\left(1 + \frac{dm}{ds}\right)\frac{d\xi}{ds} + \frac{dx}{ds} \\ &= -\left(1 + \frac{dm}{ds}\right)\frac{x - \xi}{m} + \frac{dx}{ds}. \end{aligned} \tag{4}$$

Současnou cyklickou záměnou písmen ξ, η, ζ a x, y, z odvodíme další dvě obdobné rovnice. Jsou-li X, Y, Z souřadnice libovolného bodu v oskulační rovině sestrojené ku křivce Γ_1 v bodě M, zní rovnice té roviny

$$\begin{vmatrix} X-\xi, & Y-\eta, & Z-\zeta \\ \frac{d\xi}{ds}, & \frac{d\eta}{ds}, & \frac{d\zeta}{ds} \\ \frac{d^2\xi}{ds^2}, & \frac{d^2\eta}{ds^2}, & \frac{d^2\zeta}{ds^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Nahraďme derivace ve 2. a 3. řádku výrazy plynoucími ze vzorců (3) a (4); po snadné úpravě řádků v determinantu vychází

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ x-\xi, & y-\eta, & z-\zeta \\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = 0.$$

Této rovnici jest vyhověno, dosadíme-li do ní na místo X, Y, Z výrazy

$$X = x + r\frac{dx}{ds}, \quad Y = y + r\frac{dy}{ds}, \quad Z = z + r\frac{dz}{ds},$$

kde r je libovolná konstanta. Tyto tři výrazy udávají patrně souřadnice kteréhokoli bodu na tečně původní křivky Γ, tedy: *oskulační rovina těžné křivky sestrojená v bodě M obsahuje tečnu sestrojenou k původní křivce v bodě B, jemuž bod M odpovídá.*

4. Z rovnic (1) následuje, že

$$\lim \xi = x_0, \quad \lim \eta = y_0, \quad \lim \zeta = z_0, \quad \text{pro} \lim s = 0,$$

t. j. těžná křivka Γ_1 prochází počátkem A, což plyne ostatně přímo z její definice.

Označme písmenou σ oblouk těžné křivky čítaný od počátku A. Každému bodu B původní křivky (a tedy každé hodnotě oblouku s) odpovídá určitý bod M na Γ_1 a tím i určitá hodnota σ oblouku AM; ta jest i co do znamení určena podmínkou, že rostoucímu s má odpovídati rostoucí σ. Budiž dále u délka úsečky BM čítaná kladně v kladném směru tečny sestrojené v bodě M ke křivce Γ_1. Pak jest

$$x-\xi=u\frac{d\xi}{d\sigma},\qquad y-\eta=u\frac{d\eta}{d\sigma},\qquad z-\zeta=u\frac{d\zeta}{d\sigma}. \tag{5}$$

Srovnejme tyto rovnice s rovnicemi (3); vidíme, že

$$u=m\frac{d\sigma}{ds}. \tag{6}$$

5. Geometrické veličiny (křivost, torse atd.) těžné křivky Γ_1 v její počátku A mají některé jednoduché vztahy k obdobným veličinám původní křivky Γ. K odvození těchto vztahů vyjádříme nejprve veličiny

$$x,\ y,\ z,\ \mu,\ m,\ \xi,\ \eta,\ \zeta$$

řadami postupujícími dle mocnin proměnné s. Volme bod A za počátek souřadnic a hrany příslušného hlavního trojhranu křivky Γ za souřadné osy (Ox tečna, Oy hlavní normála, Oz binormála). Jsouli $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$, $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)$ křivost, torse a derivace křivosti v bodě A ($s=o$), platí rozvoje*)

$$x=s-\frac{s^3}{6R^2}\cdots,\qquad y=\frac{s^2}{2R}+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\frac{s^3}{6}\cdots,$$

$$z=-\frac{s^3}{6RT}\cdots; \tag{7}$$

vynechány jsou členy obsahující čtvrtou a vyšší mocninu veličiny s.

O hustotě μ budeme předpokládati, že se dá vyjádřiti řadou

$$\mu=\mu_0+\mu_1 s+\mu_2\frac{s^2}{2}+\dots,$$

ze které postupně vypočteme

$$\int_0^s\mu\,ds=\mu_0 s+\mu_1\frac{s}{2}+\mu_2\cdot\frac{s^3}{6}+\dots$$

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu_0}-\frac{\mu_1}{\mu_0^2}s+\frac{2\mu_1^2-\mu_2\mu_0}{2\mu_0^3}s^2+\dots$$

$$\frac{1}{\int_0^s\mu_0 ds}=\frac{1}{\mu_0 s}-\frac{\mu_1}{2\mu_0^2}+\frac{3\mu_1^2-2\mu_2\mu_0}{12\mu_0^3}s+\dots$$

$$m=\frac{1}{\mu}\int_0^s\mu ds=s-\frac{\mu_1}{2\mu_0}s-\left(\frac{\mu^2}{3\mu_0}+\frac{\mu_1^2}{2\mu_0^2}\right)s^3+\dots$$

*) Viz mou »Differenciální geometrii křivek a ploch« str. 35.

Dosaďme nalezené řady nejprve do formulí (1). Jednoduchý výpočet dává

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{s}{2} + \frac{\mu_1}{12\mu_0}s^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} - \frac{1}{R^2}\right)s^3 + \dots\\ \eta &= \frac{s^2}{6R} + \frac{1}{24}\left[\frac{\mu_1}{\mu_0 R} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\right]s^3 + \dots\\ \zeta &= -\frac{s^3}{24RT} + \dots\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Zaveďme pak na místo x, ξ, $\frac{dx}{ds}$, y, η ... příslušné řady do upravené rovnice oskulační roviny křivky Γ_1 (viz odst. *3.*). Po rozvedení determinantu obdržíme rovnici tvaru

$$\frac{Z}{6R} + s(\dots) = o.$$

Z rovnic (8) vyplývá, že

$$d\xi : d\eta : d\zeta = 1 : o : o \text{ pro } \lim s = o,$$

a z rovnice oskulační roviny, že $Z = o$ pro lim $s = o$. Tedy: *Těžná křivka dotýká se ve svém počátku křivky původní a má tam s ní společnou oskulační rovinu.*

6. Obě křivky mají v počátku A společný hlavní trojhran, Kladné směry obou tečen splývají; dosud však nebylo rozhodnuto o hlavních normálách, splývají-li jejich kladné směry, či jsou-li navzájem protivné.

Sestrojme nyní vzorce, kterými se vyjadřují ξ, η, ζ jakožto řady postupující dle mocnin oblouku σ těžné křivky. Za tím účelem vyhledáme především vztah mezi s a σ. Derivujeme-li řady (8) dle s a sečteme pak čtverce derivací, vypočteme snadno

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{2\mu_1}{3\mu_0}s + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_0} - \frac{7\mu_1^2}{18\mu_0^2} - \frac{1}{18R^2}\right)s^2 \dots\right]$$

a z toho dle binomické formule

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{2} + \frac{\mu_1}{6\mu_0}s + \left(\frac{\mu_2}{8\mu_0} - \frac{\mu_1^2}{8\mu_0^2} - \frac{1}{72R^2}\right)s^2 + \dots$$

Integrací dostaneme (v počátku A jest $s = \sigma = o$)

$$\sigma = \int\limits_0^s \frac{d\sigma}{ds} ds = \tfrac{1}{2} s + \frac{\mu_1}{12\mu_0} s^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} - \frac{1}{9R^2}\right) s^3 + \ldots$$

Obrácením této řady ustanovíme s jakožto funkci σ:

$$s = 2\sigma - \frac{2\mu_1}{3\mu_0}\sigma^2 + \left[-\frac{2\mu_2}{3\mu_0} + \frac{10\mu_1^2}{9\mu_0^2} + \frac{2}{27R^2}\right]\sigma^3 + \ldots$$

Dosaďme nyní tuto poslední řadu na místo s do rovnic (8); tak získáme vzorce

$$\xi = \sigma - \frac{8}{27}\frac{\sigma^3}{R^2} + \ldots$$

$$\eta = \frac{2}{3R}\sigma^2 + \left[-\frac{\mu_1}{9\mu_0 R} + \frac{1}{3}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\sigma^3 + \ldots$$

$$\zeta = -\frac{\sigma^3}{3RT} + \ldots$$

Koefficient při σ^2 v řadě pro η jest kladný, ježto $R > o$; z toho soudíme, že *v počátku těžné křivky souhlasí kladný směr její hlavní normály s kladným směrem hlavní normály křivky původní.*

Řady, které jsme právě odvodili, jsou identické s těmito řadami:

$$\xi = \sigma - \frac{\sigma^3}{6R_1^2} \ldots, \quad \eta = \frac{\sigma^2}{2R_1} + \frac{\sigma^3}{6}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right) \ldots,$$

$$\zeta = -\frac{\sigma^3}{6R_1 T_1} \ldots,$$

jež mají stejný tvar jako řady (7);

$$\frac{1}{R_1}, \quad \frac{1}{T_1}, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)$$

značí křivost, torsi a derivaci křivosti těžné křivky v počátečním bodě A. Srovnáním obojích řad dojdeme hledaného výsledku:

$$R_1 = \frac{3}{4}R, \quad T_1 = \frac{2}{3}T, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right) = 2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{2\mu_1}{3\mu_0 R}. \tag{9}$$

Křivost těžné křivky v jejím počátku rovná se $\frac{4}{3}$ křivosti původní křivky v témže bodě; torse těžné křivky rovná se tam $\frac{3}{2}$ torse původní křivky.

Vyjádřeme konečně také délku u, definovanou v odst. *4.*, mocninnou řadou. Z rovnic (6) následuje

$$u = m\frac{d\sigma}{ds} = \tfrac{1}{2}s - \frac{\mu_1}{12\mu_0}s^2 + \dots$$

V počátku A ($s = \sigma = o$) těžné křivky platí

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_0 = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{du}{ds}\right)_0 = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{du}{d\sigma}\right)_0 = \left(\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma}\right)_0 = 1. \tag{10}$$

7. Středy oskulačních koulí sestrojených v počátku A ke křivce původní a ke křivce těžné mají vzhledem ke hlavnímu trojhranu souřadnice

$$\left(0,\ R,\ -T\frac{dR}{ds}\right) \quad \text{a} \quad \left(0,\ R_1,\ -T_1\frac{dR_1}{d\sigma}\right).$$

Uvažujme případ, že hustota μ vyhovuje v počátku A podmínce

$$\mu_1 = \left(\frac{d\mu}{ds}\right)_0 = 0. \tag{11}$$

Se zřetelem ke vzorcům (9) odvodíme

$$-T_1\frac{dR_1}{d\sigma} = T_1R_1^2\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{3}{4}TR^2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{3}{4}T\frac{dR}{ds}$$

$$R_1^2 + T_1^2\left(\frac{dR_1}{d\sigma}\right)^2 = \frac{9}{16}\left[R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right];$$

$$R : R_1 = T\frac{dR}{ds} : T_1\frac{dR_1}{d\sigma}.$$

Vyhovuje-li hustota μ v počátku A těžné křivky podmínce (11), má tam její oskulační koule poloměr rovný $\frac{3}{4}$ poloměru oskulační koule sestrojené v A ke křivce původní, a středy obou koulí leží na jedné přímce s bodem A.

Podmínce (11) jest vyhověno, je-li podél původní křivky $\mu = konst.$ Upozorňuji, že také Cèsaro*) zabýval se těžnými křivkami kružnice a klothoidy (radioidy); v posledním případě došel zvláště zajímavých výsledků.

---

*) *E. Césaro-G. Kowalewski*: Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis, 1904, p. 807, 809.

8. Pokusme se ještě o řešení úlohy obrácené: jest nalézti všechny křivky Γ, jež mají danou prostorovou křivku Γ_1 za těžnou.

Hledaných křivek jest nekonečně mnoho, ježto kterýkoli bod křivky Γ_1 může býti volen za její počátek. Analyticky vyjádříme úlohu takto: Na Γ_1 zvolíme pevný bod O, od něhož počítáme oblouk σ v určitém smyslu kladně. Počátek těžné křivky Γ_1 budiž v bodě A určeném hodnotou $\sigma = \sigma_0$ oblouku OA. Na hledané křivce Γ, která se v bodě A dotýká křivky Γ_1, označíme jako dříve písmenou s oblouk AB počítaný od A. Předpokládejme, že hustota μ hmoty rozložené podél křivky I jest **d a n o u** funkcí oblouku s; těžištěm oblouku AB bude určitý bod M, který leží na křivce Γ_1. Dle odst. *2.* leží bod B na tečně sestrojené ke Γ_1 v bodě M; délka u úsečky MB jest neznámou funkcí proměnného oblouku $\sigma = AM$ křivky Γ_1. Z rovnic (5) odvodíme

$$\frac{dx}{d\sigma} = \left(1 + \frac{du}{d\sigma}\right)\frac{d\xi}{d\sigma} + u\,\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$$

a další dvě rovnice cyklickou záměnou písmen x, y, z a ξ, η, ζ. Poněvadž

$$\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{d\xi}{d\sigma}\,\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \frac{d\eta}{d\sigma}\,\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \frac{d\zeta}{d\sigma}\,\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2} = 0.$$

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{\varrho^2},$$

kde ϱ značí poloměr křivosti křivky Γ_1 (daný jakožto funkce oblouku σ), platí

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \left(1 + \frac{du}{d\sigma}\right)^2 + \frac{u^2}{\varrho^2}, \quad (12)$$

Rovnice (6) dává

$$u\sqrt{\left(1 + \frac{du}{d\sigma}\right)^2 + \frac{u^2}{\varrho^2}} = m. \quad (13)$$

Abychom vyloučili m, obrátíme funkcionální závislost v dané rovnici

$$m = \frac{1}{\mu}\int_0^s \mu\, ds = f(s)$$

a píšeme

$$s = F(m), \quad \frac{ds}{d\sigma} = F'(m) \cdot \frac{dm}{d\sigma}.$$

Do poslední rovnice dosadíme na místo $\frac{ds}{d\sigma}$ a m výrazy (12) resp. (13). Klademe-li pro stručnost

$$U = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{d\sigma}\right)^2 + \frac{u^2}{\varrho^2}},$$

vychází

$$U = F'(u \cdot U) \cdot \frac{d(u \cdot U)}{d\sigma}. \tag{14}$$

To jest differenciální rovnice 2. řádu pro neznámou u; známe-li u jakožto funkci proměnné σ, sestrojíme v každém bodě křivky Γ_1 tečnu a naneseme na ni počínaje bodem dotyku úsečku délky u, jejíž koncový bod vytvoří hledanou křivku Γ. Ale ne každé řešení rovnice (14) vyhovuje naší úloze. Uvažme, že křivka Γ prochází počátkem A ($\sigma = \sigma_0$) křivky Γ_1 a že v bodě A platí rovnice (10); abychom obdrželi skutečně křivky, jež mají Γ_1 za těžnou, musíme integrovati rovnici (14) s počátečními podmínkami

$$u = o, \quad \frac{du}{d\sigma} = 1 \text{ pro } \sigma = \sigma_0,$$

kde σ_0 je libovolné. Udělujíce konstantě σ_0 postupně různé hodnoty obdržíme ∞^1 hledaných křivek Γ; všechny leží na rozvinutelné ploše vytvořené tečnami křivky Γ_1.

Zvláštní zmínky zaslouží okolnost, že se v rovnici (12), a tedy také v differenciální rovnici (14), vyskytuje toliko křivost dané křivky Γ_1, nikoli však její torse. Při libovolné deformaci rozvinutelné plochy nemění se, jak známo, křivost její hrany vratu; vztah mezi Γ a Γ_1 jest tedy invariantní při deformaci, což vyjádříme obšírněji větou:

Budiž Γ libovolná prostorová křivka obložená hmotou, jejíž hustota μ jest danou funkcí oblouku, A libovolný bod křivky Γ, a Γ_1 její těžná křivka s počátkem v A; Γ leží celá na rozvinutelné ploše P, jež má Γ_1 za hranu vratu.

Při libovolné deformaci plochy P přejde Γ, nemění-li se hustota μ v jednotlivých její bodech, v novou křivku; tato nová *křivka má za těžnou křivku hranu vratu té plochy, která vznikla deformací z plochy P.*

Úloha vyslovená na počátku tohoto odstavce dá se tudíž převésti na obdobnou úlohu o rovinných křivkách: deformujme rozvinutelnou plochu P, jež má danou křivku Γ_1 za hranu vratu, tak, aby tato křivka přešla v rovinnou křivku γ_1; vyhledejme pak v její rovině p všechny křivky γ, jež mají γ_1 za těžnou; provedeme-li nyní zmíněnou deformaci v opačném směru, přejde γ_1 zase v Γ_1, rovina p ve plochu P a křivky γ přejdou ve hledané křivky Γ.

Integrace rovnice (14) jest obtížná i v tom případě, že hustota μ jest konstantní; tu platí

$$f(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^s \mu\, ds = s, \quad F(m) = m, \quad F'(m) = 1.$$

a rovnice (14) přechází v

$$\sqrt{\left(1+\frac{du}{d\sigma}\right)^2+\frac{u^2}{\varrho^2}} = \frac{d}{d\sigma}\left[u\sqrt{\left(1+\frac{du}{d\sigma}\right)^2+\frac{u^2}{\varrho^2}}\right].$$

Je-li mimo to křivost ϱ^{-1} dané křivky Γ_1 konstantní, není proměnná σ v differenciální rovnici explicitně obsažena; rovnici lze známým způsobem převésti na rovnici 1. řádu.

Příspěvek k theorii involuce kubické.

Napsal **Jos. Žďárek**, assistent české techniky v Praze.

Mají-li dvě kuželosečky K, J tu vzájemnou polohu, že lze sestrojiti trojúhelník $x_1x_2x_3$ kuželosečce K vepsaný a kuželosečce J opsaný, potom existuje nekonečný počet trojúhelníků zmíněné vlastnosti. Vrcholy jejich vytvořují na K *kubickou involuci bodovou,* mající J za *kuželosečku involuční,* strany jejich pak vytvořují na J *kubickou involuci tečnovou,* pro niž je K *kuželosečkou involuční.*

Zvolíme-li tedy na K bod y_1 a protínají-li s něho k J vedené tečny kuželosečku K v bodech y_2 a y_3, jest spojnice y_2y_3 tečnou křivky J; body $y_1y_2y_3$ tvoří *trojinu* kubické involuce bodové na K. Je-li dle toho v_1 průsečíkem kuželoseček KJ (tak