Jan Sobotka

Řešení úloh 3. a 4. stupně pomocí pohyblivého pravého úhlu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 129--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122413

Řešení úloh 3. a 4. stupně pomocí pohyblivého pravého úhlu.

Napsal J. Sobotka.

1. V následujícím budiž vedle kvadratických konstrukcí připuštěno ještě použití jediného pohyblivého úhlu pravého. Na základě tom odvoďme si ihned řešení grafické pro obecnou rovnici čtvrtého stupně

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \qquad (1)$$

Při tom použijeme methody Chaslesovy (Comptes rendues 1880), upravíce ji způsobem vhodným vzhledem ke konstruktivním pomůckám, jež jsme si zde předem vytkli.

Za tím účelem předpokládejme přirozené měřítko na přímce x a opišme v rovině kolem jeho bodu počátečného O jakožto středu kružnici k poloměru rovnajícího se jednotce. Na x naneseme úsečky rovnající se a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 a odvodíme si na přímce té příbuznost řad bodových (ξ), (η), danou rovnicí

$$(a_0\eta^2 + a_1\eta)\,\xi^2 + a_2\eta^2 + a_3\eta + a_4 = 0. \qquad (2)$$

Tato příbuznost jest promětností dvou involucí v řadách (ξ) a (η). Promítneme-li tedy tyto involuce z libovolného bodu V na k položeného, stanoví takto vznikající involuce na k tím, že spojíme přímkami dvojice bodové, jež si v involucích těchto přísluší, dva promětné svazky paprskové (q), (p), které vytvoří kuželosečku v, protínající k ve čtyřech bodech S_1, S_2, S_3, S_4. Pak stanoví průsečné body přímky x s přímkami VS_1, . ., VS_4 kořeny rovnice (1).

Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnou, mající O za počátek a přímku x i co do smyslu za osu úseček a odvoďme si nejprv rovnici kuželosečky v, předpokládajíce pro bod V souřadnice (0, 1).

Libovolné hodnotě ξ přináležejí dle (2) dvě hodnoty η_1, η_2 pro η a na x dva body, jejichž průměty z bodu V na k nechť jsou spojeny přímkou p. Obdobně přináležejí k libovolné hodnotě η dle (2) dvě hodnoty ξ_1, ξ_2 pro ξ a na x dva body, jejichž průměty z bodu V na k nechť jsou spojeny přímkou q. Ježto $\xi_1 + \xi_2 = 0$, jest $q \parallel x$.

Píšeme-li (2) ve tvaru

$$(a_0\xi^2 + a_2)\,\eta^2 + (a_1\xi^2 + a_3)\,\eta + a_4 = 0$$

vidíme, že

$$\eta_1 + \eta_2 = -\frac{a_1\xi^2 + a_3}{a_0\xi^2 + a_2}, \quad \eta_1\eta_2 = \frac{a_4}{a_0\xi^2 + a_2}. \tag{3}$$

2. Spojnice bodu V s body $k \,.\, p$ mají rovnice

$$(y - 1)\,\eta_1 + x = 0$$
$$(y - 1)\,\eta_2 + x = 0$$

a představují kuželosečku, jejíž rovnice jest

$$(y - 1)^2\,\eta_1\eta_2 + x\,(y - 1)\,(\eta_1 + \eta_2) + x^2 = 0.$$

Tato kuželosečka stanoví s kružnicí k, mající rovnici

$$(k) \equiv x^2 + y^2 - 1,$$

svazek kuželoseček. Odečtením obou rovnic vychází

$$(y - 1)^2\,\eta_1\eta_2 + x\,(y - 1)\,(\eta_1 + \eta_2) - (y^2 - 1) = 0.$$

Takto obdržíme ve vytčeném svazku kuželoseček kuželosečku, která se rozkládá v tečnu ku k v bodě V a v přímku p. Následkem toho jest rovnice přímky p

$$(y - 1)\,\eta_1\eta_2 + x\,(\eta_1 + \eta_2) - (y + 1) = 0, \tag{4}$$

aneb se zřetelem na (3)

$$a_4\,(y - 1) - (a_1\xi^2 + a_3)\,x - (a_0\xi^2 + a_2)\,(y + 1) = 0. \tag{5}$$

Když v rovnici (4) položíme $\eta_1 = -\eta_2 = \xi$, obdržíme rovnici pro q

$$(y - 1)\,\xi^2 + (y + 1) = 0; \tag{6}$$

při tom si v promětnosti mezi (p) a (q) přísluší tyto přímky p a q tenkráte, když v rovnicích (5) a (6) za ξ zvolíme tutéž hodnotu. Vyloučením ξ z těchto rovnic obdržíme rovnici kuželosečky v.

Rovnici tu lze psáti tudíž ve tvaru

$$\begin{vmatrix} a_4 (y-1) - a_3 x - a_2 (y+1), & a_1 x + a_0 (y+1) \\ y+1 & -(y-1) \end{vmatrix} = 0,$$

anebo po vyčíslení levé strany

$$(v) \equiv (a_4 - a_2 + a_0)\, y^2 - (a_3 - a_1)\, xy - 2\, (a_4 - a_0)\, y$$
$$+ (a_3 + a_1)\, x + (a_4 + a_2 + a_0) = 0.$$

Kuželosečku v můžeme nahraditi každou jinou kuželosečkou ve svazku, který ona stanoví s kružnicí k; volme jako takovou kuželosečku w, danou rovnicí

$$(v) + (a_4 + a_2 + a_0)\,(k) = 0,$$

jenž po rozvedení a uspořádání zní

$$2\,(a_4 + a_0)\, y^2 - (a_3 - a_1)\, xy + (a_4 + a_2 + a_0)\, x^2$$
$$- 2\,(a_4 - a_0)\, y + (a_3 + a_1)\, x = 0. \qquad (7)$$

Kuželosečka w prochází středem O kružnice k; polarisujeme-li ji vzhledem ku k, obdržíme proto parabolu r, jejíž rovnice v souřadnicích přímkových jest

$$2\,(a_4 + a_0)\, v^2 - (a_3 - a_1)\, uv + (a_4 + a_2 + a_0)\, u^2$$
$$+ 2\,(a_4 - a_0)\, v - (a_3 + a_1)\, u = 0,$$

a právě této paraboly chceme pro další konstrukci použíti. Místo abychom však rovnici její v souřadnicích bodových odvozovali, provedeme její bližší stanovení pomocí kuželosečky w.

3. Derivujeme-li (7) dle x, bude nejprv

$$[4\,(a_4 + a_0)\, y - (a_3 - a_1)\, x - 2\,(a_4 - a_0)]\, y' - (a_3 - a_1)\, y$$
$$+ 2\,(a_4 + a_2 + a_0)\, x + a_3 + a_1 = 0, \qquad (7')$$

takže pro $x = y = 0$ obdržíme

$$y' = \frac{a_3 + a_1}{2\,(a_4 - a_0)}. \qquad (8)$$

Pro $y = 0$ dává (7) vedle $x = 0$ ještě

$$x = -\frac{a_3 + a_1}{a_4 + a_2 + a_0};$$

a pro $x = 0$ vedle $y = 0$ ještě

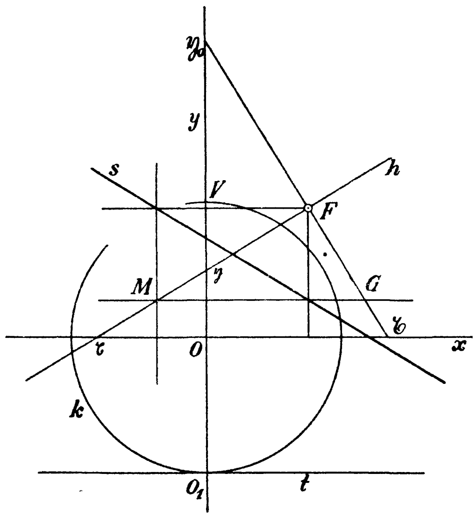
$$y = \frac{a_4 - a_0}{a_4 + a_0}.$$

Z toho plyne (obr. 1.), že přímky, které vedeme bodem M o souřadnicích

$$X_0 = -\frac{a_4 + a_2 + a_0}{a_3 + a_4}, \qquad Y_0 = \frac{a_4 + a_0}{a_4 - a_0} \tag{9}$$

rovnoběžné k osám x, y jsou tečnami paraboly r.

Přímka řídící paraboly r jde bodem M a má směr definovaný rovnicí (8).



Obr. 1.

Přímka h bodem M antiparallelní k této přímce řídící vzhledem k osám x, y obsahuje ohnisko F paraboly a má rovnici

$$y - Y_0 = -\frac{a_3 + a_1}{2(a_4 - a_0)}(x - X_0)$$

čili se zřetelem na hodnoty (9) pro X_0 a Y_0

$$2(a_4 - a_0)\,y + (a_3 + a_1)\,x - (a_4 - a_2 + a_0) = 0;$$

její úsečky $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ na osách x, resp. y jsou tudíž

$$\mathfrak{x} = \frac{a_4 - a_2 + a_0}{a_3 + a_1}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{a_4 - a_2 + a_0}{2(a_4 - a_0)}. \tag{10}$$

4. Vypočítejme dále souřadnice od O různých průsečíků kuželosečky w s isotropickými přímkami

$$x \pm iy = 0.$$

Obdržíme mechanickým výpočtem z rovnice (7)

$$x_1 = \frac{(a_3 + a_1) - 2(a_4 - a_0)i}{(a_4 - a_2 + a_0) + (a_3 - a_1)i},$$

$$y_1 = \frac{2(a_4 - a_0) + (a_3 + a_1)i}{(a_4 - a_2 + a_0) + (a_3 - a_1)i},$$

$$x_2 = \frac{(a_3 + a_1) + 2(a_4 - a_0)i}{(a_4 - a_2 + a_0) - (a_3 - a_1)i},$$

$$y_2 = \frac{2(a_4 - a_0) - (a_3 + a_1)i}{(a_4 - a_2 + a_0) - (a_3 - a_1)i}.$$

Poláry bodů (x_1, y_1), (x_2, y_2) vzhledem ku k jsou isotropické tečny paraboly r. Průsečík jejich jest pak ohniskem F této paraboly.

Souřadnice X, Y pro F jsou tudíž dány vzorci

$$X = \frac{y_2 - y_1}{y_2 x_1 - y_1 x_2}, \quad Y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 x_1 - y_1 x_2}$$

anebo když klademe $x_1 = iy_1$, $x_2 = -iy_2$

$$X = \frac{y_1 - y_2}{2i\, y_1 y_2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2 y_1 y_2}.$$

Dosazením dříve vypočítaných hodnot pro y_1 a y_2 dojdeme pak k výrazům

$$X = \frac{(a_4 - a_2 + a_0)(a_3 + a_1) - 2(a_4 - a_0)(a_3 - a_1)}{4(a_4 - a_0)^2 + (a_3 + a_1)^2},$$

$$Y = \frac{2(a_4 - a_2 + a_0)(a_4 - a_0) + (a_3^2 - a_1^2)}{4(a_4 - a_0)^2 + (a_3 + a_1)^2}. \tag{11}$$

Stanovme ještě směr tečny g ke kuželosečce w v bodě jejím na y různém od 0. Pro bod ten jest

$$x = 0, \quad y = \frac{a_4 - a_0}{a_4 + a_0},$$

proto obdržíme ze (7')

$$y' = -\frac{a_4 a_1 + a_3 a_0}{a_4^2 - a_0^2},$$

a kolmice s 0 na g spuštěná má rovnici

$$\eta = \frac{a_4^2 - a_0^2}{a_4 a_1 + a_3 a_0}\,\xi\,;$$

a protíná dle (9) přímku

$$\eta = \frac{a_4 + a_0}{a_4 - a_0}$$

v jejím bodě dotyku G s r, pro nějž tedy jest

$$\xi = \frac{a_4 a_1 + a_3 a_0}{(a_4 - a_0)^2}. \tag{12}$$

5. Kolmice h_1 bodem G ku přímce h (odst. 3.) protne tuto v ohnisku F, čímž tento jest znovu stanoven.

Rovnice přímky h_1 zní se zřetelem na (8)

$$\mathfrak{Y} - Y_0 = \frac{2(a_4 - a_0)}{a_3 + a_1}(\mathfrak{X} - X_0).$$

Budiž $\mathfrak{X}_0$ úsečka jejího průsečíku s x a $\mathfrak{Y}_0$ pořadnice jejího průsečíku s y. Dosadíme-li zde za X_0 a Y_0 hodnoty z (9), obdržíme

$$\mathfrak{X}_0 = -\frac{a_3 - a_1}{2(a_4 - a_0)}, \quad \mathfrak{Y}_0 = \frac{a_3 - a_1}{a_3 + a_1}. \tag{13}$$

6. Tím jest parabola r způsobem co nejjednodušším vyjádřena. Třeba jen nanésti na x úsečku $\mathfrak{X}_0$ z (13), na osu y úsečky $\mathfrak{y}$, Y_0, $\mathfrak{Y}_0$ dané příslušně rovnicemi (10), (9) a (13), pak spustiti kolmici s koncového bodu přenesené úsečky $\mathfrak{y}$ na přímku $\mathfrak{X}_0\mathfrak{Y}_0 \equiv h_1$; pata kolmice té jest již ohniskem F paraboly. Tato kolmice h seče rovnoběžku k x vedenou koncovým bodem přenesené úsečky Y_0 v bodě M (odst. 3.). Přímka s antiparallelní ku h vzhledem k osám souřadným půlící úsečku MF jest tečnou vrcholovou pro r; můžeme ji obdržeti též co druhou úhlopříčnu obdélníka majícího MF za úhlopříčnu první, jehož strany jsou rovnoběžny k osám x, y. Dále posuneme přímku x a měřítko na ní se nalézající v záporném směru osy y, až přejde do polohy t, dotýkající se v bodě O_1 kružnice k. Ostatně mohli jsme měřítko ihned umístiti na t tak, aby v bodě $(O_1 - 1)$ se dotýkalo kružnice k a aby co do smyslu se shodovalo s osou x.

Máme-li nyní rovnici (1) konstruktivně řešiti, sestrojíme si nejprv právě uvedeným způsobem ohnisko F a tečnu vrcholovou s paraboly r a pohybujeme daný pravý úhel tak, aby jedno rameno procházelo stále bodem F a vrchol aby popisoval přímku s tak, až přijde do polohy, v níž druhé rameno se dotýká kružnice k. Protne-li nyní toto rameno přímku t v bodě X_i, pak délka úsečky O_1X_i udává jeden kořen rovnice (1).

Neboť bod dotyku T_i tohoto ramene v kružnici k jest zároveň jedním průsečíkem kuželosečky w s k a přímka VT_i by protla osu x v bodě $\mathfrak{X}_i$ tak, že by úsečkou $O\mathfrak{X}_i$ dán byl jeden kořen rovnice (1). Ježto $O_1X_i = O\mathfrak{X}_i$, vidíme, že skutečně O_1X_i udává hledaný kořen.

Arciť obdržíme takto přímo jen kořeny reálné dané rovnice.

7. Klademe-li v provedených úvahách všude $a_0 = 0$, dojdeme k řešení rovnice 3. stupně

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \tag{I.}$$

ježto se tím z (1) vylučuje kořen $x = \infty$. Zde dotýká se parabola r tečny ku k v bodě (0,1) vedené, takže zbývají ještě jen tři tečny společné k a r. Veličiny dříve odvozené nabývají zde následujících hodnot.

$$X_0 = -\frac{a_4 + a_2}{a_3 + a_1}, \quad Y_0 = 1; \tag{9'}$$

$$\mathfrak{x} = \frac{a_4 - a_2}{a_3 + a_1}, \quad \mathfrak{y} = \frac{a_4 - a_2}{2a_4}; \tag{10'}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{a_4(a_3 - 3a_1) + a_2(a_3 + a_1)}{4a_4^2 + (a_3 + a_1)^2}, \\ Y &= \frac{2a_4(a_4 - a_2) + (a_3^2 - a_1^2)}{4a_4^2 + (a_3 + a_1)^2} \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

$$\xi = \frac{a_1}{a_4}, \tag{12'}$$

$$\mathfrak{X}_0 = -\frac{a_3 - a_1}{2a_4}, \quad \mathfrak{Y}_0 = \frac{a_3 - a_1}{a_3 + a_1}. \tag{13'}$$

Klademe-li ale v úvahách dřívějších všude $a_4 = 0$, obdržíme řešení rovnice

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0. \tag{II.}$$

Zde dotýká se r tečny t ku k a ostatní společné tečny křivek r, k dávají kořeny rovnice (II.). Obdržíme zde

$$X_0 = -\frac{a_2 + a_0}{a_3 + a_1}, \quad Y_0 = -1; \tag{9''}$$

$$\mathfrak{x} = -\frac{a_2 - a_0}{a_3 + a_1}, \quad \mathfrak{y} = \frac{a_2 - a_0}{2a_0}; \tag{10''}$$

$$\begin{aligned} X &= -\frac{a_2(a_3 + a_1) - a_0(3a_3 - a_1)}{4a_0^2 + (a_3 + a_1)^2}, \\ Y &= \frac{2a_0(a_2 - a_0) + (a_3^2 - a_1^2)}{4a_0^2 + (a_3 + a_1)^2}; \end{aligned} \tag{11''}$$

$$\xi = \frac{a_3}{a_0}, \tag{12''}$$

$$\mathfrak{X}_0 = \frac{a_3 - a_1}{2a_0}, \quad \mathfrak{Y}_0 = \frac{a_3 - a_1}{a_3 + a_1} \tag{13''}$$

8. V následujícím provedeme dva zvláštní příklady; budeme se tu totiž zabývati sestrojením pravidelného devítiúhelníku a sedmiúhelníku. Poslední úvahy nás vedou v obou případech ku dvěma řešením. Volíme-li totiž kružnici, do níž má pravidelný mnohoúhelník býti vepsán za kružnici k, položíme-li pak osu x středem O tak, aby její kladný směr procházel jedním vrcholem A_0 mnohoúhelníku a označíme-li průsečíky osy x se spojnicí vrcholů mnohoúhelníku souměrně ku x položených Y_1, Y_2, resp. Y_3, při čemž při devítiúhelníku nepřihlíží se k průsečíku spojnice, z níž vytíná k tětivu rovnající se straně rovnostranného trojúhelníku do k vepsaného, pak jsou délky y úseček $2 . OY_1$, $2 . OY_2$, $2 . OY_3$ dány jakožto kořeny rovnice 3. stupně, která jest pro pravidelný devítiúhelník

$$y^3 - 3y + 1 = 0 \tag{14}$$

a pro pravidelný sedmiúhelník

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \tag{15}$$

9. Zabývejme se nejprv devítiúhelníkem, pro nějž se zřetelem na rovnici (I.) jest

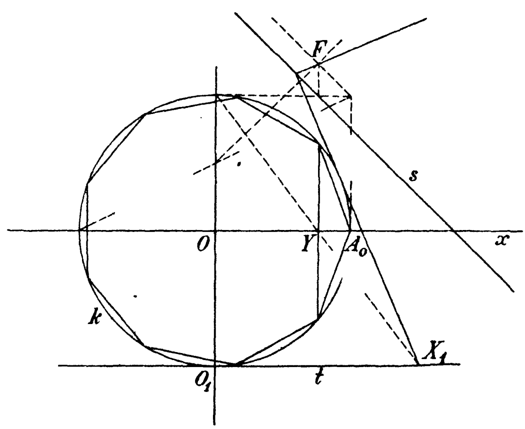
$$a_1 = 1, \ a_2 = 0, \ a_3 = -3, \ a_4 = 1,$$

takže

$$X_0 = \frac{1}{2},\ Y_0 = 1;\ \mathfrak{x} = -\frac{1}{2},\ \eta = \frac{1}{2};\ X = \frac{3}{4},\ Y = \frac{5}{4};\ \xi = 1;$$

$$\mathfrak{x}_0 = 2,\ \mathfrak{Y}_0 = 2.$$

Sestrojíme tedy (obr. 2.) bod F z jeho souřadnic $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ na př. způsobem z obrazce patrným, protneme jeho pořadnici tečnou kružnice k v bodě (0,1) a vedeme bodem průsečným rovnoběžku ku přímce spojující body (1,0), (0,1); tato rovnoběžka jest tečnou vrcholovou s paraboly r. Nyní vsuneme pravý



Obr. 2.

úhel tak, aby vrchol ležel na s, jedno rameno procházelo bodem F a druhé se dotýkalo kružnice k. Pak protne toto tečnu t ku k v bodě X_1, pro nějž $O_1X_1 = y_1$, při čemž y_1 jest jedním kořenem rovnice (14). Spojíme-li tedy X_1 s bodem (0,1), protne spojnice osu x v bodě Y, a tětiva v k kolmá ku x a bod Y obsahující stanoví na k dva vrcholy hledaného devítiúhelníku, jehož další vrcholy obdržíme souvislým přenášením této tětivy do kružnice k.

Se zřetelem na (II.) jest v rovnici (14)

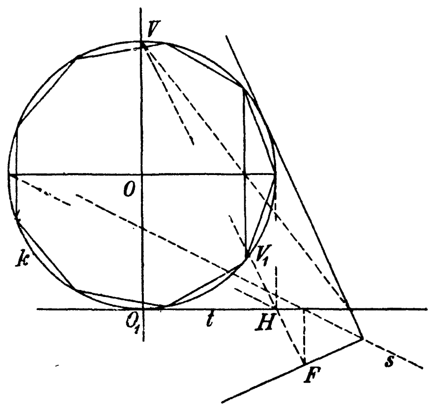
$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -3,\ a_3 = 1,$$

takže

$$X_0 = 2,\ Y_0 = -1;\ \mathfrak{x} = 4,\ \mathfrak{y} = -2;\ X = \frac{6}{5},\ Y = -\frac{7}{5};$$

$$\xi = 1;\ \mathfrak{X}_0 = \frac{1}{2},\ \mathfrak{Y}_0 = 1.$$

Spojíme tedy na př. (obr. 3.) bod $H(1, -1)$ s $V(0,1)$, protneme spojnici s k v dalším bodě V_1, na ni naneseme $HF = V_1H$, čímž obdržíme ohnisko F paraboly r. Tečna její vrcholová s jde patou kolmice s F na t spuštěné a jest rovnoběžná k přímce, která spojuje H s bodem $(-1, 0)$. Další postup konstrukce souhlasí s postupem prve vytknutým.



Obr. 3.

10. Pro konstrukci pravidelného sedmiúhelníku máme v rovnici (15) vzhledem ku (I.)

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = -2,\ a_4 = -1,$$

takže tu obdržíme

$$X_0 = 0,\ Y_0 = 1;\ \mathfrak{x} = 2,\ \mathfrak{y} = 1;\ X = -\frac{4}{5},\ Y = \frac{7}{5};\ \xi = -1,$$

$$\mathfrak{X}_0 = -\frac{3}{2},\ \mathfrak{Y}_0 = 3.$$

To nás vede k následujícímu řešení (obr. 4.):

Spojme O_1 s bodem $H_1(-1, 1)$ a odvoďme k druhému průsečíku L přímky O_1H_1 s k bod souměrně položený vzhledem ku VH_1; bod ten jest ohniskem F paraboly r, a kolmice s bodu $VH_1 . LF$ na O_1H_1 jest její tečnou vrcholovou s. Další postup jest jako při pravidelném devítiúhelníku.

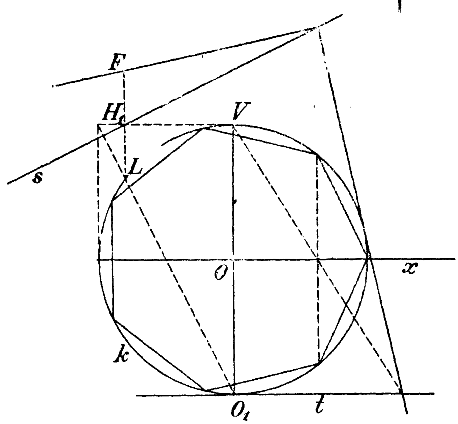
Se zřetelem na (II.) máme v rovnici (15)

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = -1,$$

takže

$$X_0 = \infty,\ Y_0 = -1;\ \mathfrak{x} = \infty,\ \mathfrak{y} = -\frac{3}{2};\ X = -1,\ Y = -\frac{3}{2};$$

$$\xi = -1;\ \mathfrak{X}_0 = -1,\ \mathfrak{Y}_0 = \infty.$$



Obr. 4.

Zde můžeme tedy ohnisko $F\left(-1,\ -\frac{3}{2}\right)$ ihned sestrojiti; přímka řídící paraboly r jest rovnoběžná ku t a ježto t se paraboly naší dotýká, jest $s - t$. Body X_i jsou zde vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno prochází bodem F, druhé se dotýká kružnice k. (Obr. 5.)

11. První konstrukce pravidelného sedmiúhelníku, s níž jsme se v posledním odstavci zabývali, použijeme ještě k odvození jedné jednoduché vlastnosti jeho.

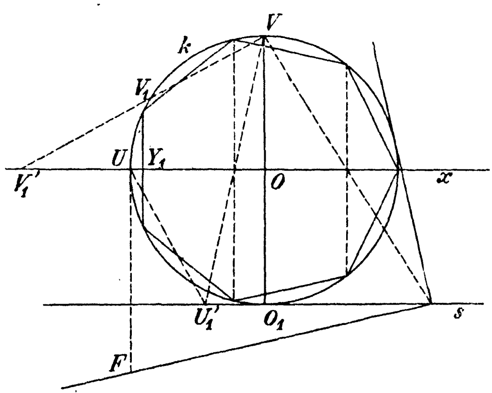
Rovnice (7) kuželosečky w, která jest polárně reciprokou k parabole r, vzhledem ku k jest zde jednoduše

$$2y^2 - 3xy + x - 2y = 0. \tag{16}$$

Vyjděme tu od rovnice příbuznosti

$$(\eta + 1)\xi^2 - (2\eta + 1) = 0,$$

která pro $\xi = \eta = y$ vede na rovnici (15) a dle Chaslesa nám poskytuje řešení její. Příslušnou konstrukci uspořádejme nyní tak, že béřeme bod U ku A_0 diametrálně protilehlý místo dříve voleného bodu $V(0,1)$ za střed promítání a dále že béřeme pro hodnoty ξ, η místo měřítka na x měřítko na t, jež jsme obdrželi jeho posunutím ve směru osy y.



Obr. 5.

Spojnice bodů X_1, X_2 na t, pro něž jest $O_1X_1 = - O_1X_2 = \xi$, s bodem U mají rovnice

$$(\xi + 1)y + (x + 1) = 0,$$
$$(-\xi + 1)y + (x + 1) = 0$$

a tvoří kuželosečku

$$(\xi^2 - 1)y^2 - 2(x + 1)y - (x + 1)^2 = 0.$$

Odečteme-li od této rovnice rovnici

$$(\xi^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

obdržíme rovnici

$$2(y + 1) + \xi^2(x - 1) = 0$$

přímky p, která spojuje průměty bodů X_1, X_2 z bodu U na k. Vidíme, že všecky takové přímky tvoří svazek (p) o středu $(1, -1)$.

Přímka, která spojuje koncový bod úsečky η na t s bodem U, má rovnici

$$(\eta + 1)y + (x + 1) = 0.$$

Z naší rovnice příbuznosti plyne

$$\eta + 1 = \frac{1}{2 - \xi^2},$$

tak že přímka q příslušná ku p v promětných svazcích (p) a (q) (odst. 1.) má rovnici

$$y + 2(x + 1) - \xi^2(x + 1) = 0.$$

Vyloučíme-li z ní a z rovnice pro p parametr ξ, obdržíme rovnici

$$2x^2 + 3xy + y + 2x = 0 \tag{17}$$

kuželosečky w_1, která jest patrně shodná s kuželosečkou w danou rovnicí (16) a již obdržíme z w otočením o $\frac{\pi}{2}$ kolem O.

Značme průsečíky kuželosečky w s k v pořádku, jak po sobě v kladném smyslu následují V, V_1, V_2, V_3, a kuželosečky w_1 pak U, U_1, U_2, U_3. Průměty bodů V_1, V_2, V_3 z V na x buďtež V'_1, V'_2, V'_3 a bodů U_1, U_2, U_3 z U na t pak U'_1, U'_2, U'_3; dále značme Y_1, Y_2, Y_3 body půlící úsečky OV'_1, OV'_2, OV'_3. Bod Y_1 leží na straně sedmiúhelníku kolmé ku x v záporné části osy x, v téže části leží též Y_2, ale blíže ku O, kdežto Y_3 leží na kladné části osy x. Následují tudíž v kladném smyslu osy x po sobě body V'_1, V'_2, O, V'_3. Ježto $VV'_1 \perp UU'_1 \ldots$, následují na t body U'_1, U'_2, nekonečně vzdálený bod a U'_3, tedy body U'_3, U'_1, U'_2 v kladném smyslu po sobě a ježto jejich vzdálenosti od O_1 rovnati se musí příslušně vzdálenostem bodů $V'_1 \ldots$ od O, proto jest

$$OV'_1 = O_1U'_3, \; OV'_2 = O_1U'_1, \; OV'_3 = O_1U'_2.$$

Z toho plyne následující souvislost:

„Stanovíme-li body V'_1, V'_2, V'_3 k středu O souměrně položené vzhledem k bodům Y_1, Y_2, Y_3 a protneme-li tečnu t kolmicemi spuštěnými s U na VV'_1, VV'_2, VV'_3 v příslušných bodech U'_1, U'_2, U'_3, pak protínají spojnice VU'_1, VU'_2, VU'_3 osu x příslušně v bodech Y_2, Y_3, Y_1."

Z podobných trojúhelníků OVV'_1, $V'_2UU'_1$ plyne, klademe-li $OV'_1 = y_1$, $OV'_2 = y_2$, $OV'_3 = y_3$, rovnice

$$(1 + y_2)y_1 = - |OV \, . \, OO_1|$$

aneb

$$y_1y_2 + y_1 + 1 = 0.$$

Obdobně dospějeme k rovnicím

$$y_2y_3 + y_2 + 1 = 0,$$
$$y_3y_1 + y_3 + 1 = 0,$$

kde každá z těchto tří rovnic jest následkem ostatních dvou.

Správnost těchto rovnic plyne ostatně ihned, když veličiny y_1, y_2, y_3 vyjádříme sedmými odmocninami z jednotky.

Klademe-li

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i \sin\frac{2\pi}{7},$$

pak jest při označení námi zvoleném

$$y_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3}, \quad y_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \quad y_3 = \varepsilon^1 + \varepsilon^{-1},$$

takže na př.

$$\begin{aligned}(\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3})(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}) + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} \\ &= \varepsilon^5 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^1 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} \\ &= \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 \\ &= -1,\end{aligned}$$

ježto se v posledním součtu všechny mocnosti ε od 1 do 6 vyskytují, z čehož naše 3 rovnice plynou, z nichž naopak prve vyslovená vlastnost pravidelného sedmiúhelníku vyplývá.

O sestrojování vzorců empirických.

Píše **V. Láska.**

II.

Buďtež dány dvě přímky, jichž poloha vzhledem k osám X a Y závisí od argumentů u, v . . . rovnicemi

$$A_0x + A_1y + A_2 = 0$$
$$B_0x + B_1y + B_2 = 0$$