Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický
Úvod do vektorové analyse. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 3, 207--219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122465

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1906

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

bylo by

$$\varphi = 2^6 \,.\, 3^4 = 5184'' = 1^0 26' 24'',$$
$$2m + 1 = 5^3 = 125,$$
$$m = 62\,;$$

tu by hodnotu 0 měly determinanty

$$D_{124}, D_{249}, D_{374}, \ldots$$

a ostatní determinanty by měly jednu z hodnot $\pm D_0, \pm D_1, \ldots, \pm D_{61}$, o čemž rozhodnouti lze dle rovnice (41), po případě (39). Tak bylo by na př.

$$D_{326} = D_{5.62+16} = -D_{3.62+15} = (-1)^2 D_{62+14}$$

a dále dle (39)

$$= D_{2.62-48} = D_{47}.$$

Podobným způsobem vyšetřovaly by se jiné případy.

V Brně dne 9. prosince 1905.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal prof. **Ant. Libický**.

Vektorová analysis, jedna z mladších větví vědy mathematické, pěstována byla s počátku hlavně učenci anglickými a americkými (Hamilton, Hyde, Heaviside, Gibbs, Wilson a j.). V Německu, kde základy tohoto počtu zbudovány byly F. Möbiusem a H. Grassmannem, teprv od nedávna jeví se proň čilý zájem, obzvláště když se ukázalo, jaké platné služby prokazuje v novější nauce o elektřině (v elektrodynamice a v theorii elektronové). Svědčíť o tom řada spisů, vydaných v posledních letech o tomto předmětu*). I soudím, že by bylo prospěšno, aby i

*) *Föppl*: »Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität«; druhé vydání téhož spisu od *Abrahama*; *Föppl*: »Die Geometrie der Wirbelfelder«; *Bucherer*: »Elemente der Vektor-Analysis«; *Gans*: »Einführung in die Vektoranalysis«; *Jahnke*: »Vorlesungen über die Vektorenrechnung«; *V. Fischer*: »Vektordifferentiation und Vektorintegration«; příslušné články v »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften«, kterou vydává Teubner v Lipsku. — Skoro všechny tyto spisy, jakož i dílo »Vector Analysis« od Gibbs-Wilsona, byly prameny k tomuto článku.

u nás učiněn byl počátek s pěstováním vektorové analyse, k čemuž přispěti chci tímto článkem, v němž ovšem jest se mi omeziti jen na věci hlavní a podstatné.

Jest pravda, že mezi mathematiky a fysiky ještě dosud rozcházejí se mínění o tom, jakou měrou počet vektorový jest užitečný; jedni zavrhují jej docela, tvrdíce, že jest zbytečný a že můžeme jej snadno postrádati; jiní poukazují správně k oekonomii myšlení, ovládající celou mathematiku, jíž ovšem počtem tím vyhověno jest tak, že o jeho oprávněnosti a vhodnosti nelze pochybovati. Případný jest v té příčině úsudek, který Gauss pronesl v podobném případě, když mu totiž předložen byl k posouzení Möbiusův kalkul barycentrický; napsalť tehdáž (r. 1843) Schumacherovi: „Se všemi takovými novými počty má se věc tak: nemůžeme jimi vykonati nic, čeho bychom nemohli vykonati i bez nich. Ale poskytují přece výhody. Jestliže takový počet je v souhlase s nejvniternější podstatou potřeb velmi často se vyskytujících, může každý, kdo si jej zcela osvojil, řešiti i bez takořka neuvědomělých inspirací genia, jichž nelze vynutiti, úlohy sem spadající, ba řešiti je skoro mechanicky i v případech tak složitých, že bez pomoci počtu toho i genius byl by málomocný. Tak je tomu s vynálezem počtu písmenkového vůbec, tak tomu bylo i s počtem differenciálním. Takovými koncepcemi stávají se nesčíslné úlohy, jež jinak jsou ojedinělé a vždy nového úsilí vynalézavého ducha vyžadují, takměř organickým celkem.“

Pojmy základní. Počítání vektory.

Ve fysice seznamujeme se se dvěma druhy základních veličin, jež označujeme jmény skaláry a vektory.

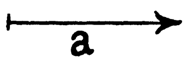
Veličinu zoveme *skalárem*, jestliže soubor hodnot, jichž může nabýti, lze přiřaditi řadě čísel reálních, při čemž musí býti šetřeno zákona nepřetržitosti a vzájemné jednoznačnosti. Tudíž každá hodnota skaláru jest úplně určena jediným reálním číslem (kladným či záporným, racionálním či irracionálním), předpokládaje, že jednotka míry jest volena.

Skaláry jsou na př.: čas, hustota, energie, teplota atd. Všechny tyto veličiny můžeme měřiti na jakési stupnici čili skále; odtud jméno jejich. Znameňáme je písmeny kursivními, na př. a, b, c atd.

O rovnosti dvou hodnot téže veličiny skalární lze dle toho souditi z rovnosti poměrných čísel, jež těmto hodnotám příslušejí na základě téže jednotky.

Počítání veličinami skalárními spravuje se všemi pravidly, jimž učí algebra o počítání čísly, těmito typickými skaláry.

Veličinu zoveme *vektorem*, jestliže soubor hodnot, jichž může nabýti, lze přiřaditi souboru všech přímočarých pošinutí, kterými převádíme bod z pevné polohy počáteční do kterékoli jiné polohy konečné v prostoru; přiřadění to řídí se opět zákonem nepřetržitosti a vzájemné jednoznačnosti. Tudíž vektor jest veličina, jíž přísluší nejen určitá velikost, ale i určitý směr.



Obr. 1.

Typem vektorů jest translace; vektory jsou též: rychlost, urychlení, intensita pole gravitačního, magnetického, elektrického atd. Všechny takové veličiny znázorňujeme geometricky úsečkou určité délky, kterou opatřujeme u koncového bodu šípem, jímž vytýkáme směr vektoru (obr. 1.). Znamenati je budeme písmeny $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ atd.

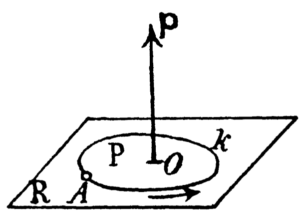
Dva vektory se sobě rovnají, mají-li stejnou velikost a stejný směr. Značí tedy $\mathbf{a}$ nejen vektor, zobrazený v obr. 1., nýbrž i každý jiný vektor v prostoru, který jest s ním rovnoběžný a má touž délku.

Položíme-li daný vektor $\mathbf{a}$ několikráte (na př. a-kráte) na jakékoli přímce, s $\mathbf{a}$ rovnoběžné, vedle sebe tak, aby vždy počátek následující polohy splýval s koncem polohy předcházející, obdržíme vektor

$$\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \ldots (a\text{-kráte}) = a\mathbf{a}.$$

Zvláště sluší vytknouti *vektor jednotkový*, jehož velikost rovná se jednotce; znamenáme jej $\mathbf{a}_1$. Jiný vektor $\mathbf{a}$ téhož běhu, jehož velikost rovná se a jednotkám, jest dle předešlého dán výrazem $a\mathbf{a}_1$; v tom a jest *skalární částí* vektoru $\mathbf{a}$.

S výhodou užíváme vektorů, abychom jimi stanovili též plochy. Budiž dána v rovině R (obr. 2.) křivka *k*, která vznikla pohybem bodu ve směru vyznačeném šípem; předpokládejme, že křivka ta jest uzavřená a že se neprotíná. Rovnou plochu P, omezenou touto křivkou, můžeme představiti vektorem **p**, který jest dlouhý tolik jednotek délkových, kolik má plocha jednotek čtverečných a jehož směr jest určen směrem normály, v kterémkoli bodu *O* roviny R vztyčené v tu stranu prostoru, odkud vidíme, postaveni jsouce zpříma, pohyb bodu křivku vytvořujícího ve smyslu kladném (t. j. protivném rotaci hodinkové ručičky na ciferníku vzhledem k ose od ciferníku kolmo k pozorovateli vedené).



Obr. 2.

U ploch křivých znázorňujeme vektory jejich plošné prvky, jež můžeme pokládati za rovinné; velikosti těchto vektorů jsou ovšem nekonečně malé.

Promítneme-li rovinný obrazec P, ležící v rovině R, na jinou rovinu S, která s R tvoří úhel α, jest plocha průmětu $=$ P $\cos \alpha$; tudíž vektor, jenž představuje tento průmět, má běh kolmice na rovinu S a velikost jeho rovná se délce průmětu vektoru **p**, příslušného obrazci P, na tuto kolmici.

Sečítání a odečítání vektorů. Je-li sestrojiti součet dvou daných vektorů **a** a **b**, vedeme libovolným bodem *O* (obr 3.) v prostoru vektor **a** a připojíme k němu vektor **b** tak, aby počátek jeho připadl na konec sčítance **a**; hledaný součet $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ jest vektor, vedený z bodu *O* ke koncovému bodu takto sestrojeného vektoru **b**. Jest bezprostředně zřejmo, že při sečítání tom na pořádku sčítanců nezáleží; jest tedy sečítání vektorů kommutativní. Není třeba uváděti dále, jak toto sečítání dvou vektorů se rozšiřuje na sečítání tří, čtyř atd. vektorů.

Jsou-li dány tři vektory **a**, **b**, **c**, platí, jak snadno lze ukázati,

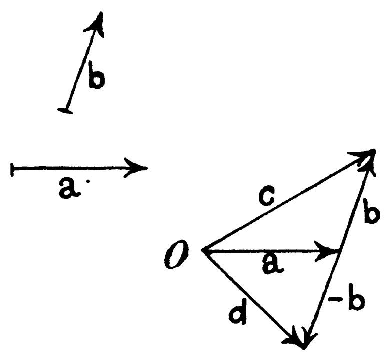
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

t. j. sečítání vektorů jest výkonem associativním.

Odečítání vektorů převádíme na sečítání, užívajíce vztahu

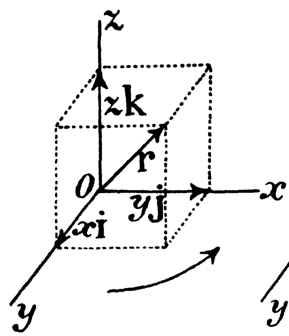
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Obrátíme tedy směr menšitele **b** a přičteme takto změněný vektor k vektoru **a** (obr. 3.).

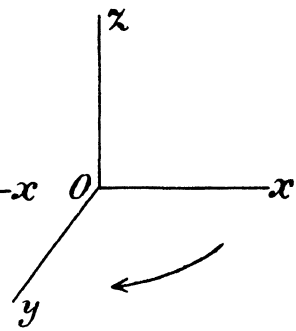


Obr. 3.

Ve vektorové analysi rozkládáme často daný vektor ve tři sčítance, jež mají po řadě běhy os x, y, z zavedené soustavy souřadnic rovnoběžných. Předpokládejme o této soustavě — ač nebude-li jinak vytčeno — že jest pravoúhlou. Ustanovme ještě, že kladný směr osy z-ové vztyčen jest na stranu roviny (x, y), odkud pozorovateli jest otočiti kladný směr osy x-ové smyslem kladným o úhel pravý, aby se sjednotil s kladným směrem osy y-ové (obr. 4a). Nebo jinak řečeno: šroub v pravo točivý, kterým točíme smyslem kladným od osy x-ové k ose y-ové o úhel pravý, pošinuje se směrem, jímž stanoven jest kladný směr osy z-ové. Soustavu souřadnic, jejíž osy takto byly voleny, zoveme *positivní* či *v pravo točivou*; od ní liší se soustava *negativní* či *v levo točivá*, při níž otočením šroubu v levo točivého (o úhel pravý) od osy x-ové k ose y-ové způsobeno jest pošinutí v kladném směru osy třetí (obr. 4b). Jedna z těchto soustav má se ke druhé jako předmět ku svému obrazu v zrcadle rovném; jsouť souměrné. Převrátíme-li v jedné z nich směr buď jen jedné nebo všech tří os, obdržíme soustavu druhou.



Obr. 4a.*)



Obr. 4b.

Označme jednou pro vždy dané jednotkové vektory, jež mají po řadě běhy os x, y, z soustavy positivní**), písmeny **i**, **j**, **k**; i jsou sčítanci vektoru $\mathbf{r} = OA$, spadající do os souřadných, dány výrazy $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$, kde x, y, z značí nyní pravoúhlé souřadnice koncového bodu A vektoru **r**, je-li počátkem soustavy jeho počáteční bod O. Tudíž lze psáti

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1a}$$

Leží-li vektor v rovině dvou os, na př. x a y, obdržíme proň výraz

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \tag{1b}$$

Vektor jest určen třemi skaláry, na př. rozdíly $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ pravoúhlých souřadnic koncového a počátečního bodu jeho nebo třemi polárními souřadnicemi jeho konce v soustavě, jejímž pólem jest jeho počátek a pod.

Rovná-li se vektor **a** jinému vektoru **b**, rovnají se též tři skalární veličiny, určující vektor **a** po řadě skalárním veličinám,

*) V tomto obrazci vyměněno jest označení os x-ové a y-ové; místo x (na konci vodorovné přímky) má býti y a místo y písmeno x. Také koncový bod průvodiče **r** není označen písmenem A.

**) Takovou soustavu chceme v dalším vždy předpokládati, nebude-li jinak řečeno.

jež stanoví vektor **b**. Tudíž vektorová rovnice $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ zahrnuje v sobě tři rovnice skalární.

Na sečítání vektorů převádíme také sečítání ploch; místo abychom sečítali dvě, tři atd. rovinné plochy omezené, sečítáme příslušející jim vektory.

Zvláště sluší vytknouti, jak stanovíme součet ploch, jež tvoří povrch uzavřeného mnohostěnu. K řešení té úlohy užijeme známé věty z nauky o mnohostěnech, že součet pravoúhlých průmětův uzavřeného mnohostěnu na libovolnou rovinu R rovná se nulle*). Jest však průmět každé stěny na rovinu R roven průmětu vektoru stěnu tu představujícího na kolmici ku R. Poznamenati dlužno, že volíme u všech těchto vektorů kladný směr vždy tak, aby namířen byl z vnitřku mnohostěnu na venek. Součet jejich průmětů rovná se tedy nulle, což jest možno jen tenkráte (vzhledem k tomu, že rovina R jest libovolnou), když vektory, příslušející jednotlivým stěnám, tvoří mnohoúhelník uzavřený, čili jinak řečeno, když součet těchto vektorů roven jest nulle. Tudíž vektor, který představuje povrch uzavřeného mnohostěnu, rovná se nulle.

Tato věta platí i tenkráte, je-li povrch tělesa nějakého křivý; pak pokládáme totiž povrch ten za mez povrchu uzavřeného mnohostěnu, majícího za stěny plošné prvky křivých ploch, jichž počet vzrůstá do nekonečna. Není-li křivá plocha uzavřena, dána jest vektorem, který stanovíme výrazem $\int d\mathbf{p}$, značí-li $d\mathbf{p}$ prvek plošný.

Součiny dvou vektorů. Rozeznáváme tyto součiny dvou vektorů **a** a **b**:

I. **Součin skalární** (dle Grassmanna *interní***)), který se rovná součinu z velikostí obou vektorů a cosinu úhlu jimi sevřeného. Znaménkem skalárního násobení vektorů jest tečka, kterou klademe mezi oba činitele; píšeme tedy

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = ab \cos \widehat{\mathbf{ab}}. \qquad (2)$$

*) Viz na př. Baltzer: Elemente der Mathematik, II. Band, 4. vyd., pag. 337.

**) Viz můj článek: »Základové geometrického počtu Grassmannova« v XXV. ročníku tohoto časopisu, pag. 280.

Můžeme též říci: Skalární součin dvou vektorů dán jest součinem (algebraickým) z velikosti jednoho činitele a z velikosti průmětu druhého činitele na směr prvního.

Příkladem skalárního součinu jest velikost práce, kterou vykoná síla **f** na dráze **s**, tvořící se směrem síly jakýsi úhel; pro práci tu obdržíme totiž výraz **f** . **s**.

Snadno ukážeme, že

$$\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b} = \mathbf{b} \, . \, \mathbf{a},$$

neboť $cos \, \widehat{\mathbf{ba}} = cos \, (- \, \widehat{\mathbf{ab}}) = cos \, \widehat{\mathbf{ab}}$. Násobení skalární jest tedy výkonem záměnným.

Je-li m libovolný skalár, platí patrně

$$(m\mathbf{a}) \, . \, \mathbf{b} = \mathbf{a} \, . \, (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}).$$

Násobení skalární jest také distributivní, poněvadž

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \, . \, \mathbf{c} = \mathbf{a} \, . \, \mathbf{c} + \mathbf{b} \, . \, \mathbf{c};$$

o správnosti této rovnice se přesvědčíme, promítneme-li vektory **a** a **b** na směr vektoru **c** a uvážíme-li, že průmět součtu **a** + **b** rovná se součtu průmětů obou sčítanců na týž směr.

Obecně platí tedy:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots) \, . \, (\mathbf{p} + \mathbf{q} + \ldots) = \; & \mathbf{a} \, . \, \mathbf{p} + \mathbf{a} \, . \, \mathbf{q} + \ldots \\ & + \mathbf{b} \, . \, \mathbf{p} + \mathbf{b} \, . \, \mathbf{q} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Z definice skalárního součinu plyne dále, že skalární součin dvou rovnoběžných vektorů roven jest součinu jejich velikostí se znaménkem kladným, jsou-li směry vektorů souhlasny, a se znaménkem záporným, jsou-li směry ty protivny.

Jsou-li oba rovnoběžné vektory též stejně dlouhé, jest $\mathbf{a} \, . \, \mathbf{a} = a^2$; tudíž lze skalární část a vektoru **a** psáti ve tvaru $\sqrt{\mathbf{a} \, . \, \mathbf{a}}$.

Stojí-li vektor **a** kolmo na vektoru **b** (a není-li žádný z nich roven nulle), jest $\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b} = 0$; a naopak, je-li $\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b} = 0$, jest **a** kolmo ku **b**.

Budiž jeden z činitelů skalárního součinu jednotkovým vektorem, na př. $\mathbf{a}_1$, pak značí $\mathbf{a}_1 \, . \, \mathbf{b} = b \; cos \, \widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{b}}$ délku průmětu vektoru **b** na směr vektoru $\mathbf{a}_1$, což jest skalární částí vektoru, který jest tímto průmětem. Můžeme tudíž psáti

$$pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 \,.\, \mathbf{b})\,\mathbf{a}_1. \tag{3}$$

Buďtež oba činitelé jednotkovými vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$; pak

$$\mathbf{a}_1 \,.\, \mathbf{b}_1 = \cos \widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1}, \tag{4}$$

t. j. skalárním součinem dvou jednotkových vektorů stanoven jest cosinus úhlu, který oba vektory spolu uzavírají.

Pro součiny skalární základních vektorů jednotkových **i**, **j**, **k**, jež byly výše zavedeny, obdržíme dle toho hodnoty

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} = \mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} = \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k} &= 1, \\ \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} = \mathbf{j}\,.\,\mathbf{k} = \mathbf{k}\,.\,\mathbf{i} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Jsou-li oba činitelé skalárního součinu **a** a **b** vyjádřeny dle vzorce (1) výrazy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}, \end{aligned}$$

jest

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})\,.\,(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \\ &= x_1x_2\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} + x_1y_2\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} + x_1z_2\mathbf{i}\,.\,\mathbf{k} \\ &+ y_1x_2\mathbf{j}\,.\,\mathbf{i} + y_1y_2\mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} + y_1z_2\mathbf{j}\,.\,\mathbf{k} \\ &+ z_1x_2\mathbf{k}\,.\,\mathbf{i} + z_1y_2\mathbf{k}\,.\,\mathbf{j} + z_1z_2\mathbf{k}\,.\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Zavedouce na pravé straně za součiny základních vektorů jednotkových hodnoty z rovnic (5), obdržíme

$$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{6}$$

II. **Součin vektoriální** (dle Grassmanna *externí* *)) dvou vektorů stanoven jest plochou rovnoběžníka, jehož obě sousední strany jsou oba dané vektory, umístěné tak, aby měly společný počátek. Poněvadž plochu tohoto rovnoběžníka lze představiti vektorem, můžeme též říci: Vektoriální součin vektorů **a** a **b** dán jest vektorem **c** (obr. 5.) kolmo vztyčeným k rovině určené oběma činiteli, a to na stranu její, z níž se jeví býti kladnou rotace, která převádí vektor **a** do směru vektoru **b** úhlem menším než 180°; velikost toho vektoru rovná se součinu z velikostí

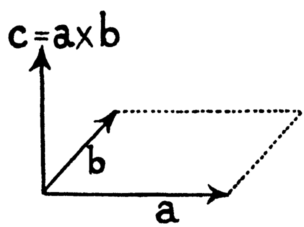
*) ibid. pag. 268.

obou vektorů a sinu úhlu jimi sevřeného (kterýmžto výrazem vyjádřena jest plocha rovnoběžníka, sestrojeného z vektorů **a** a **b**).

Znaménkem vektoriálního násobení jest ležatý křížek, který se klade mezi oba činitele; píšeme tedy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (ab \sin \widehat{\mathbf{ab}})\, \mathbf{c}_1. \tag{7}$$

Skalární část tohoto vektoru jest také součin z velikosti jednoho vektoru a z průmětu druhého vektoru na směr kolmý k vektoru prvému v rovině obou činitelů.



Obr. 5.

Příklady. 1. Neproměnná soustava má jednoduchý pohyb otáčecí kolem pevné osy o, úhlová rychlost její (rychlost bodů, nalézajících se v jednotce vzdálenosti od osy) dána buď vektorem **o**, který vneseme na osu o ve směru, určeném postupnou složkou pohybu, jenž vykonává šroub v pravo točivý, otáčíme-li jím ve smyslu dané rotace.

Veďme z pevného počátku O ležícího na ose o k libovolnému bodu M soustavy průvodič **r**; má-li soustava uvedený pohyb rotační, obdržíme pro rychlost **v** tohoto bodu vzorec

$$\mathbf{v} = \mathbf{o} \times \mathbf{r}. \tag{8}$$

Neboť bod M pohybuje se kolmo k rovině dané vektory **o** a **r**, a to na stranu, která souhlasí s vytčeným směrem vektoru, určujícího součin $\mathbf{o} \times \mathbf{r}$; rychlost toho bodu rovná se $r'\omega$, značí-li r' délku kolmice spuštěné s bodu M na osu o a ω velikost rychlosti úhlové. Poněvadž $r' = r \sin \widehat{\mathbf{or}}$, jest skalární část vektoru **v** rovna $r\omega \sin \widehat{\mathbf{or}}$.

Není-li bod O pevný, nýbrž pohybuje-li se rychlostí postupnou $\mathbf{v}_0$, jest rychlost bodu M dána vzorcem

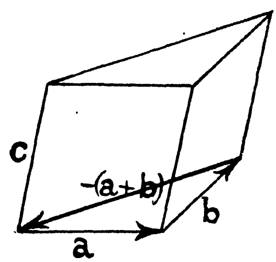
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{o} \times \mathbf{r}. \tag{9}$$

2. Tvoří-li síly **f** a — **f** dvojici a je-li **q** vektor, jenž spojuje kterýkoli bod, ležící ve směru síly **f**, s libovolným bodem ve směru síly — **f**, jest $\mathbf{f} \times \mathbf{q}$ momentem dvojice.

Vektoriální součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ není kommutativní; poněvadž totiž $\sin \widehat{\mathbf{ba}} = -\sin \widehat{\mathbf{ab}}$, jest

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

t. j. vyměníme-li ve vektoriálním součinu oba činitele navzájem, změní se znaménko jeho v protivné. Tudíž při násobení vektoriálním jest bedlivě dbáti pořádku činitelů.



Obr. 6.

Je-li m libovolný skalár, platí patrně

$$(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Násobení vektoriální řídí se také zákonem distributivním; lze totiž dokázati vztah

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

K důkazu použijeme věty shora uvedené, jež praví, že vektor, představující povrch uzavřeného mnohostěnu, rovná se nulle. Mějme hranol trojboký, jehož základna má strany **a**, **b**, — (**a** + **b**) (obr. 6.) a jehož pobočná hrana jest **c**. Plochy pobočných stěn jsou vyjádřeny součiny

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c},\ \mathbf{b} \times \mathbf{c},\ -(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c},$$

plochy základen součiny

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ \mathrm{a} \quad - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

neboť vektory, příslušející těmto plochám, mají směry protivné.

Můžeme tudíž psáti rovnici

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0,$$

z níž plyne

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c},$$

čímž platnost zákona distributivního pro násobení vektoriální jest dokázána.

Obecně platí tedy

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots) \times (\mathbf{p} + \mathbf{q} + \ldots) = {} & \mathbf{a} \times \mathbf{p} + \mathbf{a} \times \mathbf{q} + \ldots \\ & + \mathbf{b} \times \mathbf{p} + \mathbf{b} \times \mathbf{q} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Jsou-li oba vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ rovnoběžny, jest úhel $\widehat{\mathbf{ab}}$ roven buď nulle nebo 180^0, tudíž v tomto případě

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0.$$

Z toho plyne

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times (-\mathbf{a}) = 0.$$

Naopak jest $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ podmínečnou rovnicí, že dva vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ (z nichž ani první ani druhý nerovná se nulle) jsou rovnoběžny.

Pro základní vektory jednotkové $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ obdržíme

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \ \ \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{10}$$

Tudíž součin dvou stejných základních vektorů jednotkových rovná se nulle; součin dvou nestejných vektorů těchto rovná se vektoru třetímu se znaménkem positivním, sledují-li činitelé za sebou v pořádku cyklickém: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Zvláště sluší vytknouti, že nejen $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, ale i $(-\mathbf{i}) \times (-\mathbf{j})$ rovná se $\mathbf{k}$. Neboť zaměníme-li kladné směry os souřadných x, y v protivné (čímž $\mathbf{i}$ přejde v $-\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ v $-\mathbf{j}$), nezmění se smysl rotace, kterou se převádí osa x-ová v osu y-ovou úhlem pravým.

Jsou-li dány vektory **a** a **b** výrazy

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

bude

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})\times(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k})\\ &= x_1x_2\mathbf{i}\times\mathbf{i} + x_1y_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + x_1z_2\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\ &+ y_1x_2\mathbf{j}\times\mathbf{i} + y_1y_2\mathbf{j}\times\mathbf{j} + y_1z_2\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\ &+ z_1x_2\mathbf{k}\times\mathbf{i} + z_1y_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + z_1z_2\mathbf{k}\times\mathbf{k},\end{aligned}$$

čili vzhledem k rovnicím (10)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k}, \tag{11}$$

kterouž rovnici lze též psáti ve formě

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Proveďme nyní tak zvanou *inversi* souřadnic, t. j. zaměňme kladné směry všech tří os x, y, z v protivné; tím přejdeme od soustavy souřadnic v pravo točivé k soustavě v levo točivé. Ve výraze $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ změní se pak vektory základní **i**, **j**, **k** po řadě v $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$; tudíž i složky $x_1\mathbf{i}$, $y_1\mathbf{j}$, $z_1\mathbf{k}$ vektoru **a** promění svá znaménka v protivná. (Pokračování.)

O thermodynamice dějů nepřevratných.

Napsal Dr. **Jos. Theurer**, professor montanistické vysoké školy v Příbrami.

(Pokračování.)

Rovnice (9^b) zní pro děj ryze thermický

$$\eta = T_2\frac{dS_1}{dt} - W_2\left(\frac{dS_1}{dt}\right)^2,$$

aneb vzhledem k tomu, že $\eta dt = dQ$, kdež dQ jest množství tepla *jakožto energie*, jež s jednoho tělesa na druhé přešlo:

$$dQ = T_2 dS_1 - W_2\left(\frac{dS_1}{dt}\right)^2 dt. \tag{10}$$