Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Sobotka

Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 3, 177--188

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122613`

Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu.

Napsal

Jan Sobotka,

professor české vysoké školy technické v Brně.

(Pokračování.)

13. Budiž prve uvažovaná přímka m pevnou; pak obdržíme na základě této přímky a druhé přímky m s ní stejnosměrné, jak jsme byli poznali, určitý bod U, který můžeme též přímce m po případě příslušnému jí bodu $\mathfrak{N}$ přiřaditi. Pohybuje-li se přímka m zůstávajíc stejnosměrna s osou y, opisuje přiřaděný jí bod U křivku u. Známe-li způsob přiřaďování přímek m k bodům křivky této, pak vytvoříme kteroukoli křivku F osnovou přímek rovnoběžných s y a svazkem příslušných přímek bodem M procházejících.

Rovnici křivky u bychom obdrželi, kdybychom do rovnic

(1) $$\mathfrak{X} = \frac{y_1 x - x_1 y}{y_1 - y},$$

(2) $$\mathfrak{Y} = \frac{y_1 y J}{y_1 - y}$$

položili za y hodnotu $Ce^{-\int Pdx}$, za y_1 hodnotu $Ce^{-\int^{x=x_1} Pdx}$ a pak z obou vyloučili x, což ve zvláštních případech lze provésti.

Z (1) obdržíme derivováním dle x, po krátké úpravě a nahradíme-li y' výrazem $-Py$,

(3) $$\frac{y_1 - y}{y_1} \cdot \frac{d\mathfrak{X}}{dx} = 1 + Py \frac{x - x_1}{y - y_1}.$$

Z rovnice (2) plyne výraz

$$J = \frac{y_1 - y}{y_1 y} \mathfrak{Y},$$

z něhož obdržíme differencováním dle x

$$\frac{Q}{y} dx = \frac{1}{y_1} \cdot \frac{(y_1 - y) y d\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y} y dy - \mathfrak{Y} (y_1 - y) dy}{y^2}$$

čili po jednoduché redukci, klademe-li opět $-Py$ místo y',

$$y_1 Q = (y_1 - y) \frac{d\mathfrak{Y}}{dx} + P\mathfrak{Y} y_1,$$

kterážto rovnice dává vztah

$$\text{(4)} \qquad \frac{y_1 - y}{y_1} \cdot \frac{d\mathfrak{Y}}{dx} = Q - P\mathfrak{Y}.$$

Dělením rovnic (4) a (3) dojdeme konečně ke vzorci

$$\mathfrak{Y}' = \frac{Q - P\mathfrak{Y}}{1 + Py \dfrac{x - x_1}{y - y_1}}.$$

Nyní dělme čítatele i jmenovatele pravé strany ve vzorci tom výrazem P a přidržme se označení dřívějšího; obdržíme nejprve

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{Y}' = \frac{\eta - \mathfrak{Y}}{\dfrac{1}{P} + y \dfrac{x - x_1}{y - y_1}}$$

a dále, jelikož

$$\mathfrak{N}^* \mathfrak{X}_\mu = -\frac{1}{P},$$

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{U^* \mathfrak{X}_\mu}{y},$$

relaci následující

$$\mathfrak{Y}' = \frac{\eta - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_\mu \mathfrak{N}^* + U^* \mathfrak{X}_\mu}$$

čili

$$\text{(6)} \qquad \mathfrak{Y}' = \frac{\eta - \mathfrak{Y}}{U^* \mathfrak{N}^*}.$$

Z poslední rovnice plyne věta:

Tečna křivky u *v libovolném bodě U prochází příslušným bodem $\mathfrak{N}$ křivky n.*

Na základě každé přímky m dojdeme ku jedné křivce u; souhrn křivek takových obaluje křivku n; neboť každá křivka u dotýká se křivky n v bodě N odpovídajícím přímce stálé m.

To vysvítá z toho, že když $\mathfrak{N}$ se přibliží nekonečně ku N, lze prvek $N\mathfrak{N}$ křivky n nahraditi její tečnou v bodě N, pročež příslušný bod U pak též na tečně této leží nekonečně blízko bodu N samého; jest tudíž $(NU) \equiv (N\mathfrak{N})$ tečnou křivky u v bodě U nekonečně blízkém bodu N.

14. Uvažujme zvláštní případ rovnice $Y' + PY = Q$, totiž ten, který nastane, když n jest přímkou mající rovnici

$$\eta = \alpha\xi + \beta.$$

Dosadíme-li tu za ξ a η hodnoty (2) v odst. 2., obdržíme, že

$$Q = P(\alpha x + \beta) + \alpha,$$

tak že uvažovanou rovnici differencialní nyní lze psáti ve tvaru

$$(1) \qquad Y' + P(Y - \alpha x - \beta) = \alpha.$$

Z konstrukce křivek integralních F plyne, že uvedená přímka jest též jednou z křivek F. V této vlastnosti pišme její rovnici

$$Y = \alpha x + \beta.$$

Srovnáváme-li rovnici tu s rovnicí (8) v odst. 7., shledáváme, že přímka tato jest ona zvláštní křivka F, pro kterou integrační stálá rovná se nulle, tak že

$$(2) \qquad \alpha x + \beta = y \int \frac{Q}{y}\, dx.$$

Obecný integral rovnice (1) jest tedy

$$Y = \beta + \alpha x + De^{-\int P dx}.$$

Hyperbola w rozpadá se nyní v přímku $(N\mathfrak{N}) \equiv n$ a v přímku rovnoběžnou s osou y, protože svazky tečen kolem N, $\mathfrak{N}$ hyperbolu tu vytvořující mají samodružnou přímku $(N\mathfrak{N})$.

Trojúhelníky $M\mathfrak{M}W$ (obr. 3.) pro libovolné dvě křivky F odvozené leží tudíž příbuzně pro y jakožto směr affinity, následkem čehož se příslušné strany jejich ($M\mathfrak{M}$) protínají v bodě U též na přímce n ležícím. Proto se protínají kterékoliv dvě sobě příslušící sečny libovolných dvou křivek F na přímce n.

Jsou tedy křivky F samy v poloze příbuznosti pro směr y a osu n, ku které souvislosti prof. Czuber v uvedené své práci poukázal.

Poněvadž body N, $\mathfrak{N}$, U leží na přímce n, jsou proto také trojúhelníky $M\mathfrak{M}W$ a $M^*\mathfrak{M}^*V^*$ (odst. 10.) v poloze affinní a proto leží W na příce u. Hyperbola w rozpadá se proto v přímky n a u. Tentýž výsledek poskytuje rovnice hyperboly (5) v odst. 11., v níž píšeme místo pravé strany výraz z (2) plynoucí

$$\frac{\alpha x_2 + \beta}{y_2} - \frac{\alpha x_1 + \beta}{y_1};$$

spojíme-li pak v rovnici hyperboly prvý člen výrazu toho s prvým členem levé strany a druhý člen jeho s druhým členem levé strany, pak vidíme ihned, že rovnice ta se rozpadá v

$$\mathfrak{Y} - \alpha\mathfrak{X} - \beta = 0$$

a v rovnici (6) odst. 11.

Osa příbuznosti trojúhelníků $M\mathfrak{M}W$, $M^*\mathfrak{M}^*V^*$ jest stanovena průsečným bodem příslušných sobě přímek n, x a pak průsečným bodem tečen v bodě M ku křivce integralní F a v bodě $\mathfrak{M}$ ku křivce integralní F^* rovnice

$$y' + Py = 0. \tag{3}$$

Je-li pak m libovolná pořadnice protínající F v bodě $\mathfrak{M}$, F^* v bodě $\mathfrak{M}^*$, bude vždy trojúhelník $M\mathfrak{M}W$ v poloze affinní s trojúhelníkem příslušným $M^*\mathfrak{M}^*V^*$; poněvadž se tu průsek tečen v M a $\mathfrak{M}$ jakož i bod (nx) nemění, jest i osa příbuznosti pro všecky dvojice takových trojúhelníků tatáž. Následkem toho platí věta:

Libovolná křivka integralní rovnice (1) jest s libovolnou křivkou integralní rovnice (3) v poloze příbuzné ve směru y; osa příbuznosti prochází bodem (nx).

Proveďme ještě bližší určení osy příbuznosti, již označíme a. Poněvadž přímka

$$\mathfrak{Y} = \alpha x + \beta$$

jest též jednou křivkou F, proto platí vzhledem k rovnici (3) odst. 8. vztah

$$Y - \mathfrak{Y} = yk.$$

Rozdělme nyní každou pořadnici $\mathfrak{Y}$, která protne x v bodě, jejž označíme M_ξ, a přímku n v bodě, jejž označíme M_ν, bodem A tak, aby

$$\overline{AM_\nu} = k \,.\, \overline{AM_\xi}.$$

Sečtením těchto dvou posledních rovnic vychází souvislost následující

$$\overline{AM} = k \,.\, \overline{AM^*}.$$

Všechny body A vyplňují přímku, která jest následkem právě vyznačené souvislosti žádanou osou příbuznosti a. Charakteristika příbuznosti jest tu

$$k = \frac{\overline{AM}}{\overline{AM^*}}.$$

Poněvadž pro přímku n jakožto křivku integralní jest integrační konstanta rovna nulle, jest charakteristika příbuznosti se zřetelem na rovnici (6) v odst. 8. rovna poměru konstant integračních pro uvažované křivky integralní F, F^*.

Jelikož v příbuznosti této jsou n a x přímkami příslušnými, proto platí mezi pořadnicemi η přímky a, a pořadnicemi $\mathfrak{Y}$ přímky n ležícími na téže rovnoběžce ku y vztah

$$\frac{\eta - \mathfrak{Y}}{\eta} = k,$$

z něhož plyne

$$\mathfrak{Y} = \eta\,(1 - k).$$

Dosadíme-li hodnotu tuto pro $\mathfrak{Y}$ do rovnice přímky n za Y, obdržíme

$$\eta\,(1 - k) = \alpha x + \beta$$

jakožto rovnici přímky a.

Souvislost křivek F, F^* ve zvláštním právě uvažovaném případě můžeme shrnouti ve větu následující:

Křivky F, F^* lze považovati za nárys a půdorys s ním sdružený jediné křivky rovinné, jejíž rovina má stopu nárysnou v přímce n a protíná rovinu totožnosti v přímce, jejíž společný půdorys a nárys je přímka a.

Grafické vyjádření křivek integralních.

15. Přihlížejme v prvé řadě ku křivkám rovnice

$$y' + Py = 0; \tag{1}$$

sestrojme křivku $y = P$, z ní pak buď známými způsoby grafickými příbližně aneb pomocí integrafu přesně některou její křivku integralní

$$\eta = \frac{1}{a}\int Pdx + C, \tag{2}$$

v níž značí a libovolnou délku základní.

Libovolná křivka integralní F^* rovnice (1) bude pak vyjádřena rovnicí

$$y = De^{\eta},$$

značí-li D libovolnou konstantu. Dále vezmeme ku pomoci se zřetelem na rovnici tuto jakoukoli křivku exponencialní

$$y = be^{\frac{x}{a}}$$

a sestrojujme k úsečkám jejím $x = \eta$ příslušné pořadnice y. Béřeme-li za η po sobě jdoucí pořadnice křivky (2), pak budou délky y s nimi na téže přímce ležící pořadnice křivky F^*.

16. Když jsme sestrojili F^* hovící rovnici

$$y' + Py = 0,$$

můžeme příbližně sestrojovati křivky F rovnice

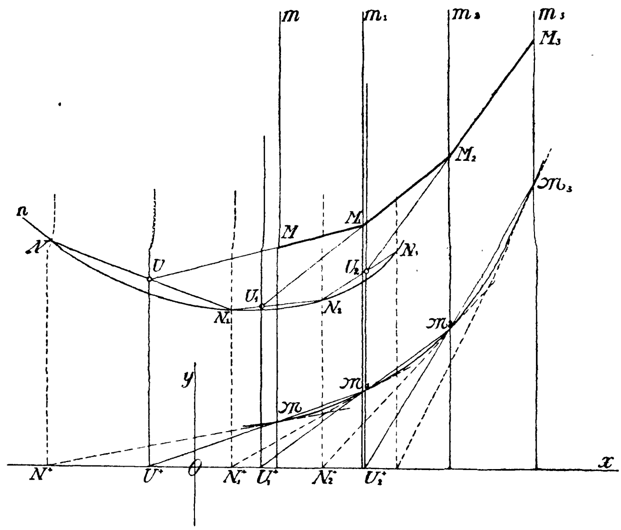
$$Y' + PY = Q$$

způsobem následujícím (obr. 4.).

My vytkneme řadu po sobě v dostatečně malých vzdálenostech následujících přímek m, m_1, $m_2, \ldots$ rovnoběžných s osou y a vyhledáme jim příslušné body N, N_1, $N_2, \ldots$ na křivce n, kterou pak nahradíme mnohoúhelníkem $N N_1 N_2 \ldots$ Přímky m,

m_1, m_2, ... protneme křivkou F^* prve sestrojenou v bodech $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ...

Budiž pak M bod křivky F na m; tu protneme přímku $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}_1)$ osou x a bodem průsečným vedeme rovnoběžku s y, až protne přímku (NN_1) v bodě U, načež vedeme přímku (UM), až protne m_1 v bodě M_1. Dále vedeme průsekem přímky $(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2)$ s osou x rovnoběžku ku ose y, až protne přímku $(N_1\,N_2)$ v bodě U_1, kterýmž bodem vedeme přímku $(U_1\,M_1)$, jež seče m_2 v bodě M_2, atd.



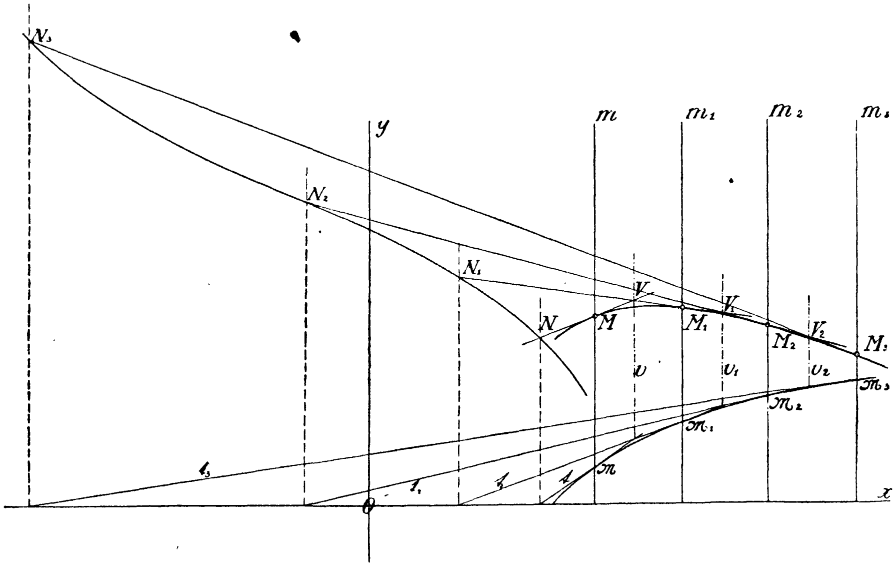
Obr. 4.

Mnohoúhelník $M\,M_1\,M_2$ ... jest pak mnohoúhelníkem vepsaným křivce, která nám vyjadřuje přibližně křivku F.

Je-li křivka n sestrojena, můžeme též následující méně přesné konstrukce užiti. Průseky přímek $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}_1)$, $(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2)$, $(\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3)$, ... s osou x vedeme rovnoběžky s y a body průsečné jejich $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ ... s n vedeme strany mnohoúhelníka, jehož vrcholy M', M'_1, M'_2 ... leží na přímkách m, m_1, m_2, ...; pak lze mnohoúhelník $M'\,M'_1\,M'_2$ ... též považovati za přibližné sestrojení křivky F.

Aneb sestrojme (obr. 5.) v $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... známým způsobem tečny $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, ... ku křivce F^*. Na to veďme přímky v, v_1, v_2, ...

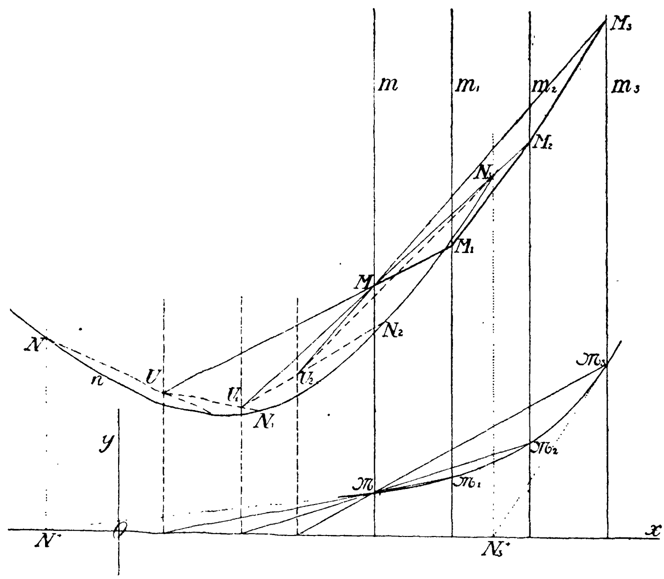
stejnosměrné s y a procházející body (tt_1), (t_1t_2), (t_2t_3), ... Nechť protne přímka NM přímku v v bodě V, přímka $(N_1 V)$ přímku m_1 v bodě M_1, přímku v_1 v bodě V_1; přímka $(N_2 V_1)$ přímku m_2 v bodě M_2, a přímku v_2 v bodě V_2, atd. Pak jest mnohoúhelník NVV_1V_2 ... mnohoúhelníkem opsaným křivce, vyjadřující příbližně F, a strany tohoto mnohoúhelníka dotýkají se křivky této v bodech M, M_1, M_2, ...



Obr. 5.

17. Jiný způsob příbližného sestrojení křivky F z dané křivky F^* spočívá v tom (obr. 6.), že nahradíme na základě odst. 13. křivku u mnohoúhelníkem ji příbližně vystihujícím. Za tím účelem veďme bodem N sečnu protínající křivku n mezi N a N_1, která nám nahrazuje jak křivku n, tak křivku u v bezprostřední blízkosti bodu N. Pak jest příslušný bod U taktéž na této sečně a na rovnoběžce ku y vedené bodem U^*, v němž přímka $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ osu x protíná. Dále spojíme U s N_1 a vedeme bodem U^*_1, v němž přímka $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2)$ osu x seče rovnoběžku s y, která protne (UN_1) v bodě U_1; bod U_1 spojíme s N_2 atd. Tu nám nahrazuje mnohoúhelník $U U_1 U_2$ ... křivku u. Přímka (UM) protne m_1 v M_1, přímka $(U_1 M)$ přímku m_2 v bodě

M_2, přímka $(U_2 M)$ přímku m_3 v bodě $M_3, \ldots$ přibližně sestrojené křivky F.



Obr. 6.

18. Složitější jest arci přesné sestrojení křivek F. Tu bychom museli sestrojiti křivku $\mathfrak{y} = Q$ a z této křivky a z křivky F^* dále křivku novou f, jejíž pořadnice η jsou tvořeny pomocí rovnice

$$\frac{\eta}{a} = \frac{\mathfrak{y}}{y},$$

a potom ku křivce f sestrojiti křivku integralní

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{a} \int \mathfrak{y} dx;$$

konečně pak by se sestrojila křivka F sama na základě tom, že její pořadnice jsou dány relací

$$Y = y\mathfrak{Y}.$$

Mechanická integrace.

19. Co se týče možnosti a významu řešení differencialních rovnic vůbec pomocí mechanismů, dlužno poukázati k tomu, co v té příčině napsal v oboru tom na slovo vzatý *A. Amsler* ve svém pojednání „Ueber mechanische Integration“ uveřejněném v „Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente“, jejž vydal *W. Dyck* v Mnichově 1892.*)

Pokud se týče úvah našich, tu dlužno v prvé řadě poukázati k důmyslné práci jednající o mechanickém sestrojení některých křivek, kterou v roce 1836 uveřejnil znamenitý *G. Coriolis* v „Journal de Liouville“.

Základní myšlenka jeho jest následující.**)

Navinujeme-li napnutou niť na povrch válce za tou podmínkou, že tření je dostatečně velké, aby jakýkoli smyk nitě po válci byl zamezen, a rozvineme-li na to plochu válce s křivkou takto určenou do roviny, obdržíme křivku, jejíž úsečky měříme na přímce, v níž rozvinutím přejde normalný řez a jejíž pořadnice měříme na rozvinutých přímkách povrchových dané plochy válcové. Tečna rozvinuté křivky v libovolném bodě uzavírá týž úhel s příslušnou přímkou povrchovou, který napnutá niť uzavírala s ní, když v příslušném bodě dotýkala se válce.

Podaří-li se nám dáti niti v každém bodě směr určený rovnicí differencialní křivky, o niž se jedná a kterou si nejprve myslíme na válec navinutou, pak se bude niť klásti na válec ten podle takové křivky.

Coriolis uvádí mimo jiné rovnici, která nás zde zajímá, totiž

$$y' + Py = 0.$$

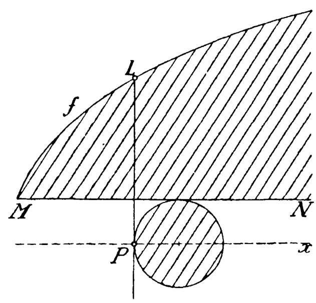
Subtangenta příslušných křivek integralních jest, jak víme, $-\frac{1}{P}$. Proto sestrojuje Coriolis nejprve šablonu křivky k (obr. 7.) dané rovnicí

$$y = -\frac{1}{P},$$

*) Str. 122—124.

**) Cf. *Abdank-Abakonowicz* ibid p. 162.

kterou omezuje hranou MN stejnosměrnou s osou x a mající od ní vzdálenost ϱ rovnající se poloměru válce rotačního, na nějž se niť navinuje.



Obr. 7.

Otáčíme-li pak válec tak, že hrana MN kotálí se po kruhové hraně základní válce, kdežto napnutá volná část nitě s jedné strany PL se klade též k hraně této zůstávajíc kolmá ku MN, až v bodě L přes křivou hranu k šablony na druhou stranu přechází a v rovině tečné toho válce určené přímkou (PL) na válec ten na určitém místě se opět klade, pak bude určovati tato druhá část nitě jednu z křivek integralních dané rovnice na náš válec navinutou; neboť skutečně jest subtangenta takové křivky rovna $-\frac{1}{P}$.

Mechanismus ten, pokud mi povědomo, dosud proveden nebyl.

20. Budiž nyní naznačena modifikace přístroje toho pro případ, že by se jednalo o řešení rovnice differencialní

$$Y' + PY = Q.$$

Modifikaci takovou lze založiti na vlastnostech příslušných křivek integralních F výrazy (2) v odst. 2. vyjádřených.

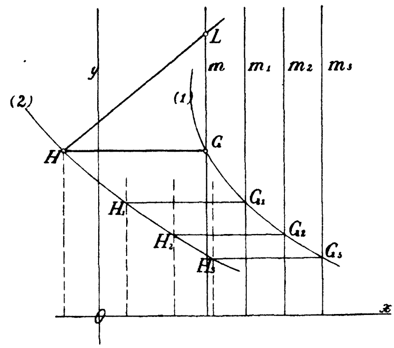
Mějme na zřeteli v rovině křivku

$$y = \frac{Q}{P} \tag{1}$$

a křivku n

$$\eta = f(\xi). \tag{2}$$

Každému bodu G křivky (1) (obr. 8.) odpovídá jeden bod H na křivce (2), který s ním leží na rovnoběžce ku x. Úsečku $\overline{GH}$ mysleme si v pevném spojení s pořadnicí bodu G. Pak klaďme nit napnutou od G ku H a přes tento bod v novém směru, až v některém bodě L zase se dotkne pořadnice bodu G.



Obr. 8.

Navineme-li nyní rovinu křivky (1) na válec, přejde křivka ta v křivku (1*), kdežto křivka (2) promění se v křivku prostorovou (2*) a úsečka $\overline{GH}$ opíše plochu konoidickou; bod L určuje pak jednu křivku integralní rovnice dané.

Při tom si myslemé nit na válci v některém bodě L jakožto počátečním upevněnou a na volném konci přes bod G jdoucím zatíženou. Křivkou (2*) si můžeme mysliti plochu válcovou druhou, jejíž hrana základní s hranou základní válce prvého, představující nám navinutou osu x, jest v té souvislosti, že délka tečny v některém bodě této až ku hraně oné rovná se $-\frac{1}{P}$.

Hranu na válci druhém odpovídající křivce (2*) lze pak snadně sestrojiti a válec podle ní omeziti.

Úsečka $\overline{HG}$ pohybuje se ve vyznačené ploše konoidu tak, aby v ní napnutá nit procházela vždy příslušnými body G a H, čímž pak se klade na válec prvý podle křivky žádané.

Mám sice za to, že lze takový mechanismus snadno uskutečniti; že by ale nabyl praktického významu ve formě zde navržené, to arci tvrditi nelze. (Dokončení.)