Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Čuřík

Zákon lineární funkce chyb

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 5, 545--549

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122688

druhého typu. Takové matice druhého typu definujeme pak následující rekurrentní formulí:

$$M'_n = \left\| \begin{array}{cccccc} M'_{n-1} & p_n \,.\, N'_{n-1} & * & \ldots & * & * \\ -N'_{n-1} & M'_{n-1} & (p_n - 1)\,.\,N'_{n-1} & \ldots & * & * \\ * & -2\,.\,N'_{n-1} & M'_{n-1} & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & & M'_{n-1} & N'_{n-1} \\ * & * & * & & -p_n\,.\,N'_{n-1} & M'_{n-1} \end{array} \right\|$$

kde posléze:

$$M'_0 = a_1, \qquad N'_0 = a_2.$$

Matice M'_{n-1} a N'_{n-1} jsou opět vždy téhož typu a téhož řádu. Užitá symbolika má zde opět týž význam jako v odstavci třetím při definici matic prvního typu.

Nepůsobilo by pražádných obtíží dokázati, že též determinanty těchto matic se rovnají součinu lineárních faktorů. Utvořili bychom z matice M'_n určitou matici $\overline{M}^n$ zcela dle téhož způsobu, jako jsme v předešlém odstavci z matice M' utvořili matici $\overline{M}$. Matice $\overline{M}_n$ jest však maticí prvního typu a tedy bychom mohli na její determinant, determinant to zároveň matice M'_n, applikovati naši rozkladnou formuli (R). Též věty uvedené v předešlém odstavci o determinantech speciálních matic M, M' a M'' můžeme beze všeho vysloviti o determinantech obecných matic M_n, M'_n a M''_n.

Zákon lineární funkce chyb.

F. Čuřík.

Gaussův exponenciálný zákon vyvodil Sommerfeld z elementárních chyb geometrickým názorem, postupuje od prostoru dvou dimensí k n-dimensionálnému. Podobného motivu použijeme k stanovení zákona, jímž se řídí lineární funkce neodvislých chyb; chtějíce však vésti důkaz zcela jednoduše, bez použití Dirichletova přetržitého faktoru, omezíme se na prostor tří rozměrů.

Předpokládejme tedy lineární funkci

$$F = k + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$$

tří pozorovaných veličin X_1, X_2, X_3. S přesnostmi h_1, h_2, h_3 naměřeno bylo l_1, l_2, l_3, takže místo naší funkce máme

$$f = k + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3.$$

Chyby ε_k v určení X_k řiďtež se zákonem

$$\varphi(\varepsilon_k) = \frac{h_k}{\sqrt{\pi}} e^{-h_k^2 \varepsilon_k^2}.$$

Abychom odvodili zákon $\Phi(\varepsilon)$, jímž se řídí chyba

$$\varepsilon = F - f = \alpha_1 (X_1 - l_1) + \alpha_2 (X_2 - l_2) + \alpha_3 (X_3 - l_3),$$

pokládejme chyby

$$\varepsilon_1 = X_1 - l_1, \quad \varepsilon_2 = X_2 - l_2, \quad \varepsilon_3 = X_3 - l_3$$

za proměnné a rovnici

$$\varepsilon = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3$$

za rovnici roviny. Pravděpodobnost, že bod nějaký obsažen bude v rovnoběžnostěnu $d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3$, jest dána součinem

$$\varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1\, \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2\, \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon_2;$$

pravděpodobnost, že obsažen bude ve vrstvě, již z celého prostoru vytínají roviny

$$\varepsilon = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3$$
$$\varepsilon + \varDelta\varepsilon = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3$$

vyjádřena jest integrálem

$$\Phi(\varepsilon)\, \varDelta\varepsilon = \int\!\!\int\!\!\int \varphi(\varepsilon_1)\, \varphi(\varepsilon_2)\, \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3.$$

Integrační obor vyplňuje celou rovinu souřadnou $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, meze vzhledem k ε_3 plynou z rovnic omezujících vrstvu

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon - \alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2}{\alpha_3},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon + \varDelta\varepsilon - \alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2}{\alpha_3} = \varepsilon_3 + \frac{\varDelta\varepsilon}{\alpha_3}.$$

Při $lim\, \Delta = 0$ jest pak

$$lim\, \Phi(\varepsilon)\, \Delta\varepsilon = lim \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha_3}} \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon_3.$$

Vnitřní integrál má v našem případě zvláštní hodnotu. Je-li totiž obecně

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

jest

$$\lim_{\Delta\varepsilon = 0} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \Delta\varepsilon} f(x)\, dx = \lim_{\Delta\varepsilon = 0} \frac{F(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - F(\varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \cdot \Delta\varepsilon = F'(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= f(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Dle toho bude

$$\Phi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2\, \varphi(\varepsilon_3) \frac{d\varepsilon}{\alpha_3}$$

aneb

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha_3} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon_2)\, \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon_2.$$

Sem dosadíme za $\varphi(\varepsilon_2)$ a $\varphi(\varepsilon_1)$ a vyjádříme ε_3 proměnnými ε_2 a ε_1; poněvadž exponenty jsou dosti složité, volme pohodlnější symbol

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{h_1 h_2 h_3}{\alpha_3 (\sqrt{\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-h_1^2 \varepsilon_1^2\right\}$$

$$d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{- h_2^2 \varepsilon_2^2 - h_3^2 \left(\frac{\varepsilon - \alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2}{\alpha_3}\right)^2\right\} d\varepsilon_2.$$

Klademe-li v dalším

$$h_2^2 \alpha_3^2 + h_3^2 \alpha_2^2 = m^2,$$

jest

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{h_1 h_2 h_3}{\alpha_3 (\sqrt{\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{h_1^2 \alpha_3^2 \varepsilon_1^2 - h_3^2 (\varepsilon - \alpha_1 \varepsilon_1)^2}{\alpha_3^2}\right\}$$

$$d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\left[\frac{m\varepsilon_2}{\alpha_3} - \frac{h_3^2 \alpha_2 (\varepsilon - \alpha_1 \varepsilon_1)}{m \alpha_3}\right]^2 + \frac{h_3^4 \alpha_2^2 (\varepsilon - \alpha_1 \varepsilon_1)^2}{m^2 \alpha_3^2}\right\} d\varepsilon_2$$

aneb

$$\Phi(\varepsilon)=\frac{h_1h_2h_3}{\alpha_3(\sqrt{\pi})^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{m^2h_1^2\alpha_3^2\varepsilon_1^2-(\varepsilon-\alpha_1\varepsilon_1)^2(h_3^4\alpha_2^2-m^2h_3^2)}{m^2\alpha_3^2}\right\}$$

$$d\varepsilon_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\left[\frac{m\varepsilon_2}{\alpha_3}-\frac{h_3^2\alpha_2(\varepsilon-\alpha_1\varepsilon_1)}{m\alpha_3}\right]^2\right\}d\varepsilon_2.$$

Poněvadž

$$h_3^4\alpha_2^2-m^2h_3^2=-h_2^2h_3^2\alpha_3^2,$$

jest po provedené integraci

$$\Phi(\varepsilon)=\frac{h_1h_2h_3}{m\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{m^2h_1^2\varepsilon_1^2+h_2^2h_3^2(\varepsilon-\alpha_1\varepsilon_1)^2}{m^2}\right\}d\varepsilon_1.$$

Položme k vůli stručnosti ještě

$$m^2h_1^2+h_2^2h_3^2\alpha_1^2=n^2$$

a upravme

$$\Phi(\varepsilon)=\frac{h_1h_2h_3}{m\pi}exp\left\{-\frac{h_2^2h_3^2\varepsilon^2}{m^2}\right\}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{n^2\varepsilon_1^2-2h_2^2h_3^2\alpha_1\varepsilon\varepsilon_1}{m^2}\right\}d\varepsilon_1$$

$$=\frac{h_1h_2h_3}{m\pi}exp\left\{-\frac{h_2^2h_3^2\varepsilon^2}{m^2}\right\}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\left[\frac{n\varepsilon_1}{m}-\frac{h_2^2h_3^2\alpha_1\varepsilon}{mn}\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{h_2^4h_3^4\alpha_1^2\varepsilon^2}{m^2n^2}\right\}d\varepsilon_1,$$

z čehož konečně opětnou integrací plyne

$$\Phi(\varepsilon)=\frac{h_1h_2h_3}{n\sqrt{\pi}}exp\left\{-\frac{h_2^2h_3^2(n^2-h_2^2h_3^2\alpha_1^2)}{m^2n^2}\varepsilon^2\right\}.$$

Ježto

$$n^2-h_2^2h_3^2\alpha_1^2=h_1^2(h_2^2\alpha_3^2+h_3^2\alpha_2^2)=h_1^2m^2,$$

jest frequence chyb ε vyjádřena funkcí

$$\Phi(\varepsilon)=\frac{h_1h_2h_3}{n\sqrt{\pi}}exp\left\{-\frac{h_1^2h_2^2h_3^2}{n^2}\varepsilon^2\right\}.$$

Řídí se tudíž lineární funkce chyb F týmž zákonem, jako chyby samy.

Píšeme-li poslední rovnici ve tvaru

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2\varepsilon^2}$$

a dosadíme za n, jest přesnost v určení F dána vzorcem

$$H = \sqrt{\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2^2 h_3^2 \alpha_1 + h_1^2 h_3^2 \alpha_2^2 + h_1^2 h_2^2 \alpha_3^2}}$$

aneb přehledněji

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\alpha_1^2}{h_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{h_2^2} + \frac{\alpha_3^2}{h_3^2} = \Sigma \frac{\alpha_k^2}{h_k^2}.$$

O dvojdotykových kružnicích kuželoseček.

Napsal prof. J. **Melichar** v Kroměříži.

I. *O kružnicích dvojdotykových, majících středy na hlavní ose kuželosečky.*

Jednotlivé kružnice této soustavy sestrojíme, položíme-li danou kuželosečkou, ležící v rovině π, rotační plochu kuželovou nebo válcovou a do této vepíšeme řadu ploch kulových, jež budou protínati rovinu π v soustavě kružnic L, dotýkajících se dvojnásobně dané kuželosečky, ježto plocha kuželová nebo válcová má s každou plochou kulovou vepsanou za vzájemný průsek dotyčnou kružnici, jež zajisté, jakožto průsečná čára obou ploch, bude procházeti průsečnými body obou průseků těchto ploch, s rovinou π; že průseky tyto se navzájem dotýkají, patrno z toho, že jeden z nich — daná kuželosečka — je vlastně obrysem plochy kulové a druhý, kružnice L, je průmětem povrchové kružnice téže plochy kulové pro střed promítání, ležící ve středu plochy kuželové.

1. Je-li kuželosečka ellipsou o osách aa_1, bb_1, veďme jí rotační plochu válcovou (obr. 1.); osa její O bude asymptotou hyperboly, ležící v rovině ν, kolmé ku π a mající za vrcholy hlavní osy ohniska a za ohniska vrcholy dané ellipsy; sestrojme sklopený řez plochy válcové rovinou ν a sklopený průmět do ν některé vepsané plochy kulové K_1 o středu k_1; jeho tětiva na