Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Seydler
Poznámka k integrování některých differenciálních rovnic lineárních

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 1 (1872), No. 4, 195--197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122702

# Drobné zprávy.

## Poznámka k integrování některých differenciálních rovnic lineárních.

(Podává dr. *Aug. Seydler.*)

Jsou-li předloženy dvě lineární zkrácené rovnice *n*tého stupně

$$\sum_{k=n}^{0} a_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad \sum_{k=n}^{0} b_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{1}$$

které mají společný integrál částečný $y = y_1$, bude, jak patrno, výraz ten též integrálem částečným nové rovnice

$$\sum_{k=n}^{0} (a_k X + b_k Y) \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{2}$$

kde $X$, $Y$ jsou libovolné úkony veličin $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy^2}{dx^2}\ldots$ Obsahují-li pouze $x$ (je-li tedy rovnice [2] též lineární), můžeme si známou cestou — variací stálých — zjednati novou též lineární rovnici stupně $(n-1)$ho. Aby ale rovnice (1) měly společný integrál $y_1$, musí vyhověti součinitelové $a_k$, $b_k$ jisté podmínce, tedy jakési rovnici, kterou si zjednáme vyloučením differenciálních poměrů $\frac{d^k y}{dx^k}$ z obou rovnic. Vyloučíme-li jednou $y$, jednou $\frac{d^n y}{dx^n}$, differencujíce zároveň druhou z rovnic takto vzniklých, obdržíme dvě nové rovnice tvaru

$$\sum_{k=n}^{1} A_k \frac{d^k y}{dx^n} = 0, \quad \sum_{k=n}^{1} B_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{3}$$

v kterých není více $y$ obsaženo. Z nich můžeme opět podobným spůsobem vyloučiti $\frac{dy}{dx}$, a pokračujíce takto zjednáme si konečně hledanou rovnici. Vyhovují-li tudíž této rovnici součinitelové předložené rovnice (2), jest to znamením, že má jeden integrál částečný společně s rovnicemi (1), kterýžto integrál snadno obdržíme na základě právě uvedeného eliminování.

Jsou-li součinitelové $a_k$, $b_k$ stálé veličiny, bude míti integrál tvar $e^{\alpha x}$, kde musí $\alpha$ vyhověti oběma rovnicím $n$tého stupně:

$$\sum_{k=n}^{0} a_k \alpha^k = 0, \quad \sum_{k=n}^{0} b_k \alpha^k = 0, \tag{4}$$

Spůsob, jakým si (postupně eliminujíce) zjednáme jednak rovnici pro $a_k$ a $b_k$, jednak hodnotu $\alpha$, jest samozřejmý.

Tato podmiňující rovnice jest pro větší $n$ tvaru velmi složitého, ač dosti přehledného; pro menší $n$, zvláště pro $n = 2$, můžeme jí však často s velkým prospěchem použíti. Máme-li tudíž rovnici 2. stupně

$$(a_2 X + b_2 Y)y'' + (a_1 X + b_1 Y)y' + (a_0 X + b_0 Y)y = 0, \tag{5}$$

bude částečný integrál její $y_1 = e^{\alpha x}$, vyhovuje-li $\alpha$ rovnicím

$$\left.\begin{aligned} a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0. \\ b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Co výsledek vyloučení veličiny $\alpha$ z obou rovnic zjednáme si rovnici podmiňující

$$(a_0 b_1 - b_0 a_1)(a_1 b_2 - b_1 a_2) - (a_2 b_0 - b_2 a_0)^2 = 0 \tag{7}$$

Zároveň jest

$$\alpha = \frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{a_2 b_0 - b_2 a_0} = \frac{a_2 b_0 - b_2 a_0}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

Z šesti veličin $a$ a $b$ jest tedy pět libovolných; šestá určena jest rovnicí (7), která jest vzhledem ke každé veličině v ní obsažené 2. stupně, tak že lze ke každé soustavě 5 hodnot pro součinitele $a$ a $b$ určiti dvě hodnoty šestého součinitele tak, aby předložená rovnice (5.) měla částečný integrál $y_1 = e^{\alpha x}$, kde $\alpha$ jest určeno rovnicí (8).

Položíme-li nyní $y = ue^{\alpha x}$ v rovnici (5), obdržíme

$$(a_2 X + b_2 Y)u'' + (\overline{a_1 + 2a_2\alpha}\, X + \overline{b_1 + 2b_2\alpha}\, Y)u' = 0, \tag{9}$$

kterouž rovnici lze bezprostředně integrovati.

Rovnici (7.) může býti vyhověno též tím, že oba její členy o sobě $= 0$ položíme; pak bude ale

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = m$$

a rovnice (5) má pak činitele $X + mY$, který když vyloučíme, obdržíme lineární rovnici se stálými součiniteli.

Velmi elegantního tvaru nabude rovnice podmiňující (7), jsou-li $X$ a $Y$ úkony trigonometrické, na př. $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Pak položme

$$a_k = m_k \cos v_k\,, \quad b_k = m_k \sin v_k\,.$$

Rovnice (5) přemění se v následující:

$$m_2 \cos(v_2 + x) y'' + m_1 \cos(v_1 + x) y' + m_0 \cos(v_0 + x) y = 0, \tag{10}$$

která bude míti částečný integrál $y = e^{\alpha x}$, je-li

$$\frac{\sin^2(v_0 - v_2)}{m_1{}^2} = \frac{\sin(v_1 - v_0)}{m_2} \cdot \frac{\sin(v_2 - v_1)}{m_0}. \tag{11}$$

Zároveň jest

$$\alpha = \frac{m_1 \sin(v_1 - v_0)}{m_2 \sin(v_0 - v_2)} = \frac{m_0 \sin(v_0 - v_2)}{m_1 \sin(v_2 - v_1)}. \tag{12}$$

Na objasnění řečeného stůjž zde následující příklad. Součinitelové rovnice

$$(3 - x) y'' - (9 - 4x) y' + (6 - 3x) y = 0,$$

v které jest $X = 1$, $Y = x$, vyhovují skutečně rovnicí (7), a $\alpha = 1$, tedy $y = ue^x$, a

$$(3-x)\, u'' - (3-2x)\, u' = 0,$$

$$u' = C' e^{2x} (3-x)^3, \quad u = C + C' \int e^{2x} (3-x)^3\, dx,$$

z čehož jde konečně

$$y = Ce^x + C' e^{3x} (183 - 150x + 42x^2 - 4x^3).$$

---

# O některých integrálech omezených.

(Podává *Augustin Pánek*.)

Abychom ustanovili hodnotu omezeného integrálu

$$J = \int_0^\infty y^{n-1} l(1 + xe^{-y})\, dy$$

použijme vzorců

$$l(1 + xe^{-y}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} e^{-ky},$$

$$\int_0^\infty e^{-my} y^{n-1}\, dy = \frac{1}{m^n} \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1}\, dy = \frac{\Gamma(n)}{m^n},$$

načež obdržíme

$$J = \Gamma(n) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^{n+1}}.$$