

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

## Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 226--232

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122707>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1907

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

kouli obou základů i oblín se dotýkající? Který jest obsah kužele zkomoleného?

11. Delší úhlopříčka v hlavním řezu šikmého válce svírá s daným poloměrem  $r$  úhel  $\alpha$  a se stranou úhel  $\beta$ . Stanoviti jeho obsah krychlový pro  $r = 3$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ .

12. Základna kolmého jehlanu jest obdélník, výška  $v = 6 \text{ dm}$  a odchylky pobočných stěn od základny jsou dány rovnicemi  $\alpha - \beta = 12^\circ 20'$ ,  $\sin \alpha : \sin \beta = 14 : 11$ . Stanoviti obsah a plášť jehlanu.

13. Kouli o poloměru  $r$  jest vepsán přímý kužel tak, že vrcholk, na němž nalézá se vrchol kužele, jest dvakrát tak veliký jako plášť kužele. Kolikátou částí koule jest kužel a jak velká jest úseč pod základnou kužele?

14. Plášť přímého komolého kužele, kterému jest vepsána koule, jest třikrát tak velký jako rozdíl základních kruhů; v jakém poměru jsou obsahy kužele a koule?

15. Ke kružnici  $x^2 + y^2 = 48$  vedeny jsou bodem  $m(4\sqrt{5}, 8)$  tečny. Určiti povrch tělesa vzniklého otočením se obrazce omezeného tečnami a menším obloukem kol symmetrály úhlu sevřeného tečnami.

16. Má se určiti rovnice kružnice procházející bodem  $m(5, 9)$  a dotýkající se přímky  $P \equiv 4x + 3y + 3 = 0$  v bodě  $n(x_n = -3)$ .

17. Najíti rovnici kruhu, který probíhá body  $m(0, 5)$ ,  $n(3, -4)$  a dotýká se přímky  $P \equiv 3x - 4y + 25 = 0$ .

18. Vrcholy trojúhelníka jsou  $m(-20, 0)$ ,  $n(20, 0)$ ; třetí vrchol  $p$  leží na přímce  $P \equiv 9x + 20y - 375 = 0$  a obvod trojúhelníka jest 90. Které jsou souřadnice vrcholu  $p$  a obsah trojúhelníka?

19. Ustanoviti geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají kružnice  $K_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x = 0$  vně a kružnice  $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 40 = 0$  uvnitř.

20. Úsečka  $mn$  rozdělena bodem  $p$  v poměru 3 : 2. Budiž ustanoveno geometrické místo bodu  $q$ , z něhož paprsky vedené k bodům  $m$  a  $p$  též úhel svírají jako paprsky k bodům  $n$  a  $p$ .

(Pokrač.)

## Úlohy.

### a) Z matematiky.

#### Úloha 22

*Která reciproká rovnice čtvrtého stupně má kořeny, tvořící řadu arithmetickou?*

Prof. Jar. Doležal.

## Úloha 23.

Vyhledejte kosoúhlý trojúhelník, ve kterém poloměr  $\rho$  kružnice vepsané tvoří se stranami  $a, b, c$  řadu arithmetickou. Týž.

## Úloha 24.

Základny prismatoidu mají obsah  $Z_1, Z_2$ , střední řez má obsah  $S$ ; který jest obsah řezu  $R$  se základnami rovnoběžného, jsou-li jeho vzdálenosti od těchto základů v poměru  $m : n$ ?

Řed. A. Strnad.

## Úloha 25.

Dokažte správnost rovnice

$$\cotg 1^\circ = 45 + \tg 1^\circ \cdot \tg 2^\circ + \tg 2^\circ \cdot \tg 3^\circ + \tg 3^\circ \cdot \tg 4^\circ + \dots + \tg 44^\circ \cdot \tg 45^\circ.$$

Dr. M. Haas.

## Úloha 26.

Rozložte daný obdélník úsečkami v takové části, aby z nich dal se složití stejnoplochy čtverec. rv.

## Úloha 27.

Vypočítejte obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou body, ve kterých se kružnice do trojúhelníka vepsaná dotýká jeho stran, jsou-li dány strany zákl. trojúhelníka (ku př.  $a = 13, b = 20, c = 21$ ).

Prof. A. Sýkora.

## Úloha 28.

Vypočítejte obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou body, ve kterých se kružnice trojúhelníku připsaná dotýká jeho stran (num. hodnoty jako v úloze 27.) Týž.

## Úloha 29.

Vypočítejte prostor omezený českým klenutím\*) zřízeným nad obdélníkem rozměrů  $a, b$  i velikost jeho lící plochy. Týž.

---

\*) Oddělíme-li od polokoule, jejíž okrajová kruhová hrana prochází vrcholy daného obdélníka, čtyři části rovinami, jež procházejí stranami toho obdélníka a jsou kolmé k jeho rovině, zbývá z povrchu té polokoule část, jež jest lící plochou t. zv. českého klenutí.

## Úloha 30.

Pobočné stěny trojbokého jehlanu jsou od podstavy stejně odchýleny. Vypočísti krychlový obsah jehlanu, jsou-li dány ploské obsahy podstavy i pobočných stěn

$$(\Delta = 84, \Delta_1 = 60, \Delta_2 = 56, \Delta_3 = 52).$$

Dr. M. Haas.

## Úloha 31.

Pobočné stěny komolého trojbokého jehlanu jsou od podstavy stejně odchýleny. Vypočísti krychlový obsah jehlanu, jsou-li dány ploché obsahy obou podstav i všech tří pobočných stěn ( $z_1 = 756, z_2 = 336; A = 325, B = 350, C = 375$ ).

Týž.

## Úloha 32.

Dvěma koulím poloměrů  $a, b$  ( $a > b$ ), které se vně dotýkají, opsána styčná rot. plocha kuželová. Jaký je obsah 1.) tělesa obsaženého mezi plochou kuželovou a plochami kulovými, 2.) celého hruškového tělesa částmi těch tří ploch omezeného?

Prof. L. Borovanský.

## Úloha 33.

V pravouhlé soustavě jsou dány dva pevné body  $m(a, o)$  a  $n(-a, o)$ . Bodem  $m$  vedena přímka  $P_1$ , utínající na ose  $Y$  úsek  $oq_1$ ; bodem  $n$  přímka  $P_2$ , utínající na téže ose úsek  $oq_2$ . Ustanoviti rovnici geom. místa průsečíků přímek  $P_1$  a  $P_2$ , pro které  $oq_1 \cdot oq_2 = \pm b^2$ .

Týž.

## Úloha 34.

Dokázati, že obsah trojúhelníka vepsaného do paraboly rovná se trojnásobnému geometrickému průměru parabolických úsečí, příslušných stranám toho trojúhelníka.

Dr. M. Haas.

## Úloha 35.

Ve sferickém trojúhelníku pravouhlém o přeponě  $c$  tvoří úhly řadu arithmetickou; vypočtete ty úhly, je-li 1.)  $c = 60^\circ$ , 2.)  $c = 120^\circ$ .

Prof. Jar. Doležal.

## Úloha 36.

Dokázati, že v obecném čtyřúhelníku leží průsečík úhlopříčen, průsečík spojnic středů protějších stran a těžiště jeho v jedné přímce.

Jan Svoboda.

## Úloha 37.

*Odvoditi vztah, kterým jsou vázány rovníkové souřadnice (rektascense  $\alpha$ , deklinace  $\delta$ ) tří bodů [ $A_1 (\alpha_1, \delta_1)$ ,  $A_2 (\alpha_2, \delta_2)$ ,  $A_3 (\alpha_3, \delta_3)$ ], ležících v jedné hlavní kružnici nebeské.*

Dr. J. Kavan.

## b) Z deskriptivní geometrie.

## Úloha 5.

*Vyhledati směr paprsků světelných, pro který vržený stín daného rovnoběžníka  $abcd$  na I. průmětnu je čtverec [ku př.  $a (-1, 7.5, 0.5)$ ,  $b (-4.5, 6.5, 3)$ ,  $c (-4, 8.5, 6)$ ].*

Prof. Jar. Doležal.

## Úloha 6.

*Dána základna trojbokého jehlanu  $abc$  v I. průmětně. Ustanoviti průměty čtvrtého vrcholu  $d$ , jsou-li dány odchylky hran pobočných od výšky  $\alpha, \beta, \gamma$ . (Ku př.  $abc$  trojúhelník rovnostranný,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ .)*

Stud. techn. Jan Kučera.

## Úloha 7.

*Zobrazte šikmý kruhový kužel se základnou v I. průmětně, jehož jedna povrchová přímka jest k této průmětně kolmá. Přetněte pak kužel libovolnou rovinou a zkoumejte, jak se k sobě chovají I. průmět toho průseku a I. průměty různých povrchových kružnic té plochy kuželové.*

rv.

## c) Z fyziky.

## Úloha 6.

*Z bodu  $m$  ležícího v  $\frac{1}{n}$  vzdálenosti ( $d$ ) dvou stěn svislých, rovnoběžných a dokonale pružných je vržena pod úhlem  $\alpha$  koule dokonale pružná proti stěně vzdálenější. Jaká musí být rychlost vrhu, aby koule po odrazu od první stěny dopadla na druhou a odrazila se od ní zpět do bodu  $m$ ? Po jakým úhlem a s jakou rychlostí dopadne do bodu  $m$ ? Jak by se změnilý výsledky, kdyby koule byla vržena proti stěně bližší?*

Dr. B. Bydžovský.

## Úloha 7.

*Dokonale pružná koule je vržena pod úhlem  $45^\circ$  rychlostí 20 m proti stěně dokonale pružné stojící ve vzdálenosti 12 m a nakloněné k rovině vodorovné o úhel  $80^\circ$ . Kam dopadne koule po odrazu a s jakou rychlostí?*

Týž.

## Úloha 8.

*Železný stojan skládá se z podstavce, majícího tvar pravidelného jehlanu čtyřbokého komolého, a tyče válcové zapuštěné kolmo do středu podstavce. Jaká je stálost polohy stojanu, jsou-li: hrana dolejší základny 50 cm, hořejší 25 cm, výška podstavce 10 cm, délka tyče 1 m, hmota tyče rovna hmotě podstavce a spec. hmota 7·6. Jaké nejmenší síly je třeba k postavení podstavce, byl-li zvrácen?*

Týž.

## Úloha 9.

*Na londýnské městské dráze nádraží jsou nad ostatní trať zvýšena za tím účelem, aby se ušetřilo na energii, jež jinak brzděním na zmar přichází. S obou stran nádraží je tedy trať skloněna. Vypočítejte, oč musí býti nádraží nad ostatní trať zvýšeno, aby vlak vyjíždějící na svah rychlostí 20 m sek<sup>-1</sup> na nádraží dojížděl rychlostí 5 m obnáší-li délka svahu 250 m, tření a odpor vzduchu  $\frac{1}{250}$  váhy vlaku.*

*V čem spočívá úspora na energii a jak veliká je při váze vlaku = 100 t?*

Dr. F. Pietsch.

## Úloha 10.

*Při osvětlování elektrickém užívá se s výhodou trojného vedení proudu. Dvě dynamy o stejné výkonnosti a stejném vnitřním odporu spojí se za sebou.*

*Od kladného pólu prvního dynamy veden jest první drát, od spojitelného drátu pólu záporného prvního dynamy s kladným pólem druhého dynamy veden jest drát druhý, a konečně od záporného pólu druhého dynamy veden drát třetí. Žárovky jsou umístěny tak, že jeden pól žárovky spojen s drátem prvním, druhý pól s drátem druhým — prostředním, podobně na druhé straně jest jiná žárovka spojena jednak s drátem třetím, jednak s druhým prostředním.*

*Považujete-li dynamu za články a užijete-li zákona Ohmova o rozvětvení proudů, můžete vypočítati, jaký proud těmi třemi dráty probíhá, když v obou vedeních jest stejný počet žárovek rozsvícen a za druhé když jest v jednom vedení jen polovina rozsvícena.*

*Napětí dynamy  $e = 120$  V.*

*Odpor prvního drátu čítaje v to i vnitřní odpor stroje  $r_1 = 0,5 \Omega$ .*

*Odpor druhého prostředního drátu  $10 \Omega$ .*

*Odpor třetího drátu spolu s vnitřním odporem druhého dynamy  $r_2 = 0,5 \Omega$ . Celkový odpor žárovek ( $R_1 = 1 \Omega = R_2$ , event.  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 0,5 \Omega$ ). V čem asi vězí výhoda tohoto zařízení?*

*Týž.*

### Vypsání cen za řešení úloh.

*Výbor Jednoty českých matematiků usnesl se, aby za správná řešení úloh v „Příloze“ uveřejněných uděleny byly studujícím středních škol tyto ceny:*

*A) Z matematiky:*

#### 1. Ceny první:

*Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, roč. V.*

*Cremona-Weyr: Úvod do geometrické theorie křivek rovinných.*

*Jelínek: Početní úkoly tělesoměrné.*

*Pokorný: Důchod invalidní.*

*Strouhal: Ocel a její vlastnosti galvanické a magnetické.*

*Studnička: O původu a rozvoji počtu diferenciálního a integrálního.*

#### 2. Ceny druhé:

*Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, roč. V.*

*Studnička: Algebra pro vyšší třídy škol středních, 2. vyd.*

*Studnička: Výklady o funkcích monoperiodických neboli o nižších funkcích transcendentních.*

*Šimerka: Síla přesvědčení.*

*Zahradník: O determinantech.*

### 3. Ceny třetí:

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, roč. V.

*Houdek*: Dějepis Jednoty českých matematiků. 1872.

*Studnička*: Základové nauky o číslech.

*Šafaříková*: William Herschel a jeho sestra Karolina.

*Šolín*: Arithmografie.

Ceny první uděleny budou za správné a nejlepší řešení co největšího počtu úloh; z ostatních řešitelů obdrží dle počtu a dokonalosti řešení jistý počet řešitelů ceny druhé a třetí.

#### B) Z deskriptivní geometrie:

Za nejlepší řešení úloh udělen bude jako první cena 1 výtisk spisu:

*Ed. Weyr*: Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu. (Sborník Jednoty českých matematiků, čís. 1.);

druhou cenou bude *Antomari*: Cours de géométrie descriptive.

Kromě toho uděleno bude několik cen třetích:

*Jarolímek*: Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné. Díl I., II., III.

#### C) Z fysiky:

Za nejlepší řešení všech úloh fyzikálních udělen bude jako první cena 1 výtisk spisu:

*V. Strouhal*: Mechanika. (Sborníku Jednoty českých matematiků čís. 4.);

kromě toho dalším 5 nejlepším řešitelům případnou jako cena druhá tyto spisy:

*Nábělek*: Hvězdné nebe severní (mapa na plátně v kapesním formátě).

Obzor.

Nebeské hodiny.

O hvězdách.

Řešení úloh z 1. čísla buďtež zaslána do konce března, z 2. čísla do konce dubna 1907 na adresu: *Lad. Červenka*, professor c. k. vyšší reálky v Praze-VII.

**Připomenutí.** Pp. řešitelé se žádají, aby zasíla řešení úloh psaná na čtvrtkách obyčejného formátu a každou čtvrtku, obsahující pouze řešení jediné úlohy, aby opatřili svým podpisem.