Antonín Pleskot

Poznámka ku sestrojování racionálních čar

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 134--136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122721

anebo kratčeji

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{matrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}, & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{dx}, & \frac{\partial v_z}{\partial y}, & \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{matrix} \tag{69^b}$$

v podobném tvaru napíšeme také snadno sdruženou hodnotu tohoto úplného differenciálního poměru. (Pokrač.)

Poznámka ku sestrojování racionálních čar.

Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni.

Budiž dána racionální čára n-tého stupně

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

s $(n - 1)$ násobným bodem o; každá přímka l bodem tímto vedena protne čáru tu jen v dálším jediném bodě a, jehož odlehlost od bodu o budiž r.

Označíme-li souřadnice bodu o, x_0, y_0, kosinusy směrné přímky l s osami X a Y, α a β, pak k určení vzdálenosti r máme rovnici:

$$\begin{aligned} 0 = f(x_0 + \alpha r, y_0 + \beta r) &= f(x_0, y_0) + r\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_{x_0, y_0} \\ &+ \frac{r^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^2_{x_0, y_0} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^{n-1}_{x_0, y_0} \\ &+ \frac{r^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^n_{x_0, y_0}. \end{aligned}$$

Poněvadž bod x_0, y_0 jest bodem $(n - 1)$ násobným, platí podmínky:

$$f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_{x_0, y_0} = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^{n-2}_{x_0, y_0} = 0,$$

a proto

$$r = -\frac{n\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^{n-1}_{x_0,\,y_0}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^{n}_{x_0,\,y_0}}. \qquad (\alpha)$$

Nechť dána jest nyní křivka algebraická

$$\psi(x, y) = 0, \qquad (2)$$

n-tého stupně, jejíž rovnice shoduje se s rovnicí (1) tak, že členy n-tého a $(n-1)$-ho rozměru v obou rovnicích jsou společné.

Stanovíme-li nyní průsečík křivky (2) s přímkou l, dostaneme k určení vzdáleností $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ průsečných bodů od bodu o rovnici:

$$0 = \psi(x_0 + \alpha\varrho, y_0 + \beta\varrho) = \psi(x_0, y_0) + \varrho\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta\right)_{x_0,\,y_0} + \ldots$$

$$+ \frac{\varrho^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta\right)^{n-1}_{x_0,\,y_0} + \frac{\varrho^n}{n!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta\right)^{n}_{x_0,\,y_0}.$$

Určíme-li z této rovnice součet vzdáleností $\Sigma\varrho$, pak obdržíme

$$\Sigma\varrho = -\frac{n\left(\frac{\partial\psi f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi f}{\partial y}\beta\right)^{n-1}_{x_0,\,y_0}}{\left(\frac{\partial\psi f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi f}{\partial y}\beta\right)^{n}_{x_0,\,y_0}}. \qquad (\beta)$$

Výrazy v rovnicích (α) a (β) na straně pravé jsou sobě rovny, ježto obě rovnice (1) i (2) v členech rozměru n-tého a $(n-1)$-ho se shodují.

Tím dospíváme k větě:

$$r = \Sigma\varrho,$$

jež jest zvláštním případem theoremu Newtona.

K dané čáře $f(x, y)$ najdeme ale čáru, která s ní má členy n-tých a $(n-1)$-vých rozměrů stejné, nalezneme-li čáru, která má s ní asymptoty stejné, abstrahujeme-li od asymptot nekonečně vzdálených.

Možno tedy za čáru $\psi(x, y)$ voliti zvrhlou čáru, kterou tvoří soustava asymptot dané čáry racionální.

Tím tedy dospíváme ku větě:

Má-li čára racionální n-tého stupně $(n-1)$ násobný bod o, a vedeme-li tímto bodem přímku l, pak odlehlost průsečného bodu a s křivkou od bodu o, jest rovna algebraickému součtu vzdáleností bodu o od průseků přímky s asymptotami. (Viz Niewenglowski, Cours de Géométrie analytique, Tome II, p. 116.)

Jsou-li asymptoty imaginární, jsou vždy po dvou konjugované a místo každé z těchto dvojic možno voliti ellipsu, která má tyto asymptoty za své asymptoty; k vůli jednoduchosti můžeme voliti ellipsu tu, která prochází bodem o.

Větu tuto možno přímo applikovati na racionální křivky stupně 3-ho, jichž rovnice s dvojným bodem v počátku zní:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3 + dx^2 + exy + fy^2 = 0, \qquad (\gamma)$$

čímž dospíváme ke konstrukcím, které v tomto *) ročníku v čísle 1. a 3. od dvorního rady prof. dra Zahradníka a prof. dra Fahouna byly uveřejněny.

V Plzni, dne 1 května 1905.

Poznámka o Sturmových funkcích.

Napsal **K. Petr.**

Jak známo, lze tu řadu Sturmových funkcí, jež počtem změn znaménkových udává počet párů kořenů komplexních, vyjádřiti pomocí kovariantů dané formy **). Totéž však jest možno i pro funkce Sturmovy v obyčejném slova smyslu, t. j. pro řadu funkcí, která počtem změn znaménkových udává počet kořenů reálných v daných mezích se nacházejících. I tyto funkce lze vyjádřiti pomocí útvarů invariantních a na to chci v následujícím poukázati. Užitek takového vyjádření Sturmových funkcí jest na snadě.

*) T. j. v ročníku 34. str. 19. a str. 219. Pozn. red.

**) Viz pojednání H. Schramma v Annali di mat., 2 s., t. 1, rok 1867, str. 259.