a vyvinul se názor, jejž bychom mohli zváti *dynamickým*, poněvadž příčinu zemětřesení spatřuje v jakýchkoli silách, dostatečných k spůsobení tak velkých účinků. Názor ten uznává vulkanický původ zemětřesení, jimiž obyčejně sopečné výbuchy bývají vyprovázeny; vedle toho však spatřuje příčinu mnohých zemětřesení v silách jiných. Zejmena jest to stahování čili svrašťování kůry zemské, klesání vrstev spočívajících na vrstvách jiných podemletých neb vodou promočených (Davy), zkrátka dynamické vlivy, podmíněné slohem kůry zemské, které mohou zemětřesení spůsobiti.

Názor ten jest podporován svědomitým studiem geognostických poměrů krajiny zemětřesením navštívené, a lze říci, že se nyní k němu všichni čelnější geologové naší doby kloní. Není tudíž jednotné příčiny zemětřesení, není také jednotné theorie, a velkolepé spekulace kosmologické, které v oboru tom posud první slovo měly, ustupují poznenáhla svědomitému prozkoumání detailů, provedenému od odborníků k tomu povolaných.

Trisektorie.

Sestrojil

Dr. Jos. R. Vaňaus.

1.

Theorie křivek vyšších stupňů byla zvláště v době novější muži věhlasnými tak dokonale a důkladně projednána, že každý pokus přičiniti ještě něco zdá se nanejvýše zbytečným. Hlavně platí to o křivkách racionálních, které nad jiné zvláštními vlastnostmi obecnými vynikajíce mnoho již zpracovatelů nalezly.

Mimo spisy cizojazyčné obsahuje i naše literatura česká mnohý vzácný plod z těchto luhů. Na doklad uvádím — abych vypravováním věcí vůbec známých dlouho nezdržoval — pouze některé články časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky, kde o rovinných křivkách racionálních stupně třetího pojednáno způsobem lehkým, elegantním. V jiných článcích téhož časopisu bylo o některých zvláštních tvarech takovýchto křivek dopodrobna psáno a jejich zajímavé relace prozkoumány.

Avšak vyhledání některých charakteristických, té které křivce výhradně příslušných vlastností a poměrů k jiným geometrickým pravdám vyžaduje někdy práce velmi úsilovné; zvláště když ani původní rovnice křivky, ani odvozeniny její o takové vynikající přednosti nepodávají přímo žádné zvěsti.

Před mnoha roky zanášel jsem se rozborem některých tvarů racionálních funkcí třetího stupně a to hlavně tvarem

$$Ax^3 + By^3 + Cxy^2 + Dyx^2 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy = 0$$

jemuž příslušná křivka má, jak známo, v počátku souřadnic pravoúhlých bod dvojný.

Když jsem později některé podmínky stanovil, mezi jinými na př. $A = C$, $B = 1$, a $E = -F$ učinil a tedy tvar

$$y^3 + A(x^2 + y^2)x + Dyx^2 + E(x^2 - y^2) + Gxy = 0 \qquad (1)$$

rozbíral, tu shledal jsem, že pro jisté případy závislosti koefficientů A, D, E, G, jinak neodvislých, příslušné geometrické tvary zvláštní jednoduchostí vynikati se zdály. Pro jeden případ závislosti těch koefficientů, který doleji se udá, bylo již zřejmo, že příslušná křivka jest geometrickým místem bodů, které mají jednostejnou vzdálenost od kružnice a některé sečné její. Bylo tedy lze tento aequidistantní tvar geometrický zcela jednoduchým sestrojením znázorniti a z konkretního obrazce synthesí k rovnici (1) se vrátiti. Ješto mi podobná aequidistance bodů od kružnice a tetivy čili částky sečné byla známa z úlohy „daný úhel na tři rovné částky rozděliti“, bylo již o souvislosti tohoto geometrického tvaru s problemem „trisectio anguli“ rozhodnuto. Historická znamenitost té úlohy a velmi jednoduchý způsob jejího rozřešení byly příčinou, že dovolil jsem si rod těchto křivek, o nichž doleji některé nejhlavnější věci podám, nazvati *trisektorie*, nežby se snad jinému badateli podařilo význačnějšího a více odůvodněného názvu pro tyto křivky nalézti.

O trisekci úhlu bylo již bádáno a psáno velmi mnoho. Není tedy vlastním účelem tohoto článku podati skrovný příspěvek k řešení té úlohy. Že ale souvislost naší křivky s dělením oblouku ve tři rovné dílky tak těsná jest a samoděk se podává, nebude nezajímavo k závěrku i o té se zmíniti. Pozná se na novo organické protkávání se pravd mathematických, které rozvinutím roušky analytické z jejich tajemného úkrytu objeviti, jest nejpřednější snahou velebné této vědy.

2.

Sestrojení trisektorie a všeobecná rovnice její.

Opišme libovolným poloměrem r kružnici (obr. 1.) a veďme průměr OA. První bod průměru O budiž počátkem souřadnic pravoúhlých a OA osou úseček. Bodem A veďme v libovolném úhlu α k ose X nakloněnou sečnu. Paprsky z bodu O k sečně vedené protínají kružnici. Jeden z nich budiž OB, jenž protíná kružnici v bodu D. Přenesme pokaždé úsek paprsku mezi kružnicí a sečnou na druhou stranu příslušného paprsku, tedy učiňme $DM = DB$. Bod M jest bodem trisektorie, anať souvislost všech takto utvořených geometrických míst podává tuto křivku. Rovnice její dá se na základě sestrojení takto stanoviti. Jsou-li x, y souřadnice bodu M a vedou-li se BE a DF kolmo na osu X, bude

$$\frac{x}{y} = \frac{OF}{DF} \text{ čili } \frac{x^2}{y^2} = \frac{OF^2}{DF^2} = \frac{OF}{2r - OF}.$$

Avšak ještě také $PF = FE$ a $AE = AB \cos \alpha$, bude

$$OF = \frac{1}{2} (2r + x + AB \cos \alpha)$$

a tedy

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2r + x + AB \cos \alpha}{2r - x - AB \cos \alpha} \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (2.)$$

Dále jest

$$\frac{x}{y} = \frac{OE}{BE} = \frac{2r + AB \cos \alpha}{AB \sin \alpha}$$

z čehož

$$AB = \frac{2ry}{x \sin \alpha - y \cos \alpha}.$$

Hodnotu tuto dosaďme do rovnice 2) a obdržíme po náležitém převedení a skrácení

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x\,[(2r + x) \sin \alpha - y \cos \alpha]}{(2rx - x^2) \sin \alpha - (4r - x)\, y \cos \alpha}$$

Uvedeme-li trigonometrické funkce zde se vyskytující na společnou tangentu úhlu α, obdržíme tyto relace:

$$\frac{x}{y^2} = \frac{(2r + x)\, tg\, \alpha - y}{x\,(2r - x)\, tg\, \alpha - (4r - x) y}$$

$$[x^2(2r-x)-y^2(2r+x)]\,tg\,\alpha = xy(4r-x)-y^3$$
$$[y^2(2r+x)-x^2(2r-x)]\,a = y(y^2+x^2-4rx) \quad . \quad . \quad (3)$$

vyjádříme-li $tg\,\alpha$ krátce veličinou a. Rovnice 3) jest všeobecnou rovnicí trisektorie a má vedle konstanty r, poloměru základní kružnice, ještě stálou veličinu $a = tg\,\alpha$, jakožto argument rozličných tvarů celého rodu těchto křivek.

Spořádáním rovnice (3) dle obdoby dříve zmíněné všeobecné funkce (1) a srovnáním koefficientů rovných mocností veličin proměnných, snadno dopíditi se významu a souvislosti veličin A, D, E, G s veličinami r a a zde se vyskytujícími.

Není však nutno podrobný rozbor rovnice (3) předsevzíti. Postačíť upozorniti pouze na tyto zvláštní případy:

1. Je-li úhel $\alpha = 0$, tedy sečná průměrem kružnice vedená přechází trisektorie v kružnici poloměru dvojnásobného; neboť obdržíme pro $a = 0$ z rovnice (3)

$$y^2 + x^2 - 4rx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Veškeré paprsky z bodu O, kde jedině se sečnou se setkávají, k trisektorii čili ke kružnici dvojnásobným poloměrem opsané, vedené na obvodu kružnice základní, jejíž poloměr jest r, se rozpolují.

2. Je-li úhel $\alpha = 45^0$, tedy $tg\,\alpha = a = 1$, nabude rovnice trisektorie (3) poněkud jednoduššího a k mathematickému rozboru pohodlnějšího tvaru

$$y^3 - x^3 - 2r(y^2 - x^2) - xy(y - x + 4r) = 0$$

3. Je-li úhel $\alpha = 90^0$, tedy $tg\,\alpha = a = \infty$, promění se rovnice (3) ve výraz

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{2r-x}{2r+x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.)$$

Rovnice (5) jest tím nejjednodušším tvarem, ve kterém se může trisektorie objeviti, vyjma případ 1., kde stává se kružnicí. Sečná stává se tuto tečnou k dané kružnici a celý geometrický obrazec rozkládá se souměrně k ose úseček, což i diskusse rovnice (5). podává.

Způsob sestrojení trisektorie, zvláště v tomto případě, velmi na mysl uvádí cissoidu Diokleovu, kteráž podobným způsobem zvšeobecněna objevuje se s kličkou mezi oběma větvema, jest patrně křivkou čtvrtého stupně a ač tuším nic zvláště vynikajícího do sebe nemá, přec milovníka těchto útvarů dovede velmi poutati.

Podoba křivky rovnicí (5) naznačené u každého znalce zajisté ihned vybaví představu o listu Des Cartes-ově, jehož rovnice jest

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

čili $$(y^2 + x^2)(y + x) - xy(y + x + 3a) = 0.$$

Převedeme-li otočením osnovy souřadnic o úhel 45° trisektorii (5) do podobné polohy k souřadnicím, jako má list Des Cartes-ův, tedy dosazením hodnot

$$\frac{1}{2}(x + y)\sqrt{2} \text{ za } x \text{ a } \frac{1}{2}(y - x)\sqrt{2} \text{ za } y$$

do rovnice (5), přejde tato po náležitém spořádání veličin v úkon následující:

$$y^3 + x^3 + xy(y + x - 4r\sqrt{2}) = 0.$$

Tato souvislost podob i rovnic obou geometrických tvarů skytá zajisté hojnost ušlechtilé zábavy a jest vhodnou látkou ke cvičení.

Pro nás má však trisektorie vůbec ještě tu důležitost, že slouží, jak na počátku bylo sděleno, k rozdělení úhlu na tři rovné částky.

Užití této křivky k trisekci úhlu.

S řešením této úlohy, která v doby až nepamětné sahá, zanášelo se veliké množství učenců z příčin různých a s výsledky rovněž rozdílnými. Jedni vynasnažili se dokázati, že úloha ta pouhým pravídkem a kružítkem rozřešiti se nedá a tedy jest nad síly geometrie Euklidovy. Také mnozí k řešení jejímu vynalezli křivky a konstrukce velmi důmyslné, pomocí nichž bylo lze dospěti k rozřešení zcela správnému, jenom že mechanické provedení mnohých konstrukcí bylo s velikými obtížemi spojeno.

Jiní hledíce těmto obtížím se vyhnouti, vrátili se opět k linealu a kružidlu a udali rozličné způsoby, jimiž prý úkolu tomu pro obyčejnou potřebu vyhověti lze. Poněkud bedlivější rozbor těchto způsobů vede však k poznání zcela jinému; nejenom vědě není posloouženo, anyť výsledky takového dělení jsou theoreticky nesprávné, nýbrž ani praktické potřebě není vyhověno, neboť se bezprostředním vyměřením oblouku pomocí kružítka zkusmo dochází mnohem dříve rozdělení zcela správného.

Z dříve uvedených konstrukcí zvláště některé zasluhují zmínky. Ze školy Platonovy vyšly způsoby řešení zcela všeobecného a správného pomocí rovnoramenné hyperboly a jiných křivek. Znamenitý geometr *Pappus*, neméně proslulý *Vieta* a důmyslný vynálezce počtu infinitesimalního *Newton*, veleduch doby novější, pracovali o této úloze. *Nikomedes* vynalezl k témuž účelu, jakož i hlavně k řešení problemu delického svou známou konchoidu. K řešení týchž dvou úloh sestrojil *Uhlhorn* zvláštní křivku, *ophiuridu* nazvanou, jejíž rovnice jest

$$x^3 + (y - a)\,xy - b\,y^2 = 0.$$

A jiní jiných křivek a i přístrojů rozličných užívali k dělení oblouků na rovné díly; takže velice by se zavděčil, kdo by napsal, maje příslušné prameny po ruce, krátké dějiny tohoto zdánlivě nepatrného úkolu v zájmu vědy.

Ze všech konstrukcí, které ku zprávnému rozdělení úhlu ve tři rovné částky vedou, zdá se mi podle mého soudu, užití křivky, o níž tu dříve jednáno bylo, nejméně složitým a k provedení velmi lehkým. Máme-li úhel $u = \sphericalangle AOA'$ anebo jemu příslušný oblouk AA' (obr. 2.) rozděliti v poměru $1:2$, spusťme nejprve z bodu A kolmici na druhé rameno OA' totiž $AH \perp OA'$. Z rozpolovacího bodu C ramena OA opišme poloměrem $OC = CA$ půlkruh, který bodem H jíti musí. Kolmice AH jest částí sečné, která v tomto půlkruhu se nalezá a k průměru jeho se vždy o doplněk daného úhlu u na 90^0 kloní, tedy $OAH = a = 90 - u$. Sestrojí-li se tedy k sečné AH a příslušnému oblouku kruhovému AH trisektorie, bude daný oblouk AA' protínati v bodu M, jímž právě nabude se žádaného dělení, totiž

$$A'M : MA = 1:2.$$

K vůli důkazu připomenouti jest, že, vedeme-li přímku OM, jíž úhel daný u také v poměru $1:2$ se rozděluje, bude tato základní půlkruh protínati v bodu D a sečnu AH v bodu E. Z vlastnosti trisektorie plyne $DM = DE$ a spojí-li se bod D s bodem A, jest

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle MDA = 90^0$$

tedy

$$AE = AM,\ \sphericalangle AED = \sphericalangle AMD$$

a úhel

$$\sphericalangle EAD = MAD = \sphericalangle A'OM = x,$$

neboť spočívají oba obvodové úhly $A'OM$ čili HOD a $\sphericalangle EAD$ čili HAD na společné tetivě HD.

Zároveň jest $\sphericalangle OMA = \sphericalangle OAM$.

Označíme-li ještě pro krátkost úhel $MOA = y$, jest souvislost těch úhlů následující:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle E = \sphericalangle M$$

čili

$$\alpha + 2x = \alpha + y$$

aneb

$$2x = y, \quad x : y = 1 : 2$$

$$x = {}^1/_3\, u\,.$$

Kdyby daný úhel u byl 90^0, a tedy $\alpha = 0$, možno použiti k dělení úhlu pravého trisektorie v rovnici (4) označené, což vede k známému již a dlouho užívanému způsobu dělení úhlu pravého, kterýž ovšem v jiném rouše se podává.

Tupý úhel dobře jest napřed rozpůliti.

Aby se část trisektorie AMH správně a pohodlně mohla vésti a hlavně průsečný bod M na jisto postaviti, sestavil jsem přístroj zcela jednoduchý, kde pomocí dvojitého nuceného pohybu průsek oblouku AA' v bodu M vzniká; kdežto pouhým pravídkem a kružídkem vzbuditi možno toliko jediný nucený pohyb. Jest tedy i ze stránky praktického provedení postaráno, aby theorií zaručená správnost rozdělení úhlu ve tři rovné části neutrpěla.*)

---

*) Poznámka redakce. Tímto článkem stalo se bezúčelným uveřejnění některých zásylek trisekce úhlu se týkajících, jichž se mi dostalo v době poslední z různých stran.