Eduard Weyr

Rozbor rovnice druhého stupně o třech proměnných. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 3, 97--112

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122778`

Rozbor rovnice druhého stupně o třech proměnných.

Napsal

Eduard Weyr.

§. 1. Každá rovnice druhého stupně mezi třemi proměnnými x, y, z má tvar

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+a_{12}xy+a_{14}x$$
$$+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

V následujícím článku předpokládáme, že koefficienty a_{ik} jsou realné hodnoty. Proměnné x, y, z pojímáme za pravoúhlé souřadnice v prostoru a klademe si za úkol stanoviti tvar plochy, repraesentované danou rovnicí. Za tím účelem uvedeme danou rovnici pomocí transformac na tvary jednodušší; analysování a geometrický výklad těchto jednoduchých rovnic pomíjíme mlčením, majíce na zřeteli jen překonání algebraických obtíží při oněch transformacích.

Řešení vytčeného úkolu urychlíme zavedením t. zv. homogenních (Hesse-ových) souřadnic. Homogenními souřadnicemi bodu x, y, z rozumíme čtyry hodnoty x_1, x_2, x_3, x_4 takové, že poměry prvních tří ke čtvrté se rovnají obyčejným souřadnicím, t. j. že

$$x=\frac{x_1}{x_4},\quad y=\frac{x_2}{x_4},\quad z=\frac{x_3}{x_4}.$$

Hodnoty x_1, x_2, x_3, x_4 takto definované nejsou samy stanoveny, nýbrž jen jich poměry; patrně repraesentují souřadnice λx_1, λx_2, λx_3, λx_4 týž bod, nechť je $\lambda \gtrless 0$ jakákoli hodnota.

Homogenními souřadnicemi jest — pakli $x_4 \gtrless 0$ — patrně vždy *jeden* bod x, y, z úplně stanoven. Je-li $x_4=0$, pak stanoví souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4 bod v nekonečnu a s. položený na spojnici počátku souřadnic s bodem, jehož pravoúhlé souřadnice jsou x_1, x_2, x_3. Zde mlčky předpokládáme, že tento bod není sám v počátku souřadnic, t. j. že neplatí současně

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Tyto současně nullové hodnoty všech čtyř homogenních souřadnic naprosto vylučujeme, jinak jsou ale x_1, x_2, x_3, x_4 všech hodnot schopny.

Zavedením Hesseových souřadnic stávají se rovnice homogenními. Dána-li na př. rovina

$$(1) \qquad a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0,$$

obdržíme v oněch souřadnicích

$$a_1 \frac{x_1}{x_4} + a_2 \frac{x_2}{x_4} + a_3 \frac{x_3}{x_4} + a_4 = 0,$$

a tedy, násobivše x_4,

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$$

Je-li $x_4 \gtrless 0$, tu jsou (1) a (2) patrně aequivalentní; je-li $x_4 = 0$, jest příslušný bod v nekonečnu, t. j. alespoň jedna z hodnot x, y, z jest nekonečně velká a zároveň

$$x : y : z = x_1 : x_2 : x_3.$$

Je-li tedy na př. z nekonečně velké, lze (1) psáti

$$a_1 \frac{x}{z} + a_2 \frac{y}{z} + a_3 = 0, \qquad \text{t. j.} \qquad a_1 \frac{x_1}{x_3} + a_2 \frac{x_2}{x_3} + a_3 = 0,$$

t. j. (1) a (2) jsou i v tomto případě aequivalentní. Jest tedy (2) rovnicí roviny (1) v Hesseových souřadnicích.

Obdobně platí pro každou rovnici algebraickou, tedy na př. pro danou rovnici druhého stupně. Nahradíme-li v ní x, y, z podíly $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ a odstraníme-li jmenovatele x_4^2, obdržíme

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

čili stručněji

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0;$$

rovnice tato jest úplně aequivalentní rovnici dané, t. j. každý bod x, y, z hovící oné hoví též této a naopak. V poslední rovnici jsme psali a_{13} místo a_{31}; učiníme sjednání, že budeme psáti obecně a_{ki} místo a_{ik}, kdykoli se nám to hodí, t. j. supponujeme

$$a_{ki} = a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Pak máme ve formě stručnější

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k,$$

kdež i, k nabývají neodvisle jedno od druhého hodnot 1, 2, 3, 4.

Učinivše k vůli stručnosti

$$\varphi_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + a_{k4}x_4, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

máme patrně

$$\varphi = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + x_4\varphi_4 = \Sigma x_k \varphi_k.$$

§. 2. *Plochy kuželové.* Tvar takových ploch lze si snadno představiti, znám-li vrchol a některý řez neprocházející vrcholem. Počneme tudíž s otázkou, kterak poznati, je-li plocha kuželovou?

Budiž plocha kuželem a x' t. j. bod x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 vrcholem jejím. Jeli pak x libovolný bod na ploše, musí celá spojnice xx' býti na ploše, a to také stačí, aby plocha byla kuželovou. Bod $\lambda x + x'$ jest na spojnici xx', neboť on se nalézá v každé rovině procházející body x a x'; skutečně je-li

$$\Sigma a_k \xi_k = 0,$$

rovnice roviny procházející body x a x', t. j. platí-li

$$\Sigma a_k x_k = 0, \quad \Sigma a_k x'_k = 0,$$

pak platí také

$$\Sigma a_k (\lambda x_k + x'_k) = 0,$$

t. j. rovina prochází bodem $\lambda x + x'$. Zároveň patrno, že obdržíme všecky body spojnice xx', nabývá-li λ všech hodnot, neboť pak na př. první pravoúhlá souřadnice $\dfrac{\lambda x_1 + x'_1}{\lambda x_4 + x'_4}$ nabývá všech hodnot.

Ze supposice, že x jest na ploše t. j. z rovnice

(3) $$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad \text{čili} \quad \varphi(x) = 0$$

má tedy plynouti, že $\lambda x + x'$ jest na ploše, t. j. že platí

(4) $\varphi(\lambda x_1 + x'_1, \ldots, \lambda x_4 + x'_4) = 0$ čili $\varphi(\lambda x + x') = 0$

při každém λ. Avšak

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x + x') &= \Sigma(\lambda x_k + x'_k)\,\varphi_k(\lambda x + x')\\ &= \Sigma(\lambda x_k + x'_k)\,\varphi_k(\lambda x) + \Sigma(\lambda x_k + x'_k)\,\varphi_k(x')\\ &= \lambda^2\Sigma x_k\varphi_k(x) + \lambda\Sigma x'_k\varphi_k(x) + \lambda\Sigma x_k\varphi_k(x') + \Sigma x'_k\varphi_k(x').\end{aligned}$$

Uvážíme-li, že patrně

$$\Sigma x'_k\varphi_k(x) = \Sigma x_k\varphi_k(x'),$$

máme

$$\varphi(\lambda x + x') = \lambda^2\varphi(x) + 2\lambda\Sigma x_k\varphi_k(x') + \varphi(x').$$

Jelikož dle (3) první člen odpadá, vyžaduje (4) vzhledem k libovolnosti λ, aby

(5) $$\Sigma x_k\varphi_k(x') = 0,$$

(6) $$\varphi(x') = 0.$$

Druhá tato rovnice praví, že vrchol x' jest na ploše.

Každý bod x hovící rovnici (3) má hověti také rovnici (5). Dejme tomu, že se ve (3) na př. x_1 skutečně vyskytuje; pak lze voliti x_2, x_3, x_4 libovolně a ustanoviti ze (3) x_1 tak, aby bylo vyhověno této rovnici. Tento bod má vyplniti rovnici (5) maje x_2, x_3, x_4 libovolné. Vyskytuje-li se x_1 skutečně v (5) t. j. jeli $\varphi_1(x') \gtrless 0$, tu, volivše x_2, x_3, x_4 jest x_1 rovnicí (5) úplně určeno, pročež musí každý bod x hovící (5) též hověti rovnici (3); nevyskytuje-li se x_1 v (5) t. j. jeli $\varphi_1(x') = 0$, musí rovnice (5) při libovolných x_2, x_3, x_4 býti vyplněna t. j. musí též

$$\varphi_2(x') = 0, \quad \varphi_3(x') = 0, \quad \varphi_4(x') = 0.$$

Snadno ukážeme, že jen druhý případ může míti místo t. j. že nemůže $\varphi_1(x') \gtrless 0$. Položivše totiž

$$\Sigma x_k\,\varphi_k(x') = x_0,$$

můžeme pakli $\varphi_1(x') \gtrless 0$ vyjádřiti x_1

$$x_1 = \frac{1}{\varphi_1(x')}\left[x_0 - x_2\varphi_2(x') - x_3\varphi_3(x') - x_4\varphi_4(x')\right]$$

a tím převésti φ na tvar

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi(x_0, x_2, x_3, x_4),$$

kdež ψ značí opět homogenní celistvou funkci druhého stupně argumentů x_0, x_2, x_3, x_4. Shledali jsme, že $\varphi(x)$ vymizí, jakmile platí (5), tedy při libovolných hodnotách x_2, x_3, x_4 a při $x_0 = 0$. Položíme-li

$$\psi = Ax_0^2 + Bx_0 + C,$$

musí tedy C při libovolných hodnotách x_2, x_3, x_4 býti nullou, tedy totožně nullou, takže

$$\psi = x_0 (Ax_0 + B),$$

kde A patrně značilo stálou a B linearnou homogenní funkci hodnot x_2, x_3, x_4. Máme tedy, zavedeme-li za x_0 zase $\Sigma x_k \varphi_k(x')$

$$\varphi = \psi = [\Sigma x_k \varphi_k(x')] [\Sigma b_k x_k].$$

Každý bod x činící $\varphi = 0$, má též $\Sigma x_k \varphi_k(x') = 0$ učiniti; hoví tedy této rovnici každý bod činící $\Sigma b_k x_k = 0$, z čehož plyne, že musí

$$\Sigma b_k x_k = c \Sigma x_k \varphi_k(x')$$

kde c značí stálou. Máme tedy

(7) $$\varphi(x) = c\,[\Sigma x_k \varphi_k(x')]^2.$$

Dle rovnice (6) platí

(8) $$\Sigma x'_k \varphi_k(x') = 0.$$

Derivováním rovnice (7) máme

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} = \varphi_k(x) = c \varphi_k(x') \Sigma x_k \varphi_k(x'),$$

pročež vzhledem ku (8):

$$\varphi_k(x') = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Jest tedy supposice $\varphi_1(x') \gtrless 0$ nemožna a nezbývá než položiti

$$\varphi_k(x') = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Pak ale je mimo (5) též (6) vyplněna, t. j. plocha je kuželovou; neboť skutečně

$$\varphi(x') = \Sigma x'_k \varphi_k(x') = 0.$$

Jest tedy nutná a postačující výminka proto, aby plocha $\varphi = 0$ byla kuželovou ta, aby existoval bod x' hovící rovnicím

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi_1(x') &= 0, \quad \text{t. j. } a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4 = 0, \\ \varphi_2(x') &= 0, \quad \text{t. j. } a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4 = 0, \\ \varphi_3(x') &= 0, \quad \text{t. j. } a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4 = 0, \\ \varphi_4(x') &= 0, \quad \text{t. j. } a_{41}x'_1 + a_{42}x'_2 + a_{43}x'_3 + a_{44}x'_4 = 0. \end{aligned}$$

Takový bod existuje, t. j. existují čtyry hodnoty x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 hovící těmto čtyrem linearným rovnicím a nejsoucí naskrze nullami *), pakli vymizí determinant z koefficientů těchto rovnic, t. j. pakli

$$(10) \qquad D = \Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) = 0.$$

Tento determinant se zove diskriminantem homogenní funkce φ čili rovnice $\varphi = 0$. Vymizení diskriminantu charakterisuje tedy plochu jakožto kuželovou. Tím odpověděno k otázce položené na počátku tohoto artikulu. Zároveň tím ale poukázáno k invariantivní povaze diskriminantu; vymizíli totiž diskriminant funkce φ a transformujemeli ji k novým souřadnicím x', tak že tedy totožně

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4),$$

bude i diskriminant funkce φ' rovnati se nulle, poněvadž plocha je kuželovou. A skutečně snadno lze dokázati, že nový diskriminant se rovná součinu ze starého a ze čtverce determinantu (modulu) transformace.

§. 3. *Pokračování o plochách kuželových.* Předpokládejme v tomto art., že $D = 0$, t. j., že plocha je kuželová, a ptejme se po vrcholu jejím.

A. Nejsou-li všecky subdeterminanty třetího stupně diskriminantu D rovny nulle, pak existuje jediný bod x' hovící

*) Viz mé pojednání: „O řešení linearných rovnic", tento Časopis, roč. XIV, ku kterému odkazuji v příčině pojmů podstatně různých systemů a p., jež se v následujících úvahách vyskytují.

rovnicím (9), t. j. plocha kuželová má jediný vrchol. Označme subdeterminant diskriminantu náležející ku a_{ik} literou A_{ik}; pak jest dle supposice alespoň jeden ze subdeterminantů A_{ik} různý od nully, na př. $A_{gh} \gtrless 0$ a jediné řešení rovnic (9) jest dáno proporcí (viz citované pojednání)

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = A_{g1} : A_{g2} : A_{g3} : A_{g4}.$$

Jeli tu $A_{g4} = 0$, tedy $x'_4 = 0$, nalézá se vrchol plochy v nekonečnu, t. j. plocha jest válcem.

Mějme na př. $g = 4$ t. j. nechť systemy

$$a_{k1},\ a_{k2},\ a_{k3},\ a_{k4} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

jsou podstatně různé (v. cit. pojednání §. I. a II.), systém

$$a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44},$$

pak z nich složen pomocí jistých faktorů λ_1, λ_2, λ_3, t. j. nechť

$$a_{4k} = \lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \lambda_3 a_{3k} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{11}$$

Pak máme totožně

$$\varphi_4(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \lambda_3 \varphi_3(x),$$

pročež

$$\varphi(x) = \Sigma x_k \varphi_k(x) = (x_1 + \lambda_1 x_4)\, \varphi_1(x) + (x_2 + \lambda_2 x_4)\, \varphi_2(x) + (x_3 + \lambda_3 x_4)\, \varphi_3(x). \tag{12}$$

Avšak binomy stojící na pravo v závorkách lze vyjádřiti linearně pomocí φ_1, φ_2, φ_3. Skutečně, zkusme ustanoviti hodnoty μ_{ik} tak, aby platilo totožně

$$x_1 + \lambda_1 x_4 = \mu_{11}\varphi_1 + \mu_{12}\varphi_2 + \mu_{13}\varphi_3,$$

t. j. aby platily rovnice

$$\begin{aligned} \mu_{11}a_{11} + \mu_{12}a_{21} + \mu_{13}a_{31} &= 1,\\ \mu_{11}a_{12} + \mu_{12}a_{22} + \mu_{13}a_{32} &= 0,\\ \mu_{11}a_{13} + \mu_{12}a_{23} + \mu_{13}a_{33} &= 0,\\ \mu_{11}a_{13} + \mu_{12}a_{24} + \mu_{13}a_{34} &= \lambda_1. \end{aligned} \tag{13}$$

První tři rovnice stanoví úplně hledané hodnoty μ_{11}, μ_{12}, μ_{13}, poněvadž determinant $\Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33})$ nutně jest různý od nully, což ihned ukáži. Pak ale je čtvrtá rovnice již vyplněna, neboť násobíme-li první tři rovnice resp. hodnotami λ_1, λ_2, λ_3 a sečteme-li je, obdržíme vzhledem ku (11) čtvrtou rovnici (13).

Obdobně nalezneme čísla μ_{21}, μ_{22}, μ_{23} činící totožně

$$x_2 + \lambda_2 x_4 = \mu_{21}\varphi_1 + \mu_{22}\varphi_2 + \mu_{23}\varphi_3,$$

a konečně μ_{31}, μ_{32}, μ_{33} taková, že totožně

$$x_3 + \lambda_3 x_4 = \mu_{31}\varphi_1 + \mu_{32}\varphi_2 + \mu_{33}\varphi_3.$$

Přihlédnemeli blíže k rovnicím stanovícím hodnoty μ t. j.

$$\begin{array}{lll} \Sigma a_{1k}\mu_{1k} = 1, & \Sigma a_{2k}\mu_{1k} = 0, & \Sigma a_{3k}\mu_{1k} = 0, \\ \Sigma a_{1k}\mu_{2k} = 0, & \Sigma a_{2k}\mu_{2k} = 1, & \Sigma a_{3k}\mu_{2k} = 0, \\ \Sigma a_{1k}\mu_{3k} = 0, & \Sigma a_{2k}\mu_{3k} = 0, & \Sigma a_{3k}\mu_{3k} = 1, \end{array}$$

vidíme hned, že μ_{ij} jest podíl $\dfrac{S_{ij}}{A_{44}}$, značí-li S_{ij} minor determinantu A_{44} příslušný ku a_{ij}; pročež $\mu_{ij} = \mu_{ji}$.

Nyní ale máme dle (12)

$$\varphi(x) = \varphi_1 \Sigma\mu_{1k}\varphi_k + \varphi_2 \Sigma\mu_{2k}\varphi_k + \varphi_3 \Sigma\mu_{3k}\varphi_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

t. j.
$$\varphi(x) = \mathrm{H}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

kdež H značí homogenní celistvou funkci 2. stupně argumentů φ_1, φ_2, φ_3. Rovnici kužele neb válce lze tedy linearnou transformací

$$\varphi_1 = \xi_1, \quad \varphi_2 = \xi_2, \quad \varphi_3 = \xi_3,$$

převésti na rovnici mezi *třemi* proměnnými

$$\mathrm{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0.$$

Zbývá ještě ukázati, že $A_{44} = \Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}) \gtrless 0$. Dle supposice jest v diskriminantu D čtvrtý řádek složen z prvních tří pomocí faktorů λ_1, λ_2, λ_3; avšak D jest determinantem symmetrickým, tedy jest také čtvrtý sloupec složen z prvních tří sloupců, tedy platí týž výrok i o schematu

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}. \end{array}$$

Kdyby $\Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}) = 0$, pak by v tomto schematu nebyly první tři sloupce podstatně různé, t. j. byly by složeny z $\nu < 3$ sloupců a tedy i čtvrtý by z nich byl složen, a tedy by všecky čtyry determinanty vznikající z (S) odejmutím jednoho sloupce se rovnaly nulle, což jest proti supposici, že vodorovné systemy (S) jsou podstatně různé.

Převedení funkce φ na tvar $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ lze ostatně přímo a rychleji takto provésti. Násobme v determinantu

$$D = 0$$

poslední sloupec hodnotou x_4 a přičtěme k němu první tři sloupce resp. násobené x_1, x_2, x_3, i obdržíme

$$x_4 D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \varphi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \varphi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \varphi_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nyní násobme poslední řádek hodnotou x_4 a přičtěme k němu první tři řádky resp. násobené x_1, x_2, x_3 a obdržíme

$$x_4^2 D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \varphi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \varphi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvedemeli dle elementů posledního řádku, máme patrně

$$x_4^2 D = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + A_{44}\varphi = 0,$$

kde F je homogenní funkce 2. stupně, a tedy

$$\varphi = -\frac{1}{A_{44}} F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

jako nahoře.

Supposice $g = 4$ vedla ku $A_{44} \gtrless 0$; obecně vede supposice $A_{gh} \gtrless 0$ ku $A_{gg} \gtrless 0$ a $A_{hh} \gtrless 0$ a v právě uvedené transformací hraje g-tý nebo h-tý řádek s g-tým nebo h-tým sloupcem pak tutéž úlohu, jakou měl nyní 4-tý řádek a 4-tý sloupec.

B. Nechť jsou všecky subdeterminanty $A_{ik} = 0$ a nechť alespoň jeden minor druhého stupně diskriminantu D jest různý od nully na př. nějaký minor, jehož elementy stojí v prvním a druhém řádku:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} a_{1g}, & a_{1h} \\ a_{2g}, & a_{2h} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Jsou tedy systemy stojící v prvém a druhém řádku v D podstatně různé, třetí a čtvrtý řádek pak z nich složeny na př. pomocí faktorů λ_1, λ_2 resp. λ'_1, λ'_2. Pročež máme totožně

$$\varphi_3 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2,$$
$$\varphi_4 = \lambda'_1\varphi_1 + \lambda'_2\varphi_2,$$

a tedy

$$\varphi = \Sigma x_k\varphi_k = (x_1 + \lambda_1 x_3 + \lambda'_1 x_4)\,\varphi_1 + (x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda'_2 x_4)\,\varphi_2.$$

Avšak trinomy v závorkách na pravo lze vyjádřiti linearně pomocí φ_1 a φ_2. Zkusme totiž položiti totožně

$$x_1 + \lambda_1 x_3 + \lambda'_1 x_4 = \mu_{11}\varphi_1 + \mu_{12}\varphi_2,$$

t. j. hleďme μ_{11} a μ_{12} tak ustanoviti, aby platily rovnosti

$$(15) \qquad \begin{aligned} \mu_{11}a_{11} + \mu_{12}a_{21} &= 1, \\ \mu_{11}a_{12} + \mu_{12}a_{22} &= 0, \\ \mu_{11}a_{13} + \mu_{12}a_{23} &= \lambda_1, \\ \mu_{11}a_{14} + \mu_{12}a_{24} &= \lambda'_1. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic plynou μ_{11} a μ_{12}, neboť determinant $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ jest nutně různý od nuly, jakož ihned ukáži. Pak ale jest třetí a čtvrtá rovnice (15) sama již vyplněna. Násobímeli totiž první a druhou resp. λ_1 a λ_2 a sečtemeli, obdržíme třetí, přihlédnemeli totiž k okolnosti, že třetí řádek v D jest složen z prvních dvou právě pomocí faktorů λ_1 a λ_2. Zrovna tak plyne čtvrtá rovnice (15) z prvních dvou pomocí násobitelů λ'_1 a λ'_2.

Obdobně ustanovíme dva faktory μ_{21}, μ_{22} čínící totožně

$$x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda'_2 x_4 = \mu_{21}\varphi_1 + \mu_{22}\varphi_2;$$

obdržíme je totiž řešením rovnic

$$(15') \qquad \begin{aligned} \mu_{21}a_{11} + \mu_{22}a_{21} &= 0, \\ \mu_{21}a_{12} + \mu_{22}a_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Nyní máme

$$\varphi = (\mu_{11}\varphi_1 + \mu_{12}\varphi_2)\,\varphi_1 + (\mu_{21}\varphi_1 + \mu_{22}\varphi_2)\,\varphi_2,$$

t. j.

(16) $$\varphi = \mu_{11}\varphi_1^2 + 2\mu_{12}\varphi_1\varphi_2 + \mu_{22}\varphi_2^2,$$

neboť snadno lze řešením (15) a (15′) nahlednouti, že $\mu_{12} = \mu_{21}$. Jest tedy φ homogenní funkce *dvou* linearných výrazů φ_1 a φ_2, pročež ji lze rozložiti na součin dvou linearných funkcí:

$$\varphi = \varphi_2^2\left(\mu_{11}\frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} + 2\mu_{12}\frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \mu_{22}\right)$$

$$= \varphi_2^2\cdot\mu_{11}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - \varrho_1\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - \varrho_2\right),$$

$$\varphi = \mu_{11}(\varphi_1 - \varrho_1\varphi_2)\,(\varphi_1 - \varrho_2\varphi_2),$$

kde ϱ_1 a ϱ_2 jsou takové hodnoty, že platí při každém ξ:

$$\mu_{11}\xi^2 + 2\mu_{12}\xi + \mu_{22} = \mu_{11}(\xi - \varrho_1)\,(\xi - \varrho_2),$$

t. j., kde ϱ_1 a ϱ_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\mu_{11}\varrho^2 + 2\mu_{12}\varrho + \mu_{22} = 0.$$

Zbývá ještě ukázati, že determinant $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ jest různý od nully. Dle supposice jsou třetí a čtvrtý řádek v D složeny z prvních dvou řádků, a tedy — jelikož D má tytéž sloupce jako řádky — jsou v D a tedy také i v schematu

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix}$$

třetí a čtvrtý sloupec složeny z prvních dvou. Kdyby determinant $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ byl nullou, pak by první dva sloupce nebyly podstatně různé, tedy žádné dva sloupce tohoto schematu by nebyly podstatně různé, t. j. všecky čtyřčlenné determinanty vznikající ze schematu vynecháním dvou sloupců by se rovnaly nulle, proti supposici (14). Musí tedy nutně

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

V případu právě uvažovaném jsou rovnice (9), stanovící vrchol plochy x' vyplněny, jakmile

$$\varphi_1(x') = 0, \quad \varphi_2(x') = 0.$$

Volivše x'_3, x'_4 libovolně obdržíme vzhledem ku

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \gtrless 0$$

určité x'_1, x'_2. Máme tedy nekonečně mnoho vrcholů, totiž každý bod x' průsečné přímky rovin $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Plocha sama pak se skládá z rovin

$$\varphi_1 - \varrho_1\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 - \varrho_2\varphi_2 = 0,$$

procházejících patrně onou přímkou.

Rozložení výrazu φ na dva linearné faktory lze rychleji takto provésti. Dle supposice máme

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Násobme poslední sloupec hodnotou x_3 a přičtěme k němu první a druhý sloupec resp. násobený x_1 a x_2; obdržíme

$$x_3 A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \varphi_1 - a_{14}x_4 \\ a_{21}, & a_{22}, & \varphi_2 - a_{24}x_4 \\ a_{31}, & a_{32}, & \varphi_3 - a_{34}x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \varphi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \varphi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & \varphi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

neboť hodnoty a_{14}, a_{24}, a_{34} jsou dle supposice složeny pomocí faktorů λ'_1, λ'_2 z prvních dvou sloupců tohoto determinantu. — Násobme nyní poslední řádek hodnotou x_3 a přičtěme k němu první dva řádky násobené resp. x_1 a x_2; obdržíme

$$x_3^2 A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \varphi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \varphi_2 \\ \varphi_1 - a_{14}x_4, & \varphi_2 - a_{24}x_4, & \varphi - \varphi_4 x_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \varphi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \varphi_2 \\ \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,\varphi - a_{22}\varphi_1^2 + 2a_{12}\varphi_1\varphi_2 - a_{11}\varphi_2^2 = 0,$$

z čehož vzhledem ku $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \gtrless 0$ plyne φ jakožto homogenní kvadratická funkce výrazů φ_1 a φ_2:

$$\varphi = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{22}\varphi_1^2 - 2a_{12}\varphi_1\varphi_2 + a_{11}\varphi_2^2).$$

Tím zároveň patrny hodnoty μ_{11}, μ_{12}, μ_{22}, srovnáme-li tento výraz s (16).

V tomto odstavci B. jsme supponovali, že nevymizí alespoň jeden minor 2. stupně vzatý z prvního a druhého řádku diskriminantu D. Kdybychom obecně předpokládali, že nevymizí minor 2. stupně vzatý z g-ho a h-ho řádku diskriminantu ($g < h$), tu by plynulo zcela obdobně, že nutně

$$\begin{vmatrix} a_{gg}, & a_{gh} \\ a_{hg}, & a_{hh} \end{vmatrix} \gtrless 0, \tag{17}$$

a došli bychom zcela obdobných výsledků pracujíce s g-tým a h-tým řádkem právě tak jak jsme činili s prvním a druhým; t. j. φ by se dalo vyjádřiti jakožto homogenní kvadratická funkce výrazů φ_g a φ_h.

Kdy se skládá plocha φ ze dvou *rovnoběžných* rovin? Patrně tehdy, kdy $\varphi_g = 0$ a $\varphi_h = 0$ jsou rovnoběžné roviny; to ale vyžaduje, aby všecky tři determinanty

$$\begin{vmatrix} a_{gi}, & a_{gk} \\ a_{hi}, & a_{hk} \end{vmatrix} = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3; i \gtrless k).$$

Tedy vzhledem ku (17) musí nutně $h = 4$, a tím nalézáme tuto odpověď k dané otázce: Plocha se skládá ze dvou rovnoběžných rovin, pakli vymizí všecky minory A_{ik} diskriminantu, pakli dále vymizí minory 2. stupně vzaty z g-ho a čtvrtého řádku ($g = 1$ nebo 2 nebo 3) a z prvních tří sloupců, a pakli zároveň

$$\begin{vmatrix} a_{gg}, & a_{g4} \\ a_{4g}, & a_{44} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

C. Nechť nejen všecky subdeterminanty A_{ik}, ale nechť i všecky minory 2. stupně diskriminantu D se rovnají nulle: nechť ale alespoň jeden minor 1. stupně, t. j. nechť alespoň jeden element $a_{gh} \gtrless 0$, supposice nutná, nemá-li daná funkce φ

se redukovati totožně na nullu. Pak ale nutně musí $a_{gg} \gtrless 0$ i $a_{hh} \gtrless 0$. Neboť dle supposice učiněné o všech minorech 2. stupně, lze všecky řádky vyvoditi z g-ho jako jeho násobky; tedy také všecky sloupce jako násobky g-ho sloupce; tedy jsou všecky elementy g-ho řádku násobky elementu a_{gg} a tedy nemůže $a_{gg} = 0$, neb by pak i $a_{gh} = 0$, proti supposici. — Píšemeli $a_{gh} \gtrless 0$ ve tvaru $a_{hg} \gtrless 0$, plyne ihned také $a_{hh} \gtrless 0$.

Nyní lze snadno ukázati, že

$$\varphi = \frac{\varphi_g^2}{a_{gg}},$$

tak že plocha se redukuje na jedinou rovinu $\varphi_g = 0$, a dále že každý bod této roviny jest vrcholem této zvrhlé plochy. — K vůli přehlednosti supponujeme na př. $g = 1$, t. j. supponujeme, že některý element prvního řádku $a_{1h} \gtrless 0$; pak nutně $a_{11} \gtrless 0$. Buď nyní v D druhý, třetí a čtvrtý řádek resp. $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ násobným prvním řádkem, tedy

$$a_{2k} = \lambda_2 a_{1k}, \quad a_{3k} = \lambda_3 a_{1k}, \quad a_{4k} = \lambda_4 a_{4k}, \tag{18}$$

pročež

$$\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_1, \quad \varphi_3 = \lambda_3 \varphi_1, \quad \varphi_4 = \lambda_4 \varphi_1.$$

Dále pak

$$\varphi = \Sigma x_k \varphi_k = (x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) \varphi_1,$$

aneb

$$\varphi = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} x_1 + \lambda_2 a_{11} x_2 + \lambda_3 a_{11} x_3 + \lambda_4 a_{11} x_4) \varphi_1,$$

t. j. přihlédnemeli k (18)

$$\varphi = \frac{1}{a_{11}} \cdot \varphi_1^2, \qquad q. e. d.$$

Rovnice (9) stanovící vrchol x' patrně se redukují na jedinou rovnici $\varphi_1(x') = 0$.

§. 4. *O středu ploch druhého stupně.*

Buď A libovolný bod nějaké plochy, S pevný bod, spojme body A a S přímkou a ustanovme na ní bod A′ tak, aby S rozpoloval délku $\overline{AA'}$. Nalézáli se bod A′ vždy též na ploše, pak zoveme S středem plochy. Máli nějaká plocha střed a známe-li jej, tu patrně si usnadníme představu o té ploše, a jakož shledáme, můžeme pomocí středu i rovnici plochy sjednodušiti, pročež si položme otázku: má plocha druhého stupně střed, a máli, kterak jej ustanovíme?

Odpovězme nejdříve ku snadnější otázce: kterak poznáme, je-li počátek souřadnic x, y, z středem plochy $f(x, y, z) = 0$, kdež

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}.$$

Máli nějaký bod A souřadnice x, y, z, tu má bod A' tak stanovený, že počátek rozpoluje délku $\overline{AA'}$, patrně souřadnice $-x$, $-y$, $-z$. Aby počátek byl středem plochy, jest tedy nutné, a stačí, aby kdykoli

$$f(x, y, z) = 0, \tag{19}$$

též platilo

$$f(-x, -y, -z) = 0. \tag{20}$$

Odečtemeli rovnice (19) a (20) máme, krátivše čtyřmi,

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0.$$

Máli tato rovnice býti následkem rovnice (19), tedy soudíme jako v §. 2., že buď musí

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0,$$

aneb že

$$f(x, y, z) = c\,(a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z)^2,$$

což by ale odporovalo supposici, že některý z koefficientů u členů linearných jest různý od nully, pročež neobsahuje f linearné členy; a to také stačí, aby z (19) plynula rovnice (20), neboť v tomto případu platí totožně

$$f(x, y, z) = f(-x, -y, -z).$$

Počátek souřadnic jest tedy tehdy a jen tehdy středem plochy (19), pakli

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0;$$

pak nazýváme rovnici plochy

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + a_{44} = 0.$$

centralnou n. středovou.

Odpovězme k další otázce: Kdy je určitý bod x_0, y_0, z_0 středem plochy (19)? Zvolme tento bod za počátek nové soustavy os souřadných x', y', z', rovnoběžných s původními. Jsou-li x, y, z a x', y', z' původní resp. nové souřadnice téhož bodu, platí

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'.$$

Jest tedy

$$f(x_0 + x', y_0 + y', z_0 + z') = 0,$$

rovnice dané plochy v nových souřadnicích. Seřadíme-li levou stranu dle mocností nových souřadnic, obdržíme

$$f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x_0} x' + \frac{\partial f_0}{\partial y_0} y' + \frac{\partial f_0}{\partial z_0} z' + V = 0,$$

kde $\frac{\partial f_0}{\partial x_0}$ značí $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0}$, a pod. $\frac{\partial f_0}{\partial y_0}$ a $\frac{\partial f_0}{\partial z_0}$, a kde V značí kvadratické členy

$$a_{11}x'^2 + a_{22}a'^2 + \ldots + 2a_{12}x'y'$$

funkce f, nahradíme-li v nich x, y, z čárkovanými souřadnicemi. Aby x_0, y_0, z_0 byl středem, musí poslední rovnice býti centralnou, t. j. musí

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial z_0} = 0,$$

tedy, krátivše 2, musí

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Tyto rovnice stanoví střed; lze-li jim nějakými hodnotami x_0, y_0, z_0 vyhověti, má plocha střed, ne-li, pak nemá středu; v případě prvním máme, volivše x_0, y_0, z_0 za střed nových rovnoběžných os x', y', z' transformovanou rovnici plochy

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

(Pokračování.)