Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Mařík

Odhad prosté hodnoty integrálů a kriteria pro konvergenci nevlastních integrálů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 4, D49–D52

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122810`

$\overline{SN} = \overline{{}^1S^1N}$ na $r \parallel C'C''$; bodem ${}^1N$ vedená přímka ${}^1N^2N \parallel {}^1V^1S$ dává bod ${}^2N$ a $\overline{{}^2N^1V} = \overline{SK'}$.

Chceme-li obdobu pro shodné a souosé paraboly o ose p (obr. 3), vytkneme si bod δ a od něho ve vzdálenosti parametru kolmici d k ose. Kolmici n v bodě K bez rýsování pomocných čar vyhledáme takto: Naměříme vzdálenost bodu K od d, naneseme od δ na p do bodu N a $\overline{NK}$ je žádaná normála křivky k, stejně pro křivku *1* stanovena v *1* normála. Chceme-li v bodě *3* sestrojiti normálu, učiníme $\overline{3\delta}$ rovné vzdálenosti přímky r od d; V, R jsou žádané paty.

Je-li na příklad dána elipsoidální klenba o líci v ploše ε (obr. 4), sestrojíme si kdekoliv redukční úhly ${}^1\varphi$ o vrcholu ${}^1V$ pro poměr ${}^1\lambda = \overline{U_1S_1} : \overline{MS_1}$ a ${}^2\varphi$ o vrcholu ${}^2V$ pro poměr ${}^2\lambda = \overline{U_2S_2} : \overline{PS_2}$, kde M a P jsou středy hlavních křivostí řezů m a p. Pro bod K vyšetříme normálu tím, že na m_2 od S_2 do bodu *2* naneseme na ${}^2\varphi$ redukovanou vzdálenost $K_2 \dashv o_2$ a na p_1 od S_1 do bodu *1* na úhlu ${}^1\varphi$ redukovanou vzdálenost $K_1 \dashv o_1$. $1K_1$ je půdorys, $2K_2$ je nárys požadované normály. Nárys i půdorys lze stanoviti neodvisle; tak byl pro bod O plochy ε sestrojen pouze nárys $3O_2$ za pomoci redukčního úhlu ${}^2\varphi$.

Uvedené konstrukce jsou výhodné zejména tím, že jsou velmi stručné a nezatěžují nákresnu pomocnými čarami vůbec.

Odhad prosté hodnoty integrálů a kriteria pro konvergenci nevlastních integrálů.

Jan Mařík, Praha.

Úvod. Mějme reálnou funkci f, definovanou v intervalu $\langle a, b \rangle$. Systém čísel $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ (n je přirozené číslo ≥ 1), splňující vztah $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, nazveme dělením intervalu $\langle a, b \rangle$. Každému dělení přiřaďme číslo $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Je-li množina těchto čísel shora ohraničená, řekneme, že funkce f má v $\langle a, b \rangle$ konečnou variaci. Supremum té množiny označíme $V(a, b)$ a nazveme je variací f v $\langle a, b \rangle$. Podobně definujeme $V(x_1, x_2)$, kde $a < x_1 < x_2 < b$. Bez důkazu uvádím, že platí $V(a, x_1) + V(x_1, x_2) = V(a, x_2)$. Je tedy $V(a, x)$ neklesající funkcí proměnné x. Dále uvádím bez důkazu, že funkce s konečnou variací v $\langle a, b \rangle$ má tam integrál Cauchy-Riemannův.

Věta 1. *Mějme interval $\langle a, b \rangle$. V tomto intervalu mějme reálné funkce f, g; funkci f integrovatelnou a funkci g s kon. variací V. Pak* *existuje ξ, $a \leqq \xi \leqq b$, tak, že platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq (V + |g(b)|)\,.\left|\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right|. \qquad (\alpha)$$

Důkaz. Utvořme dělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$; označme $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ a utvořme součet $s = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,g(x_k)\,\Delta_k$.

Označme dále $f(x_k)\,.\,\Delta_k = \alpha_k$, $g(x_k) = \beta_k$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i$. Pak platí

$$s = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = \sum_{k=1}^{n}(\sigma_k - \sigma_{k-1})\,\beta_k = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k\beta_k - \sum_{k=2}^{n}\sigma_{k-1}\beta_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sigma_k\beta_k - \sum_{k'=1}^{n-1}\sigma_{k'}\beta_{k'+1} = \sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + \sigma_n\beta_n.$$

Existuje index j, $1 \leqq j \leqq n$, že platí $|\sigma_j| \geqq |\sigma_k|$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Pak platí

$$|s| \leqq |\sigma_j| \left(\sum_{k=1}^{n-1}|\beta_k - \beta_{k+1}| + |\beta_n|\right). \qquad (\beta)$$

Označme ještě $M_k = \sup_{x_{k-1} \leqq x \leqq x_k} f(x)$ a podobně definujme m_k. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{j} m_k\,\Delta_k \leqq \sigma_j \leqq \sum_{k=1}^{j} M_k\Delta_k$$

a také

$$\sum_{k=1}^{j} m_k\Delta_k \leqq \int_a^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \sum_{k=1}^{j} M_k\Delta_k$$

a tedy

$$\left|\sigma_j - \int_a^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \sum_{k=1}^{j}(M_k - m_k)\,\Delta_k \leqq \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\,\Delta_k.$$

Označme $\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\,\Delta_k = \Omega$. Pak platí $|\sigma_j| \leqq \left|\int_a^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \Omega$. Protože je integrál a tudíž i jeho prostá hodnota spojitou funkcí horní meze, existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $\left|\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geqq \left|\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. Je tedy $|\sigma_j| \leqq \left|\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \Omega$. Dosazením do (β) dostáváme (platí totiž také $\sum_{k=1}^{n-1}|\beta_k - \beta_{k+1}| \leqq V$)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,g(x_k)\,\Delta_k\right| \leqq \left(\left|\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \Omega\right).\,(V + |g(b)|). \qquad (\gamma)$$

To platí pro každé dělení; číslo ξ na dělení nezávisí. Utvořme posloupnost dělení tak, aby každý interval m-tého dělení měl délku $\frac{b-a}{m}$. Nerovnost (γ) pak platí i pro limitu, čímž je dokázáno (α).

Věta 1a. *Buďte a, b komplexní čísla. Mějme v komplexní rovině spojitou křivku K konečné délky o koncových bodech a, b. Na této křivce buďte definovány spojité komplexní funkce f, g. Nechť g, zobrazuje K na křivku délky V. Pak existuje $\xi \in K$ tak, že platí (α), integrace se ovšem provádí po křivce K.*

Důkaz přenechávám čtenáři. Délku křivky definujeme ošem jako supremum výrazu $\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|$ pro všechna dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta 2. *Mějme interval $\langle a, b)$; též může být $b = \infty$. V tomto intervalu mějme reálné funkce f, g. Nechť pro každé c, $a < c < b$, existuje vlastní integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Mějme číslo B tak, že v každém intervalu $\langle a, c\rangle$ má g konečnou variaci $V(a, c)$ a že platí $V(a, c) < B$. Nechť existuje vlastní nebo nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak existuje též vlastní nebo nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz: Platí $|g(a) - g(c)| \leqq V(a, c) < B$, tedy $|g(c)| < |g(a)| + B$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, existuje $c_0 < b$ tak, že $c_0 < x_1 < x_2 < b \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{|g(a)| + 2B}$. Podle věty 1 pak existuje ξ, $c_0 < x_1 \leqq \xi \leqq x_2 < b$, tak, že platí

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq (V(x_1, x_2) + |g(x_2)|)\cdot\left|\int_{x_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| <$$

$$< (B + |g(a)| + B)\cdot\frac{\varepsilon}{|g(a)| + 2B} = \varepsilon.$$

Je tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci integrálu.

Věta 3. *Mějme interval $\langle a, b)$; též může být $b = \infty$. V tomto intervalu mějme reálné funkce f, g. Mějme číslo A tak, že pro každé c, $a < c < b$, existuje vlastní integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí $\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| < A$. Mějme číslo B tak, že v každém intervalu $\langle a, c\rangle$, $a < c < b$, má g*

konečnou variaci $V(a, c)$ *a platí* $V(a, c) < B$. *Budiž* $\lim\limits_{x \to b-} g(x) = 0$ (*resp.* $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$). *Pak existuje vlastní nebo nevlastní integrál* $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$.

Důkaz. (Výraz lim znamená buď $\lim\limits_{x \to b-}$ nebo $\lim\limits_{x \to \infty}$.) Protože je $V(a, x)$ neklesající a ohraničená funkce x, existuje $\lim V(a, x) = \sup V(a, x)$; označíme je V. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $c_1 < b$ tak, že $c_1 < x < b \Rightarrow V - V(a, x) < \frac{\varepsilon}{4A}$. Protože jest $\lim g(x) = 0$, existuje $c_2 < b$ tak, že $c_2 < x < b \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4A}$. Budiž $c_0 = \max(c_1, c_2)$. Pak $c_0 < x_1 < x_2 < b \Rightarrow$ existuje ξ, že platí $x_1 \leqq \xi \leqq x_2$,

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqq (V(x_1, x_2) + |g(x_2)|) \cdot \left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)\, \mathrm{d}x\right|.$$

Platí $0 \leqq V(x_1, x_2) = V(a, x_2) - V(a, x_1) \leqq V - V(a, x_1) < \frac{\varepsilon}{4A}$. Rovněž platí $|g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4A}$, tedy $V(x_1, x_2) + |g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2A}$. Dále jest $\left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)\, \mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^{\xi} f(x)\, \mathrm{d}x - \int\limits_a^{x_1} f(x)\, \mathrm{d}x\right| < 2A$. Násobením nerovností dostáváme $\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. Je tedy opět splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci integrálu.

Dvě eliptické kubatury.

Dr **Vladimír Ryšavý**, Praha.

Uvádíme dva příklady kubatury těles obsahující integrály eliptických funkcí.

A) Určiti objem tělesa uzavřeného obalovou plochou koulí, jejichž středy leží na elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a jež jdou počátkem.

Rovnice plochy jest

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4\,(a^2x^2 + b^2y^2),$$

ve sférických souřadnicích