Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O různoběžníku opsaném kružnici.*)

Pojednává
Vavř. Jelínek,
prof. v Novém Městě u Vídně.

Následující úvahy buďtež doplňkem pojednání „O lichoběžníku opsaném kružnici", započatém na str. 132., ročn. XXIII. tohoto časopisu.

Upozornivše na vztahy mezi stranami protilehlými:

$$a + b = c + d,$$

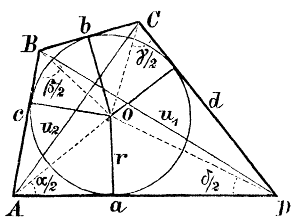
a stranami protínajícími se:

$$a - c = d - b, \quad a - d = c - b,$$

pak na vztahy mezi úhly $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$, tedy:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^0 - \frac{1}{2}(\gamma + \delta), \ \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 180^0 - \frac{1}{2}(\beta + \delta),$$

pojednáme napřed o vztazích mezi přímkami a úhly a pak o ploše tohoto čtyřúhelníka.



Obr. 1.

A. I. Z trojúhelníka AOD (obr. 1.) vychází:

*) Srovnej: Wilh. Binder, Zur Theorie des ebenen Tangentenviereckes. Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht. XXIV., 1893.

$$a = r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\delta}{2}\right) = r\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{\delta}{2}}\;;$$

tedy

$$(1)\qquad a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2} = r\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta) = r\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

a podobně z druhých středových trojúhelníků:

$$b\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = r\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = r\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta),$$

$$c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = r\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = r\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta),$$

$$d\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2} = r\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta) = r\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Z rovnic těchto následují vztahy mezi protilehlými stranami a k nim přilehlými úhly:

$$(2)\qquad \begin{aligned} a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2} &= b\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\\ c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} &= d\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

pak vztahy mezi dvěma protínajícími se stranami a třemi k nim přilehlými úhly:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) &= c\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta),\\ a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta) &= d\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta),\\ b\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) &= c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma),\\ b\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta) &= d\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma). \end{aligned}$$

a) **Ježto opsaný různoběžník jest určen čtyřmi svými prvky a třemi obvodovými úhly i čtvrtý jest dán, užijeme rovnic**

(2), (3) ku vypočítávání stran tohoto čtyřúhelníka, známe-li *tři jeho úhly a jednu stranu.*

Součinem rovnic (2) obdržíme vztahy mezi protilehlými úhly a součiny je svírajících stran:

$$(4)\qquad \begin{aligned} ac \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= bd \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \\ ad \sin^2 \frac{\delta}{2} &= bc \sin^2 \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Součin pak dvou a dvou z rovnic (3) dá vztah mezi součiny protilehlých stran a úhly přilehlými k těmto stranám:

$$(5)\qquad \begin{aligned} ab \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= cd \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = cd \sin^2 \frac{1}{2}(\beta + \gamma), \\ ab \sin^2 \frac{1}{2}(\gamma + \delta) &= cd \sin^2 \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = cd \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \delta). \end{aligned}$$

b) Rovnic (4) a (5) užijeme, vypočítávajíce úhly různoběžníka, jehož *jeden úhel a tři strany* známe, ježto pak i čtvrtou stranu můžeme považovati jakožto známou. Je-li na př. dán úhel α, obdržíme z první rovnice (4) úhel γ; oba tyto úhly pak dosadíme do první z rovnic (5) a vypočítáme β, neb do druhé z rovnic (5) a najdeme δ.

Tytéž rovnice slouží také k řešení čtyřúhelníka, jehož *dva protilehlé úhly* (α, γ) *a dvě strany* jsou dány.

c) *Leží-li tyto dvě strany* (a, b) *proti sobě*, najdeme dle rovnic (4) obě druhé strany takto:

Ježto $d = a + b - c$, zní první z rovnice (4)

$$ac \sin^2 \frac{\alpha}{2} = b(a + b - c) \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

z níž vychází třetí strana

$$c = \frac{b\,(a + b) \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

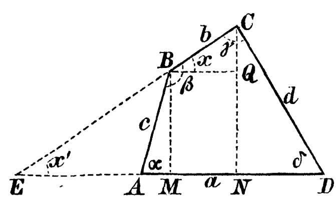
Z téže rovnice (4) nabudeme, dosadivše $c = a + b - d$, čtvrtou stranu

$$d = \frac{a(a+b)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{a\sin^2\frac{\alpha}{2} + b\sin^2\frac{\gamma}{2}}.$$

d) Svírají-li dané strany (a, d) některý z obou neznámých úhlů, dosadíme zase do první z rovnice (4) poprvé $c = a + b - d$, podruhé $b = c + d - a$ a obdržíme

$$b = \frac{a(a-d)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{d\sin^2\frac{\gamma}{2} - a\sin^2\frac{\alpha}{2}}, \quad c = \frac{d(a-d)\sin^2\frac{\gamma}{2}}{d\sin^2\frac{\gamma}{2} - a\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Jiný vztah mezi stranami a úhly opsaného čtyřúhelníka vyjde z věty: „Kterákoli strana libovolného čtyřúhelníka se rovná součtu z průmětů ostatních stran na stranu první.“



Obr. 2.

Je-li totiž v obr. 2. BM ⊥ AD, CN ⊥ AD a BQ || AD, shledáme, že AD = MN + AM + ND, aneb, ježto úhel

$$x = x' = 180^0 - (\gamma + \delta),$$

$$(6) \qquad a = -b\cos(\gamma + \delta) + c\cos\alpha + d\cos\delta.$$

Ve čtyřúhelníku opsaném jest však také

$$a = -b + c + d;$$

tedy

$$-b\cos(\gamma + \delta) + c\cos\alpha + d\cos\delta = -b + c + d,$$

neb

$$b[1 - \cos(\gamma + \delta)] = c(1 - \cos\alpha) + d(1 - \cos\delta)$$

a konečně

$$b \sin^2 \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = c \sin^2 \frac{\alpha}{2} + d \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Také z druhé rovnice (5) nabudeme

$$b \sin^2 \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = \frac{cd}{a} \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

a spojíme-li obě tyto hodnoty rovnicí, obdržíme vztah mezi třemi stranami a dvěma úhly k jedné této straně přilehlými:

$$(7) \qquad ac \sin^2 \frac{\alpha}{2} + ad \sin^2 \frac{\delta}{2} = cd \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

a podobně

$$bc \sin^2 \frac{\beta}{2} + bd \sin^2 \frac{\gamma}{2} = cd \sin^2 \frac{1}{2}(\beta + \gamma),$$

$$ac \sin^2 \frac{\alpha}{2} + bc \sin^2 \frac{\beta}{2} = ab \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

$$ad \sin^2 \frac{\delta}{2} + bd \sin^2 \frac{\gamma}{2} = ab \sin^2 \frac{1}{2}(\gamma + \delta).$$

Rovnic těchto užijeme, řešíce čtyřúhelník opsaný, jsou-li dány *dva sousední úhly* (α, δ) *a dvě strany.*

e) Leží-li tyto *strany* (c, d) *proti sobě,* obdržíme z první těchto rovnic

$$a = \frac{cd \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \delta)}{c \sin^2 \frac{\alpha}{2} + d \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

a pak $b = (c + d) - a$.

f) Svírají-li dané strany (a, c) *jeden daný úhel* (α), najdeme zase z první rovnic (7)

$$d = \frac{ac \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{c \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \delta) - a \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

a čtvrtou stranu z rovnice $a + b = c + d$.

V případech *c*), *d*), *e*) a *f*) najdeme neznámé úhly dle rovnic (5), dosadivše do nich dané úhly a dané i vypočítané strany.

(Mají-li dané strany k daným úhlům jiné polohy než v projednaných případech, rovnice (4) a (7) přecházejí v rovnice druhého stupně a vzorce pro neznámé strany jsou pak nepohodlné).

II. Vzorce k vypočítávání poloměru r z jedné strany a obou k ní přilehlých úhlů najdeme dle rovnic (1), na př.:

$$r = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta)}. \tag{8}$$

Jsou-li dány dvě protilehlé strany (a, b) a úhly (α, β) přilehlé k jedné neznámé straně (c), vyjádříme poloměr r napřed touto neznámou stranou dle třetí z rovnic (1),

$$r = \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

a dosadivše pak

$$c = \frac{ab \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

ze třetí z rovnic (7), najdeme

$$r = ab \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \tag{9}$$

Jak vypočítati jest r, jsou-li dány dvě protilehlé strany (a, b) a dva protilehlé úhly (α, γ), ukazuje níže uvedený vzorec (20).

III. Znamená-li u_1 úhlopříčnu, ležící proti úhlu α, a u_2 úhlopříčnu proti úhlu β, platí pro každý čtyřúhelník

$$u_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha,$$
$$u_2^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\beta;$$

tedy součtem

$$u_1^2 + u_2^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c(a\cos\alpha + b\cos\beta).$$

Ježto dle věty vyjádřené rovnicí (6) jest

$$a\cos\alpha + b\cos\beta = c + d\cos(\alpha + \delta),$$

vychází, že

$$u_1^2 + u_2^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c[c + d\cos(\alpha + \delta)];$$

tudíž

$$u_1^2 + u_2^2 = a^2 + b^2 - 2cd\cos(\alpha + \delta) = a^2 + b^2 = 2cd\cos(\beta + \gamma).$$

Poněvadž v opsaném čtyřúhelníku jest $b = c + d - a$, obdržíme postupně

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= a^2 + (c + d - a)^2 - 2cd\cos(\alpha + \delta), \\ &= a^2 + c^2 + d^2 + a^2 + 2cd - 2ac - 2ad \\ &\quad - 2cd\cos(\alpha + \delta), \\ &= (a^2 - 2ac + c^2) + (a^2 - 2ad + d^2) \\ &\quad + 2cd[1 - \cos(\alpha + \delta)], \end{aligned}$$

$$(10) \quad u_1^2 + u_2^2 = (a - c)^2 + (a - d)^2 + 4cd\sin^2\frac{1}{2}(\alpha + \delta)$$
$$= (a - c)^2 + (a - d^2) + 4cd\sin^2\frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Podobným způsobem vyvineme z rovnic

$$u_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha,$$
$$u_2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\delta$$

napřed pro obecný čtyřúhelník:

$$u_1^2 + u_2^2 = c^2 + d^2 - 2ab\cos(\gamma + \delta) = c^2 + d^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta)$$

a pak pro čtyřúhelník opsaný:

$$(10) \quad u_1^2 + u_2^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + 4ab\sin^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$
$$= (a - c)^2 + (b - c)^2 + 4ab\sin^2\frac{1}{2}(\gamma + \delta).$$

Je-li opsaný čtyřúhelník deltoidem, jest $a = d$, $b = c$, a tedy

$$u_1^2 + u_2^2 = (a - c)^2 + 4ac \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \delta),$$

$$u_1^2 + u_2^2 = (d - b)^2 + 4bd \sin^2 \frac{1}{2} (\gamma + \delta).$$

V opsaném lichoběžníku o půdicích $a \parallel b$ jest $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^0$; pro tento tedy platí

$$u_1^2 + u_2^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + 4ab.$$

Dáme-li zde $(d - b)$ místo $(a - c)$, obdržíme, zmocníce oba dvojčleny,

$$u_1^2 + u_2^2 = d^2 - 2bd + 2b^2 - 2bc + c^2 + 4ab,$$
$$u_1^2 + u_2^2 = c^2 + d^2 + 2b(b - c - d) + 4ab;$$

a poněvadž $b - c - d = - a$, setkáme se s rovnicí

$$u_1^2 + u_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab,$$

kterou jsme jiným způsobem vyvinuli na str. 182, ročníku 23.

B. Obecně známé vzorce pro plochu P čtyřúhelníka opsaného kružnici jsou

$$\text{(11)} \qquad P = r(a + b) = r(c + d),$$

$$\text{(12)} \qquad P = r^2 \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} + \cot \frac{\delta}{2}\right).$$

I. Rovnice tyto přizpůsobíme rozličným případům takto:

Z rovnice (11) obdržíme, nahradíme-li v ní po každé jednu stranu poloměrem, řídíce se dle rovnic (1):

$$\text{(13)} \quad P = ar + r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma)}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = br + r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \delta)}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\delta}{2}},$$

$$= cr + r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} (\gamma + \delta)}{\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}} = dr + r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}};$$

nebo zaměníme-li dle těchže rovnic v (1) poloměr stranami:

$$(14)\quad P = a(a+b)\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)} = b(a+b)\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)},$$

$$= c(c+d)\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = d(c+d)\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)};$$

aneb dosadíme-li hodnotu pro r z rovnice (9):

$$(15)\quad P = ab(a+b)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{a\sin^2\frac{\alpha}{2}+b\sin^2\frac{\beta}{2}};$$

čili podobně

$$P = ab(a+b)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{a\sin^2\frac{\delta}{2}+b\sin^2\frac{\gamma}{2}},$$

$$= cd(c+d)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{c\sin^2\frac{\alpha}{2}+d\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

$$= cd(c+d)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{c\sin^2\frac{\beta}{2}+d\sin^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Pro logarithmické vyčíslení vzorce (12) sečteme čtyřčlen cotangent takto:

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}$$

$$= \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}}.$$

V součtu

$$S = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}$$

jest $\sin \frac{\delta}{2} = \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma)$. Vyjádříme-li tedy tuto funkci funkcemi jednotlivých úhlů, nabudeme

$$S = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$
$$- \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$
$$+ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

a sečteme-li zde napřed jen první a třetí člen, kladouce při tom $1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, najdeme

$$S = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$
$$+ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

pak

$$S = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \left(\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right)$$
$$+ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \left(\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right)$$

a konečně

$$S = \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) = \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \delta).$$

Jest tedy

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}$$

a dle rovnice v (12)

$$(16)\qquad P=r^2\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}.$$

II. Součet ploch obou trojúhelníků, ve které tento čtyřúhelník rozdělen jest úhlopříčnou u_1, lze vyjádřiti:

$$P=\frac{1}{2}(ac\sin\alpha+bd\sin\gamma)=ac\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+bd\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ježto pak z rovnice (4) vychází, že

$$bd=\frac{ac\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}},$$

jest

$$P=ac\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)$$

$$=ac\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

a

$$(17)\qquad P=ac\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

nebo podobně

$$P = bd \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Tímž způsobem obdržíme z

$$P = \frac{1}{2} (bc \sin \beta + ad \sin \delta)$$

vzorce pro plochu

$$P = bc \sin \frac{1}{2} (\beta - \delta) \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} = ad \sin \frac{1}{2} (\beta + \delta) \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Součin prvních dvou nebo posledních dvou rovnic v (17) dá

$$(18) \qquad P = \sqrt{abcd} \,.\, \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma),$$

a jestli tento čtyřúhelník zároveň jiné kružnici vepsán

$$P = \sqrt{abcd}.$$

Najdeme-li z první rovnic (4) strany

$$c = \frac{b(a+b) \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\gamma}{2}}, \quad b = \frac{c(c+d) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{c \sin^2 \frac{\alpha}{2} + d \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

a dosadíme-li první hodnotu do prvního ze vzorců (17), druhou do druhého vzorce, najdeme

$$(19) \qquad P = ab(a+b) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

$$= cd(c+d) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{c \sin^2 \frac{\alpha}{2} + d \sin^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

Kdybychom pro změnu obou posledních vzorců (17) podobně užili druhé z rovnic (4), našli bychom

$$P = ab(a + b) \sin \frac{1}{2}(\beta + \delta) \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2}}{a \sin^2 \frac{\delta}{2} + b \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$= cd(c + d) \sin \frac{1}{2}(\beta + \delta) \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2}}{c \sin^2 \frac{\beta}{2} + d \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Srovnáním těchto výrazů pro plochu se vzorci (11) vyjde vzorec

$$(20) \qquad r = ab \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

atd.

Vyjádříme-li dále dle první z rovnic (4) stranu c stranami a a d, neb stranu d stranami b a c, a dosadíme-li nabyté hodnoty do prvních dvou z rovnic (17), shledáme, že

$$(21) \qquad P = ad(a - d) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{d \sin^2 \frac{\gamma}{2} - a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= bc(c - b) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{b \sin^2 \frac{\gamma}{2} - c \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Podobným způsobem obdržíme z druhé rovnic (4) a z obou posledních vzorců (17):

$$P = ac(a - c) \sin \frac{1}{2}(\beta + \delta) \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2}}{c \sin^2 \frac{\beta}{2} - a \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$= bd(b - d) \sin \frac{1}{2}(\beta + \delta) \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2}}{d \sin^2 \frac{\delta}{2} - b \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Kdybychom dle rovnic (3) vyjádřili v každé z rovnic (17) jednu stranu stranou druhou, obdrželi bychom tyto vzorce pro plochu:

$$(22)\quad P = a^2 \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)} \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$= b^2 \frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma),$$

$$= c^2 \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$= d^2 \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)} \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma).$$

Vzorec pro plochu čtyřúhelníka, daného poloměrem vepsané kružnice a obvodovými úhly, který jsme již v (16) přímo stanovili, vyvineme krátce buď z rovnice (17) nebo ze kterékoli rovnice (22), zaměníme-li v ní dle rovnic (1) strany poloměrem.

Touto záměnou přejde na př. první z rovnic (22) ve tvar

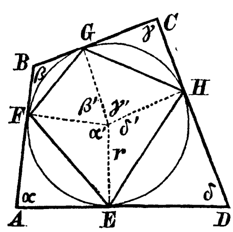
$$P = r^2 \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\delta}{2}} .$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)} . \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma),$$

čili

$$P = r^2 \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}.$$

III. Srovnejme ještě tuto plochu P s plochou p čtyřúhelníka do téže kružnice vepsaného, jehož strany spojují body, v nichž strany opsaného se dotýkají kružnice.



Obr. 3.

Znamenají-li α', β', γ', δ' středové úhly čtyřúhelníka vepsaného EFGH (obr. 3.), ležící proti jeho stranám a proti stejnojmenným obvodovým úhlům α, β, γ, δ čtyřúhelníka opsaného, najdeme postupně

$$\begin{aligned}
p &= \frac{r^2}{2}(\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma' + \sin\delta') \\
&= \frac{r^2}{2}[\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma' - \sin(\alpha'+\beta'+\gamma')] \\
&= r^2\,[\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\beta') - \cos\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+2\gamma') \\
&\qquad . \sin\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')] \\
&= r^2\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')[\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\beta') - \cos\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+2\gamma')] \\
&= 2r^2\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')\sin\frac{1}{2}(\beta'+\gamma') \\
&= 2r^2\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\delta').
\end{aligned}$$

Poněvadž pak

$$\frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = 180^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \text{ a t. d.,}$$

jest

$$p = 2r^2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \sin\frac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

a se zřetelem k rovnici (16)

$$p = 2\mathrm{P} \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\delta}{2}. \tag{23}$$

O některých vzorcích goniometrických.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot,**

s. professor v Praze.

Mnohé úlohy, zejmena geometrické, mohou různými způsoby býti řešeny. Jest-li že úlohy takové připouští řešení jednoznačné, pak ovšem výsledky, jichž se doděláme, musí býti identické. V tom spočívá pak důležitý způsob, jakým možno zjednati si množství vztahů identických.

V následujícím chceme ukázati, jak možno vyvinouti různým řešením trojúhelníků některé vztahy goniometrické týkající se úhlů, jichž součet rovná se 180^0.

Vztahy ty lze snadno nalézti ze známé úlohy jak řešiti trojúhelník, dány-li jsou jeho úhly a poloměr kružnice opsané aneb vepsané.

Označme vrcholy trojúhelníka písmenami A, B, C; strany nechť jsou a, b, c, úhly α, β, γ, poloměr kružnice opsané R, vepsané r, obvod s a plocha p.

I. Stanovme plochu p, je-li dáno R, α, β, γ.

Plochu trojúhelníka můžeme stanoviti dvojím způsobem; buď dle relace

$$p = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

aneb tak, že ji vyjádříme jakožto součet tří trojúhelníků rovno-