Vilém Jung

Poznámka k číslům Bernoulliho

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 9 (1880), No. 3, 103--108

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122871

základními obyčejně slují; neb užíváním jeho přicházíme k důležitým výsledkům i v theorii i v praksi.

Jak dříve bylo již ukázáno, odvozeny při zvláštních případech vzorce (3) a (5) a stejným postupem jest možná vyvésti i vzorec všeobecný, jejž symbolicky vyjadřujeme rovninou

$$\Delta' = \Delta^{n-1},$$

značí-li $\Delta'$ determinant přidružený a $\Delta$ determinant původní stupně $n$-tého.

Co do stránky praktické možná vzorce transformačního prospěšně užiti k vyčíslení hodnoty determinantu, zejména je-li stupně vyššího. Již při determinantu stupně pátého jeví se tato výhodnost jeho; neb obyčejným rozkladem v součet součinů, kdež první činitel jest determinantem stupně druhého, druhý pak stupně třetího, obdrželi bychom *deset* determinantů druhého a taktéž *deset* determinantů třetího stupně, kdežto užitím vzorce (4) jen *jeden* determinant stupně druhého a *devět* determinantů stupně třetího třeba vyčísliti. Při determinantu stupně *šestého* vyžaduje se podle téhož vzorce (4) jen *šestnácte* determinantů stupně třetího, kdežto obyčejný vzorec rozkladný jich předpokládá *čtyřicet*.*)

---

# Poznámka k číslům Bernoulliho.

Podal

V. Jung v Pardubicích.

1. Při rozvinování nižších funkcí transcendentních $tgx$ a $cotx$ v nekonečné řady dle stoupajících mocností oblouku $x$ přicházíme na tak zvaná čísla Bernoulliho,*) jež podléhají zajímavým rovnicím rekurrentním.

Ze známých vzorců:

$$sinx = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots in\ inf.\ldots \quad (1)$$

*) Toto odvození vzorce (7) uveřejnil jsem poprvé v „Sitzungsber. d. kön. b. Ges. d. Wiss.“ 28. Nov. 1879.

*) Viz „Herr“: Höhere Mathematik. II. Band. pag. 168—170. (1864) aneb „Schlömilch“: Handbuch der höheren Analysis. pag. 211. (1862).

$$cosx = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \quad (2)$$

plyne logarithmováním a nápotomnou derivací podlé oblouku

$$x : cotx = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\pi^2} - \frac{2x}{\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)2^2\pi^2} - \frac{2x}{\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)3^2\pi^2}\cdots \quad (3)$$

$$tgx = \frac{2^3x}{\left(1 - \frac{2^2x^2}{\pi^2}\right)\pi^2} + \frac{2^3x}{\left(1 - \frac{2^2x^2}{3^2\pi^2}\right)3^2\pi^2} + \frac{2^3x}{\left(1 - \frac{2^2x^2}{5^2\pi^2}\right)5^2\pi^2}\cdots \quad (4)$$

Podlé vzorců:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)r^2\pi^2} = \frac{1}{r^2\pi^2} + \frac{x^2}{r^4\pi^4} + \frac{x^4}{r^6\pi^6} + \cdots$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2^2x^2}{r^2\pi^2}\right)r^2\pi^2} = \frac{1}{r^2\pi^2} + \frac{2^2x^2}{r^4\pi^4} + \frac{2^4x^4}{r^6\pi^6} + \cdots$$

možno (3) a (4) takto napsati:

$$\begin{aligned} cotx = \frac{1}{x} &- \frac{2x}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \\ &- \frac{2x^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right) \\ &- \frac{2x^5}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} tgx = &\frac{2^3x}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right) \\ &+ \frac{2^5x}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots\right) \\ &+ \frac{2^7x}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (6)$$

Uvážíme-li však, že

$$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}\left(\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right)$$

možno psáti (6) formou:

$$\begin{aligned} tgx = & \frac{(2^2-1)\,2x}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right) \\ & +\frac{(2^4-1)\,2x^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right) \\ & +\frac{(2^6-1)\,2x^5}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Položíme-li v (5) a (7) obecně

$$\frac{2}{\pi^{2n}}\left(\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots in\,inf\right)=\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n-1}$$

t. j. $\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots in\,inf=\frac{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}{(2n)!}B_{2n-1}$,

obdržíme

$$cotx=\frac{1}{x}-\frac{2^2}{2!}B_1 x-\frac{2^4}{4!}B_3\,x^3-\frac{2^6}{6!}B_5\,x^5\ldots \tag{8}$$

$$\text{pro } x\begin{cases} > -\pi \\ < +\pi \end{cases}$$

$$tgx=\frac{2^2}{2!}(2^2-1)\,B_1\,x+\frac{2^4}{4!}(2^4-1)\,B_3\,x^3+\ldots \tag{9}$$

$$\text{pro } x\begin{cases} > -\frac{\pi}{2} \\ < +\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Čísla $B_1$, $B_3$, $B_5$, $B_7$, ... $B_{2n-1}$, ... jsou čísly konečnými a určitými, jelikož obecně řada $\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots$ konverguje,*) a nazývají se čísly Bernoulli-ho.

Patrno, že

$$cos\,x=\frac{sinx}{x}\left(1-\frac{2^2}{4!}B_1 x^2-\frac{2^4}{6!}B_3 x^4-\frac{2^6}{6!}B_5 x^6-\ldots\right)$$

to jest

$$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)=\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right)\left(1-\frac{2^2}{2!}B_1 x^2-.\right)$$

---

*) Viz *Studnička* „Algebraické tvarosloví" pag. 116.

z čehož porovnáním vyplývá:

$$\frac{2^2}{2!}B_1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 0$$

$$\frac{2^4}{4!}B_3 - \frac{1}{3!}\frac{2^2}{2!}B_1 + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = 0$$

$$\frac{2^6}{6!}B_5 - \frac{1}{3!}\frac{2^4}{4!}B_3 + \frac{1}{5!}\frac{2^2}{2!}B_1 - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n-1} - \frac{1}{3!}\frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!}B_{2n-3} + \frac{1}{5!}\frac{2^{2n-4}}{(2n-4)!}B_{2n-5} - \ldots$$

$$\ldots + (1)^{n+1}\frac{1}{(2n-2)!}\frac{2^2}{2!}B_1 - (1)^{n+1}\frac{1}{2n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2. Chci nyní ukázati na jistá čísla $C_1$, $C_3$, $C_5$, . . $C_{2n-1}$ . . jež souvisí s čísly Bernoulli-ho (jsouť jich určitými násobky) a vyhovují taktéž rovnicím rekurrentním rázu však mnohem pravidelnějšího a pro paměť výhodnějšího než zmíněná čísla $B_1$, $B_3$, $B_5$, . . . $B_{2n-1}$, . . .

Položíme-li totiž v (5) a (7)

$$\frac{2(2^{2n}-1)}{\pi^{2n}}\left(\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\right) = \frac{2^{2n}}{(2n)!}C_{2n-1}$$

$$\text{t. j.}\quad \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2^{2n}-1)2n!}C_{2n-1}$$

pak bude

$$tg\,x = \frac{2^2}{2!}C_1 x + \frac{2^4}{4!}C_3 x^3 + \frac{2^6}{6!}C_5 x^5 + \ldots \quad (8)'$$

$$\text{pro } x \begin{cases} > -\frac{\pi}{2} \\ < +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{a } cot\,x = \frac{1}{x} - \frac{2^2}{(2^2-1)2!}C_1 x - \frac{2^4}{(2^4-1)4!}C_3 x^3 - \frac{2^6}{(2^6-1)6!}C_5 x^5 - \ldots (9)'$$

$$\text{pro } x \begin{cases} > -\pi \\ < +\pi \end{cases}$$

Z (8)' plyne:

$$sin\, x = cos\, x \left(\frac{2^2}{2!} C_1\, x + \frac{2^4}{4!} C_3\, x^3 + \frac{2^6}{6!} C_5\, x^5 + \ldots\right)$$

to jest

$$\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) \times$$
$$\left(\frac{2^2}{2!} C_1\, x + \frac{2^4}{4!} C_3\, x^3 + \frac{2^6}{6!} B_5\, x^5 + \ldots\right)$$

Následkem identity obou stran obdržíme:

$$\frac{1}{0!}\frac{2^2}{2!} C_1 = \frac{1}{1!}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{2^2}{2!} C_1 - \frac{1}{0!}\frac{2^4}{4!} C_3 = \frac{1}{3!}$$

$$\frac{1}{4!}\frac{2^2}{2!} C_1 - \frac{1}{2!}\frac{2^4}{4!} C_3 + \frac{1}{0!}\frac{2^6}{6!} C_5 = \frac{1}{5!}$$

$$\frac{1}{6!}\frac{2^2}{2!} C_1 - \frac{1}{4!}\frac{2^4}{4!} C_3 + \frac{1}{2!}\frac{2^6}{6!} C_5 - \frac{1}{0!}\frac{2^8}{8!} C_7 = \frac{1}{7!}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{1}{(2n)!}\frac{2^2}{2!} C_1 - \frac{1}{(2n-2)!}\frac{2^4}{4!} C_3 + \frac{1}{(2n-4)!}\frac{2^6}{6!} C_5$$
$$- \frac{1}{(2n-6)!}\frac{2^8}{8!} C_7 + \ldots + (1)^n \frac{1}{0!}\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} C_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

Toť velmi souměrné formule.

Dále patrno, že $C_{2n-1} = (2^{2n} - 1)\, B_{2n-1}$.

Čísla $C$ jsou určitá a konečná, jelikož obecně řada

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots.$$

konverguje, pro $2n > 1$.

Každý si snadno sestaví následující dosti důležité vzorce:

$$(10)\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{2n}} = \dfrac{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n-1} = \dfrac{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}{(2n)!\,(2^{2n}-1)} \cdot C_{2n-1} \\[2ex] \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k)^{2n}} = \dfrac{\pi^{2n}}{2\,.\,(2n)!} B_{2n-1} = \dfrac{\pi^{2n}}{2\,(2^{2n}-1)\,(2n)!} C_{2n-1} \\[2ex] \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k-1)^{2n}} = \dfrac{(2^{2n}-1)\,\pi^{2n}}{2\,.\,(2n)!} B_{2n-1} = \dfrac{\pi^{2n}}{2\,.\,(2n)!} C_{2n-1} \end{cases}$$

3. *Dodatek.*

Ze vzorců (3) a (4) plyne pro $x = \frac{\pi}{4}$.

$$1 = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{12^2-1} + \frac{1}{16^2-1} + \ldots\right)$$

$$1 = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{14^2-1} + \ldots\right)$$

t. j.

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3\,.\,5} + \frac{1}{7\,.\,9} + \frac{1}{11\,.\,13} + \frac{1}{13\,.\,15} + \ldots\right), \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{8} = \left(\frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{5\,.\,7} + \frac{1}{9\,.\,11} + \frac{1}{13\,.\,15} + \ldots\right). \quad (12)$$

Tyto řady konvergují, jak se snadno na základě Raabeho nebo Gaussova kriteria*) přesvědčíme, a to z počátku dosti rychle, v pozdějších však členech pranepatrně; za tou příčinou nelze jich užiti ku praktickému vypočtení čísla Ludolfského.**)

Jsou tedy pouze theoreticky zajímavy, jako na př. vzorec Walisův pro $\frac{\pi}{2}$, jsouce s ním, co se týká odvození, poněkud spříbuzněny.

Poněvadž možno čísla $B$, jakož i $C$ pomocí stávajících rekurrentních formulí vyčísliti, jest nám tím podána příležitosť pomocí formulí (10) vyjádřiti sudé mocnosti Ludolfského čísla pomocí nekonečných řad.

Tak ku př., jelikož $B_1 = \frac{1}{6}$, $C_1 = \frac{1}{2}$, plyne z (10) pro $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Známosť těchto vzorců bývá mnohdy prospěšná, na př. při integrování omezeném,***) jakož i v algebraické analysi.

---

*) ibid. pag. 122.

**) Ze vzorců (11) a (12) plyne spojením co vedlejší výsledek, že řada $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots$ konverguje, majíc za součet $\frac{1}{2}$; ibid. pag. 93.

***) Viz: Dr. „*Studničky*“ Základové vyšší mathematiky II. díl p. 115.