Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O irracionálnosti Ludolfiny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 5, 225--229

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122874`

O irracionálnosti Ludolfiny.

Dle Hermite-ových přednášek sestavil

prof. dr. F. J. Studnička.

Již v 1. seš. I. ročníku tohoto časopisu podal jsem na str. 35. ve článku „*O kvadratuře kruhu*“ stručnou zprávu o významu tohoto odvěkého úkolu s tím úmyslem, abych se co tehdejší redaktor vyhnul pozdějším o této nemožné věci výkladům a dopisům. V *algebraickém* pak svém *tvaroslov í všeobecném* dokázal jsem na str. 234. obvyklým spůsobem elementárním, totiž pomocí nekonečných řetězců pro

$$tg\frac{m}{n} \text{ a } \frac{x}{\sin x},$$

že číslo π a π^2 jest irracionalním.

Poněvadž poslední z trojice slavných problémů, jakouž představuje „*dupplatio cubi, trisectio anguli, quadratura circuli*“, takovýmto překvapujícím spůsobem byl řešen, neboli vlastně nemožným učiněn, jest i každý důkaz k tomu cíli vedoucí zajímavým, takže nebude od místa, uvedu-li a vyložím-li zde jiný důkaz, že číslo π nemůže býti racionálním, zlomkem tedy majícím konečného čitatele a jmenovatele.

Ve svých přednáškách, jež slavný *Ch. Hermite* odbýval r. 1882 na fakultě věd (faculté des sciences) v Paříži, provedl příslušný důkaz asi takto:

Složíme-li si funkci

$$X = \frac{\sin x}{x}$$

a zjednáme-li si pak postupným její derivováním a dělením podle vzorce

$$X_k = -\frac{1}{x} X'_{k-1}, \quad (k = 1, 2, 3 \ldots) \qquad (1)$$

řadu výrazů

$$X_1 = \frac{1}{x^3} (\sin x - x \cos x),$$

$$X_2 = \frac{1}{x^5} ([3 - x^2] \sin x - 3x \cos x),$$

$$X_3 = \frac{1}{x^7} ([15 - 6x^2] \sin x - [15x - x^3] \cos x),$$

$$X_4 = \frac{1}{X^9} ([105 - 45x^2 + x^4] \sin x - [105x - 10x^3] \cos x),$$

. . . .

poznáme, že tu všeobecně platí

$$X_n = \frac{1}{x^{2n+1}} (\varphi(x) \sin x - \psi(x) \cos x), \qquad (2)$$

kdež značí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ polynomy s *celistvými* koëficienty a sice

$$\varphi(x) = a_0 - a_2 x^2 + a_4 x^4 - \ldots,$$
$$\psi(x) = b_1 x - b_3 x^3 + b_5 x^5 - \ldots;$$

zároveň pak jest

$\varphi(x)$ stupně n-tého, $\psi(x)$ stupně $(n-1)$ho, jest-li n *sudé*,
„ „ $(n-1)$ho, „ „ n-tého, „ „ *liché.*

S druhé strany však obdrží se přímo výraz pro X_n, vyjádříme-li X známou řadou nekonečnou, totiž

$$X = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots;$$

budeť tu podle pravidla vzorcem (1) vyjádřeného, užijeme-li zároveň Krampova označení analytických fakult, totiž symbolu

$$a^{n,d} = a(a+d)(a+2d)\ldots(a+\overline{n-1}d),$$

postupně

$$X_1=\frac{2.1}{3!}-\frac{4x^2}{5!}+\frac{6x^4}{7!}-\ldots,$$

$$X_2=\frac{2^{2,2}.1}{5!}-\frac{4^{2,2}x^2}{7!}+\frac{6^{2,2}x^4}{9!}-\ldots,$$

$$X_3=\frac{2^{3,2}.1}{7!}-\frac{4^{3,2}x^2}{9!}+\frac{6^{3,2}x^4}{11!}-\ldots,$$

. . . .

a podle toho tedy všeobecně

$$X_n=\frac{2^{n,2}.1}{(2n+1)!}-\frac{4^{n,2}x^2}{(2n+3)!}+\frac{6^{n,2}x^4}{(2n+5)!}-\ldots,$$

takže zkrátíme-li v posledním vzorci, co možná, obdržíme napřed

$$X_n=\frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)}\left[1-\frac{x^2}{2(2n+3)}+\frac{x^4}{2^{2,2}(2n+3)^{2,2}}-\frac{x^6}{2^{3,2}(2n+3)^{3,2}}+\ldots\right],$$

a položíme-li za řadu v závorkách obsaženou, po dvou členech v ní spojujíce,

$$S=\left[1-\frac{x^2}{2(2n+3)}\right]+\frac{x^4}{2^{2,2}(2n+3)^{2,2}}\left[1-\frac{x^2}{6(2n+7)}\right]+\ldots, \tag{3}$$

jednoduchý vzorec

$$X_n=\frac{S}{1.3.5\ldots(2n+1)}; \tag{4}$$

porovnáme-li pak jej se vzorcem (2), zjednáme si konečně

$$\varphi(x)\sin x-\psi(x)\cos x=\frac{x^{2n+1}S}{1.3.5\ldots(2n+1)}. \tag{5}$$

Nekonečná řada (3) bude míti zajisté součet *positivní*, platí-li již o prvním členu

$$1-\frac{x^2}{2(2n+3)}>0,$$

což znamená, že hodnota veličiny x vyhovuje podmínce

$$x < \sqrt{2(2n+3)}, \tag{6}$$

což snadno možná stanoviti, jelikož tu n jest libovolně velké číslo, ba čemuž vyhovuje

$$x = \frac{\pi}{2}$$

již nejmenší pro n možnou hodnotou 1, poněvadž dle toho

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{10}.$$

Znajíce souvislost obou těchto zjevů, položme

$$\frac{\pi}{2} = \frac{b}{a}, \tag{7}$$

kdež a i b jsou konečná čísla *celistvá*, takže podle této položky by bylo π číslem racionalním; polynom $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bude pak míti ve jmenovateli buď a^{n-1} nebo a^n podle toho, je-li n číslo sudé nebo liché, takže obdržíme ze vzorce (5)

$$\frac{A}{a^n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{{}_{x}\big/^{\frac{b}{a}} S}{1.3.5\ldots(2n+1)}, \tag{8}$$

zavedeme-li tu za čitatele funkce $\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$ na stejného jmenovatele uvedené kratší označení A. Ze vzorce (8) jde pak

$$A = a^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{{}_{x}\big/^{\frac{b}{a}} S}{1.3.5\ldots(2n+1)},$$

což znamená, že levá strana jest číslo *celistvé*, pravá však *zlomkem*, což jest nesrovnalost vzniklá zavedením položky (7); *není* tedy π číslem racionálním.

A poněvadž funkce $\varphi(x)$, jak s počátku bylo uvedeno, obsahuje pouze *sudé* mocniny veličiny x, poznává se touže methodou, jak *Hermite* dokládá, že i π^2 jest „une quantité incommensurable“.

Konečně budiž ještě poznamenáno, že jako všechny mocniny čísla e*), též nejspíše i všechny celistvé mocniny čísla π**) jsou čísla *transcendentní*,***) nevyhovující algebraické rovnici stupně n-tého s koëficienty racionalními, kdež n jest konečné.

O elektrických oscillacích.

Napsal

Dr. **Jos. A. Theurer** v Praze.

Hlavní podstatou Faraday-Maxwellovy nauky o elektřině jest — oproti theoriím starším — přenesení sídla elektrických úkazů z vodičů do isolatorů. Theoretický i praktický úspěch, který vzešel celé nauce o elektřině z theorie této, jež hledí na všecky úkazy se stanoviska, dřívějšímu tak protivného, jakož i všeobecné již přijetí, jehož se jí dostalo, dokazují, že zásluhou její theorie elektřiny pokročila o značný krok v před a nevystihla-li ještě pravdu samu, stanula jí přece již na blízku.

Značný vliv dielektrika na úkazy *elektřiny statické* byl velmi mocnou podporou theorie Faradayovy; za to však v oboru *elektřiny dynamické* dosud nepodařilo se vliv dielektrika ukázati; tak na př. nastávají úkazy indukce dle udání téměř všech pozorovatelů v tomže okamžiku, ať šíří se elektrický rozruch od vodiče primarního k sekundarnímu dielektrikem jakýmkoli. Ke studiu otázky, jakou funkci má dielektrikum při elektřině dynamické se nehodí, jak z jednoduché úvahy plyne, proudy stálé, aneb pomalu se měnící, neboť při těchto stav dielektrika se nemění aneb jen mění v míře velmi nepatrné. Z té příčiny obrácen zřetel ke proudům *rychle* se měnícím, hlavně však ke proudům alternujícím, jež uvésti musí dielektrikum ve stav rychle po sobě jdoucích opáčných polarisací. Takovéto velmi

---

*) Viz *Ch. Hermite* „Sur la fonction exponentielle" C. R. LXXVII 1873, a *F. J. Studnička* „Všeobecné tvarosloví algebraické" 1880, pag. 236.

**) Viz *Lindemann* „Über die Zahl π." Klein, Annal. XX pag. 213., porovnej článek „O kvadratuře kruhu" v Čas. tomto, r. XIII. pag. 276.

***) Viz *P. G. Lejeune-Dirichlet* „Vorlesungen über Zahlentheorie" 1879 pag. 452 et seqq.