Jsou tedy tři methody, jimiž bude pozorován úkaz letošního roku, které však vesměs zakládají se na methodě Halleyově. Stará methoda, *anglická*, pozoruje okamžik dotknutí, spůsobem ovšem přesnějším než se dříve dělo, *francouzská* methoda užívá co hlavního prostředku fotografie a *německá* přímého měření pomocí heliometru.

Po celém téměr povrchu země roztroušeny jsou stanice, na nichž pozorovatelé, opatřeni výtečnými dalekohledy, fotoheliografy, heliometry, chronometry atd. se připravují k pozorování úkazu rovněž tak vzácného jak důležitého. V tomto století vyskytne se jen ještě jednou, 6. prosince r. 1882, příležitost zjev tentýž pozorovati a vrátí se teprv za 122 let, 7. června roku 2004. Doufejme, že tolikerá práce věnovaná pozorování letošnímu se odmění příznivějším výsledkem, nežli dosud se stalo, a že vzdálenost země od slunce bude nám známa v mezích tak úzkých, jaké jsou přiměřené nynějšímu stavu vědy, dostoupivší v tolikerém ohledu na nejvyšší stupeň zevrubnosti a přesnosti.

(Dokončení.)

O řadách součtových vůbec a číslech obrazcových zvlášť.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

(Dokončení.)

III. O číslech obrazcových zvlášť.

V předešlém schematě vyskytují se čísla třírohá, jež znázorňují rohy trojúhelníku stejnostranného, jak obr. 8. ukazuje. Kdybychom vzali za základ čtyrúhelník, obdrželi bychom podobně čísla čtyrrohá neb tetragonální (ob. 9.) a stejným pochodem pětirohá a vůbec *mnohorohá* neb *polygonální*.

Podobně možná z čísel řady následující, jež nazvali jsme tetraedrická neb čtyrstěnná, vyvésti nové řady a to směrem dvojím, jelikož čtyrstěn (obr. 10). s jedné strany považovati můžeme za trojboký jehlanec, s druhé strany pak za pravidelný mnohostěn. Obdržíme tudíž na tomto dvojím základě obrazcová čísla dvojího druhu a sice čísla *mnohoboká* neb *pyramidální* a čísla *mnohostěnná* neb *polyedrální.*

A o těchto zvláštních číslech obrazcových jest nám nyní jednati.

1. O číslech polygonálních.

Položíme-li za základ pravidelný mnohoúhelník mající p rohů a p stran, bude patrně první číslo řady polygonální jako vůbec první číslo obrazcové 1, druhé pak p; třetí obdržíme, připojíme-li počet bodů, které zdvojením délky stran povstanou, totiž tolik, kolik jest rohů, vyjmouc první, tedy $p-1$, a pak ještě tolik středních bodů, kolik jest stran, vyjmouc dvě v prvním rohu se stýkající, jichž střední body byly co rožní již počítány, tedy další $p-2$ body, takže dohromady sejde se bodů

$$p+(p-1)+(p-2)=3p-3.$$

První tři čísla mnohorohá jsou tudíž

$$1,\ p,\ 3p-3,$$

z čehož snadno obdržíme rozdíly

$$\Delta a_1=p-1,\quad \Delta^2 a_1=p-2.$$

Znajíce tyto veličiny, zjednáme si snadno podlé vzorce (5 pag. 42.) pro všeobecný člen řady této výraz

$$a_n=1+(n-1)(p-1)+{}^1/_2(n-1)(n-2)(p-2),$$

z něhož jde, uvedeme-li na stejné jmenovatele,

$$a_n=\frac{n}{2}\Big[n(p-2)-(p-4)\Big] \tag{21}$$

aneb zavedeme-li označení

$$p-2=d,$$

$$a_n=\binom{n}{1}\Big(1+\frac{n-1}{2}d\Big). \tag{22}$$

Abychom podstatu tohoto všeobecného členu ještě lépe poznali, rozeznávejme sudé a liché p, položme tedy napřed

$$p=2k,$$

načež ze vzorce (21) obdržíme

$$a_n = (k-1)\,n^2 - (k-2)\,n, \tag{23}$$

a pro druhý případ

$$p = 2k+1,$$

načež z téhož vzorce povstane

$$a_n = \frac{2k-1}{2}\,n^2 - \frac{2k-3}{2}\,n. \tag{24}$$

Podlé toho bude tedy řada čísel lichorohých a sice

třírohých:	1,	3,	6,	...,	$\frac{1}{2}(n^2+n)$,
pětirohých:	1,	5,	12,	...,	$\frac{1}{2}(3n^2-n)$,
sedmirohých:	1,	7,	18,	...,	$\frac{1}{2}(5n^2-3n)$,
devítirohých:	1,	9,	24,	...,	$\frac{1}{2}(7n^2-5n)$,

. . . .

a řada čísel sudorohých a sice

čtyrrohých:	1,	4,	9,	...,	n^2,
šestirohých:	1,	6,	15,	...,	$2n^2-n$,
osmirohých:	1,	8,	21,	...,	$3n^2-2n$,
desítirohých:	1,	10,	27,	...,	$4n^2-3n$,

. . . .

Chceme-li si zjednati vzorec pro součet čísel polygonálních, dosaďme dříve vytknuté příslušné hodnoty do vzorce (6 pag. 42.), načež obdržíme

$$s_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}(p-1) + \binom{n}{3}(p-2),$$

aneb uvedeme-li na stejného jmenovatele,

$$s_n = \binom{n+1}{2}\frac{n(p-2)-(p-5)}{3} \tag{25}$$

z čehož jde, položíme-li opět $p-2=d$,

$$s_n = \binom{n+1}{2}\left(1+\frac{n-1}{3}\,d\right) \tag{26}$$

Poněvadž řada čísel

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n$$

jest nejbližší řadou součtovou pro čísla polygonální a tudíž nám představuje, jak dříve již bylo vyloženo čísla pyramidální, nutno k těmto nyní přejíti.

Poznámka. Pojem čísel polygonálních možná rozšířiti, pokračuje-li se v řadě předložené

$$1,\ p,\ 3p-3,\ 6p-8,\ \ldots$$

podlé stejného pravidla na levou stranu dále; obdrží se tu

$$\begin{array}{l} \ldots\ 3p-8,\ p-3,\ 0\ ,\ 1\ ,\ p\ ,\ 3p-3,\ \ldots \\ \ldots\ -2p+5,\ -p+3,\ 1\ ,\ p-1,\ 2p-3,\ 3p-5,\ \ldots \\ \ldots\ p-2,\ p-2,\ p-2,\ p-2,\ p-2,\ p-2,\ \ldots \end{array}$$

aneb spořádáme-li členy první řady podle velikosti,

$$1,\ p-3,\ p,\ 3p-8,\ 3p-3,\ 6p-15,\ 6p-8,\ldots,$$

což představuje rozšířenou řadu čísel polygonálních.

Pro $p=3$ a $p=4$ nepovstává tu arci nových členů, jelikož vždy dva sousední se sobě rovnají, ale pro $p>4$ vznikne mezi dvěma členy řady původní člen nový; pro $p=5$ obdržíme na př. rozšířenou řadu čísel pentagonálních

$$\mathbf{1},\ 2,\ \mathbf{5},\ 7,\ \mathbf{12},\ 15,\ \mathbf{22},\ 26,\ \mathbf{35},\ \ldots,$$

kterážto řada vyjadřuje *zákon, podlé něhož ustanovujeme rekurrentním spůsobem součet dělitelů čísla n,* 1 a *n k nim počítajíc.* Označíme-li totiž součet tento symbolem $\sigma(n)$, platí, jak *Euler*, nanejvýš důvtipným spůsobem dokázal,

$$\begin{aligned} \sigma(n) = {} & \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) \\ & + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \sigma(n-22) - \sigma(n-26) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

při čemž však nutno klásti

$$\sigma(0) = n.$$

Jestli na př. $n=15$, bude podle toho

$$\begin{aligned} \sigma(15) & = \sigma(14) + \sigma(13) - \sigma(10) - \sigma(8) + \sigma(3) + \sigma(0) \\ & = 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24, \end{aligned}$$

což i rozkladem se obdrží, jelikož

$$\sigma(15) = 1+3+5+15 = 24.$$

Jak z tohoto upotřebení patrno, není theorie čísel obrazcových vůbec a polygonálních zvlášť jen hříčkou mathematickou, nýbrž sahá i do oboru zcela stranou postaveného, do nauky o číslech.

2. O číslech pyramidálních.

Poněvadž všeobecný člen součtový čísel mnohorohých jest všeobecným členem čísel mnohobokých, bude podle vzorce (25)

$$a_n = \binom{n+1}{2}\frac{n(p-2)-(p-5)}{3},$$

z čehož snadno si zjednáme pro

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

všeobecnou řadu čísel mnohobokých

$$1,\ p+1,\ 4p-2,\ 10p-10,\ \ldots,$$

jejíž první rozdíly jsou

$$\Delta a_1 = p,\quad \Delta^2 a_1 = 2p-3,\quad \Delta^3 a_1 = p-2.$$

Podle toho bude tedy řada čísel

trojbokých: $1,\ 4,\ 10,\ 20,\ \ldots,\ \binom{n+2}{3}$,

čtyrbokých: $1,\ 5,\ 14,\ 30,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$,

pětibokých: $1,\ 6,\ 18,\ 40,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}n$

šestibokých: $1,\ 7,\ 22,\ 50,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{4n-1}{3}$,

sedmibokých: $1,\ 8,\ 26,\ 60,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{5n-2}{3}$,

osmibokých: $1,\ 9,\ 30,\ 70,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}(2n-1)$,

devítibokých: $1,\ 10,\ 34,\ 80,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{7n-4}{3}$,

desítibokých: $1,\ 11,\ 38,\ 90,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{8n-5}{3}$.

. . . .

Abychom si zjednali vzorec pro součet čísel mnohobokých dosaďme dříve vytknuté hodnoty rozdílů prvních do vzorce (6), načež obdržíme

$$s_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}p + \binom{n}{3}(2p-3) + \binom{n}{4}(p-2)$$

aneb uvedeme-li na stejného jmenovatele,

$$s_n = \frac{n}{24}\left[n^3(p-2) + 2n^2p - n(p-14) - 2p + 12\right], \qquad (27)$$

kterýžto vzorec málo souměrnosti obsahující velmi se zjednoduší a dřívějším přispůsobí, zavedeme-li opět

$$p - 2 = d;$$

povstaneť tu po krátké redukci

$$s_n = \binom{n+2}{3}\left(1+\frac{n-1}{4}d\right). \qquad (28)$$

Porovnáme-li nyní vzorec (22), (26) a (28) a uvážíme-li, že představují všeobecné členy součtové řady nullté, první a druhé, dovedeme snadno sestaviti vzorec pro všeobecný člen i-té řady součtové, totiž

$$a_n = \binom{n+i-1}{i}\left(1+\frac{n-1}{i+1}d\right), \qquad (29)$$

a podobně pro součet n-členů i-té řady součtové

$$s_n = \binom{n+i}{i+1}\left(1+\frac{n-1}{i+2}d\right). \qquad (30)$$

Tímto spůsobem přišli jsme k novému druhu čísel obrazcových, z nichž povstanou čísla dříve na str. 45. vytknutá, položíme-li

$$p = 3 \quad \text{neb} \quad d = 1.$$

Poněvadž se nedají znázorniti, nedostalo se jim zvláštního označení, ba nebývají čísla tato ani dosud řádně vytknuta aspoň tak, jak toho zasluhují.

Abychom je označili, použijme hodnoty argumentu $d = p-2$, čímž obdržíme výraz „p-boký“, a argumentu i, čímž obdržíme výraz „stupně i-tého“, takže budeme pomocí vzorce (30) moci rozeznávati čísla

3, 4, 5, ..., p-boká stupně 1., 2., 3., ..., i-tého.

Čísla *pětiboká* stupně *třetího* jsou podle toho na př. obsažena ve vzorci

$$a_n = \binom{n+3}{4}\left(1+\frac{n-1}{5}3\right),$$

jelikož tu platí ve vzorci (30)

$$p = 5, \quad d = 3, \quad i = 3;$$

jsouť to čísla řady stupně *pátého*

1, 8, 33, 98, 238, 504, ...,

jakož vůbec *čísla p-boká stupně i-tého představují arithmetické řady stupně* $(i+2)$-ho.

3. O číslech polyëdrálních.

Jak odvozují se čísla polygonální z pravidelných polygonů, podobně odvozují se čísla polyëdrální neb mnohostěnná z pravidelných *polyëdrů* neb *mnohostěnů* aneb z *pravidelných těles*, jichž čítáme, jak známo *patero* a sice:

1. *Čtyrstěn* neb tetraeder,
2. *Osmistěn* „ oktaeder,
3. *Dvacetistěn* „ ikosaeder,
4. *Krychli* „ hexaeder,
5. *Dvanáctisteň* „ dodekaeder.

Za tou příčinou nutno čísla tato podle jednotlivých tvarů rozebírati, při čemž budiž jen poznamenáno, že prvních tré těles má rohy vytvořeny trojúhelníky.

Co se tkne těchto prvních těles, bude první člen příslušné řady čísel polyedrálních 1, druhý r, značí-li r počet rohů, třetí $2r-1+h-h'$, jelikož k druhému se připojí tolik bodů, kolik jest rohů vyjmouc první již počítaný a tolik středních bodů na hranách počtu h, kolik jich těleso čítá výjmouc hrany počtu h', sbíhající se v prvním rohu, jichž střední body byly již co rohy dříve počítány, čtvrtý konečně

$$3r-1+3(h-h')+p-p',$$

jelikož se k třetímu připojí opět tolik bodů, kolik jest rohů vyjmouc první již počítaný, pak dvakrát tolik bodů na hranách počtu h, kolik jich těleso čítá, vyjmouc h', tedy $2(h-h')$ a konečně tolik středních bodů p v trojúhelnících, kolik jich omezuje těleso výjmouc počet p' těch, které se v prvním rohu sbíhají a dříve již co střední body hran byly počítány.

Z této řady prvních čtyr členů snadno si sestavíme řadu prvních differencí, totiž

$$\Delta a_1 = r-1, \quad \Delta^2 a_1 = h-h', \quad \Delta^3 a_1 = p-p', \tag{32}$$

takže nyní snadno jest určiti všeobecný vzorec pro čísla polyedrální druhu prvního, totiž *čtyrstěnná*, *osmistěnná* a *dvacetistěnná;* budeť tu podle vzorce (5)

$$a_n = 1 + \binom{n-1}{1}(r-1) + \binom{n-1}{2}(h-h') + \binom{n-1}{3}(p-p') \tag{33}$$

a podobně podle vzorce (6)

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}(r-1) + \binom{n}{3}(h-h') + \binom{n}{4}(p-p'), \tag{34}$$

z kterýchžto vzorců obdržíme pro jednotlivá tato tělesa podlé počtu rohů, hran a stěn vzorce zvláštní a sice:

a) Pro *čtyrstěn* platí

$$r = 4,$$
$$h = 6, \quad h' = 3,$$
$$p = 4, \quad p' = 3,$$

z čehož snadno obdržíme podlé vzorců (33) a (34)

$$a_n = \binom{n+2}{3}, \tag{35}$$

$$s_n = \binom{n+3}{4}, \tag{36}$$

jakž bylo již dříve na stránce 45. ustanoveno.

Řada čísel čtyrstěnných jest tedy

1, 4, 10, 20, . . . ,

jakž tamtéž bylo již ukázáno.

b) Pro *osmistěn* platí

$$r = 6,$$
$$h = 12, \quad h' = 4,$$
$$p = 8, \quad p' = 4,$$

takže pomocí těchto hodnot ze vzorců (33) a (34) se obdrží

$$a_n = \frac{n}{3}(2n^2 + 1), \tag{37}$$

$$s_n = \binom{n+1}{2}\frac{n^2+n+1}{3}; \tag{38}$$

řada čísel osmistěnných jest tedy podlé toho

1, 6, 19, 44, . . .

c) Pro *dvacetistěn* platí

$$r = 12,$$
$$h = 30, \quad h' = 5,$$
$$p = 20, \quad p' = 5,$$

takže v tomto případě bude

$$a_n = \frac{n}{2}(5n^2 - 5n + 2), \tag{39}$$

$$s_n = \binom{n+1}{1}\frac{15n^2 - 5n + 2}{12}, \tag{40}$$

z čehož snadno ustanovíme

1, 12, 48, 124, . . .

co řadu čísel dvacetistěnných.

Co se tkne čísel *šestistěnných* neb *krychlových*, tu není ani třeba podobným spůsobem jich řadu hledati, jelikož víme, že všeobecný člen tu jest n^3 a součet $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$; jen k vůli stejnoměrnosti uvádíme zde tedy

$$a_n = n^3, \tag{41}$$

$$s_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \tag{42}$$

a řadu čísel krychlových samu, totiž

1, 8, 27, 64, . . .

Chceme-li znáti jednotlivé difference a souvislost jejich s počtem rohů, hran h a h' a stěn p i p', vyhledejme si spůsobem prvé naznačeným první čtyry členy, načež snadno ustanovíme

$$\Delta a_1 = r - 1, \quad \Delta^2 a_1 = h - h' + p - p', \quad \Delta^3 a_1 = 2(p - p'),$$

kdež platí, jak známo,

$$r = 8,$$
$$h = 12, \quad h' = 3$$
$$p = 6, \quad p' = 3.$$

V řadě čísel *dvanáctistěnných* jest pak, jak podobným spůsobem můžeme ukázati,

$$\Delta a_1 = r - 1, \quad \Delta^2 a_1 = h - h' + 2(p - p'), \quad \Delta^3 a_1 = 3(p - p'),$$

kdež platí, jak taktéž známo,

$$r = 20,$$
$$h = 30, \quad h' = 3,$$
$$p = 12, \quad p' = 3,$$

takže pomocí těchto hodnot ze vzorce (5) se obdrží pro všeobecný člen vzorec

$$a_n = \frac{n}{2}(9n^2 - 9n + 2) \tag{43}$$

a podobně ze vzorce (6) pro součet n-členů vzorec

$$s_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{9n^2 - 2n - 2}{4},$$

načež se z všeobecného členu snadno vyvine řada čísel dodekaedrálních a sice

1, 20, 84, 220, ...

Kdybychom chtěli tato čísla mnohostěnná jedním tvarem zahrnouti, sestavme si z prvních rozdílů, jež kráce označíme písmenami A, B, C, schema toto:

1	A	B	C				
	1	$2A$	$3B$	$4C$			
		1	$3A$	$6B$	$10C$		
			1	$4A$	$10B$	$20C$	
				1	$5A$	$15B$	.
					1	$6A$	. .
						1	. . .
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	

načež obdržíme co součty v jednotlivých sloupcích čísla řady mnohostěnné a sice

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \ldots ;$$

zároveň pak nutno sestaviti schema pro první difference a sice

tvar	A	B	C
Čtyrstěn . .	3	3	1
Osmistěn . .	5	8	4
Šestistěn . .	7	12	6
Dvacetistěn .	11	25	15
Dvanáctistěn .	19	45	27

Při čemž poznáváme, že obrazcová čísla a skládají se z členů řad, jichž koefficienty jsou opět čísla obrazcová a sice všeobecná, jež na str. 45. byla vytknuta.

Závěrek.

Jak z tohoto výkladu jde na jevo, poskytují řady čísel obrazcových velmi mnoho zajímavých vlastností a slouží velmi prospěšně při mnohých mathematických výzkumech, takže snadno pochopíme, proč byla čísla tato od nejstarších dob až na časy naše vítaným předmětem studií mathematických, zejmena pak pro milovníky této vědy. Kéž by se brzy poštěstilo k řešení nových a důležitých úkolů jich užiti, aby ještě zvýšena byla vážnost, jaké již požívají mezi předměty mathematického badání!