Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O součtu čísel kubických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 2, 85--87

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122916`

O součtu čísel kubických.

Podává
Augustin Pánek.

Počet sestav s opakováním třídy druhé čili *amb* při n prvcích jest, jak povědomo,

$$\overset{o}{\underset{2}{C}}(n) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}, \tag{1}$$

načež povýšíme-li na druhou mocnost, povstane

$$n^3 + \binom{n}{2}^2 = \binom{n+1}{2}^2.$$

Položíme-li pak místo n postupně

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

obdržíme

$$1^3 + \binom{1}{2}^2 = \binom{2}{2}^2$$

$$2^3 + \binom{2}{2}^2 = \binom{3}{2}^2$$

$$3^3 + \binom{3}{2}^2 = \binom{4}{2}^2$$

$$\vdots$$

$$n^3 + \binom{n}{2}^2 = \binom{n+1}{2}^2;$$

sečteme-li pak soustavu těchto stejnin, obdržíme ihned

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \binom{n+1}{2}^2$$

aneb jiným vyjádřením

$$\sum_{n=1}^{n} n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}. \tag{2}$$

Obecnější tvar řady (2) možno vyvoditi z analogické rovnice identické jako jest (1) totiž

$$a \,.\, b + \frac{a}{2}(a-b) = \frac{a}{2}(a+b), \tag{3}$$

kteráž přejde pro $b = 1$ v tvar stejniny (1).

Uvedeme-li stejninu (3) opětně na druhou mocnost, promění se v

$$a^3 b + \frac{a^2}{4}(a-b)^2 = \frac{a^2}{4}(a+b)^2,$$

aneb dělíme-li ji veličinou b,

$$a^3 + \frac{a^2}{4b}(a-b)^2 = \frac{a^2}{4b}(a+b)^2;$$

zavedeme-li pak v této stejniuě místo a,

$$c,\ c+b,\ c+2b, \ldots,\ c+nb,$$

povstane

$$c^3 + \frac{c^2}{4b}(c-b)^2 = \frac{c^2}{4b}(c+b)^2$$

$$(c+b)^3 + \frac{c^2}{4b}(c+b)^2 = \frac{(c+b)^2}{4b}(c+2b)^2$$

$$(c+2b)^3 + \frac{(c+b)^2}{4b}(c+2b)^2 = \frac{(c+2b)^2}{4b}(c+3b)^2$$

$$\vdots$$

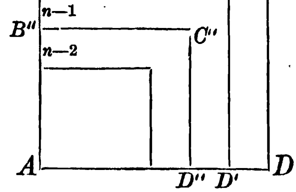
$$(c+nb)^3 + \frac{[c+(n-1)b]^2}{4b}(c+nb)^3 = \frac{(c+nb)^2}{4b}[c+(n+1)b]^2$$

Součet této soustavy stejnin dá řadu s členy v mocnině třetí

$$\sum_{n=0}^{n}(c+nb)^3 = \frac{1}{4b}\left[(c+nb)^2\{c+\overline{n+1}\,b\}^2 - c^2(c-b)^2\right].$$

Pro $c=1$, $b=1$, $n=m-1$ obdržíme co zvláštní případ řadu (2).

Poznámka redakce. Velmi jednoduchým a to geometrickým spůsobem dokazovali staří Indové platnost vzorce (2).



Vpíšeme-li do čtverce AC, jehož strana

$$AB = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

čtverec AC', jehož strana

$$AB' = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1,$$

bude plocha *gnomonu* $BCDD'C'B'B$ patrně

$$2\,BCC'B'B = 2 \cdot \frac{n}{2}\left(\begin{matrix}1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 \\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n\end{matrix}\right) = n^3.$$

Podobně bude plocha gnomonu $B'C'D'D''C''B''B'$, kdež $B'B'' = n - 1$,

$$2B'C'C''B''B' = (n-1)^3 \text{ atd.}$$

Vyplníme-li tedy čtverec AB neb

$$ABCD = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

samými gnomony spůsobem právě naznačeným, obdržíme

$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots + 3^3 + 2^3 + 1^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2,$$

což se úplně shoduje se vzorcem (2). Zároveň tu patrno, jak názorně dovedli staří Indové mnohé pravdy mathematické vyváděti! *)

Analytický důkaz spůsobu, jakým lze sestrojiti normálu k ellipse.

Podává

prof. **Hromádko** v Táboře.

Sestrojíme-li nad velkou osou ellipsy, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích jest

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

kruh poloměru a, bude rovnice jeho

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Pro společnou úsečku x_1 libovolného bodu ellipsy obdržíme Y_1 co pořadnici kruhu a y_1 co pořadniciel lipsy, o nichž platí

$$Y_1 : y_1 = a : b,$$

z čehož jde

*) Viz *Hankel* „Zur Geschichte der Mathematik“ pag. 192.