Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Applikace theorému Abelova na vyhledávání některých tvarů pseudoelliptických integrálů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 3, 237--244

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122991`

Applikace theorému Abelova na vyhledání některých tvarů pseudoelliptických integrálů.

Dr. **Ant. Pleskot** v Plzni.

Chceme ukázati jednoduchou applikaci theorému Abelova na vyhledání některých tvarů funkcí $f(x)$, tak aby integrál

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}, \tag{1}$$

vedl na integrál z funkcí racionálních.

Položíme-li

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c), \tag{2}$$

pak integrál předložený

$$\int \frac{f(x)\,dx}{y}$$

značí integrál Abelův, vztažený ku křivce (2).

Jedním z bodů křivky té, jehož úsečka rovná se některému kořenu rovnice

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0,$$

a tedy pořadnice nulle, k. p. bodem

$$x = a, \quad y = 0,$$

položme svazek paprskový

$$y = A(x-a).$$

Každý paprsek ze svazku předchozího protne křivku (2) ještě ve dvou dalších hyblivých bodech a součet integrálů (1) vzatých od libovolného bodu k těmto dvěma bodům bude dle theorému Abelova roven integrálu

$$\int \psi(A)\,dA, \tag{3}$$

kdež $\psi(A)$ značí racionální funkci parametru A.

Podaří-li se oba integrály, jichž meze x_1 a x_2 jsou úsečky hyblivých bodů, převésti v integrál o společné mezi a téhož tvaru $f(x)$, jest to důkazem, že integrál předložený jsa ekvivalentní integrálu (3), jest integrálem pseudoelliptickým.

Přistupme k řešení úlohy.

Stanovme průsečíky paprsku

$$y = A(x - a)$$

s křivkou

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c),$$

a označme úsečky hyblivých bodů x_1, x_2 a příslušné k nim pořadnice y_1 a y_2.

Veličiny x_1 a x_2 jsou kořeny rovnice:

$$A^2 = \frac{(x - b)(x - c)}{x - a}, \tag{4}$$

čili rovnice

$$x^2 - x(b + c + A^2) + bc + A^2 a = 0. \tag{4'}$$

Paprsek o parametru $A + dA$ protne křivku (2) v bodech $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$ a k určení dx_1, dx_2 máme rovnici, která plyne differencováním rovnice (4′).

Differencováním obdržíme:

$$dx_1 = \frac{2A(x_1 - a)\,dA}{2x_1 - (b + c + A^2)},$$

a proto hledíce k relaci:

$$y_1 = A(x_1 - a),$$

obdržíme dále

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{y_1} = \frac{2dA\,f(x_1)}{2x_1 - (b + c + A^2)}.$$

Podobně obdržíme

$$\frac{f(x_2)\,dx_2}{y_2} = \frac{2dA\,f(x_2)}{2x_2 - (b + c + A^2)}.$$

Sečtením posledních dvou rovnic nabýváme

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{y_1} + \frac{f(x_2)\,dx_2}{y_2} = 2dA\left(\frac{f(x_1)}{2x_1 - (b + c + A^2)}\right.$$
$$\left. + \frac{f(x_2)}{2x_2 - (b + c + A^2)}\right). \tag{5}$$

Pravá strana rovnice předchozí za dA jest symetrickou funkcí kořenů x_1, x_2 rovnice (4′) a proto lze ji vyjádřiti jako racionální funkci veličiny A; označme ji $\psi(A)$.

Na levé straně rovnice této lze však veličiny x_2, y_2, dx_2 vyjádřiti veličinami x_1, y_1, dx_1, neboť dle rovnice (4') platí

$$x_1 + x_2 = b + c + A^2,$$

a poněvadž dle (4)

$$A^2 = \frac{(x_1 - b)(x_1 - c)}{x_1 - a},$$

jest i

$$x_2 = a + \frac{(a - b)(a - c)}{x_1 - a}, \tag{6}$$

a proto

$$dx_2 = - \frac{(a - b)(a - c)}{(x_1 - a)^2} dx_1;$$

rovnici tuto vzhledem k (6) možno psáti ve tvaru

$$dx_2 = - dx_1 \frac{x_2 - a}{x_1 - a},$$

a poněvadž

$$\frac{x_2 - a}{x_1 - a} = \frac{y_2}{y_1},$$

plyne výslední vztah

$$\frac{dx_2}{y_2} = - \frac{dx_1}{y_1}.$$

Dosadíme-li hodnotu $\frac{dx_2}{y_2}$ z předchozí rovnice do rovnice (5), obdržíme

$$\frac{dx_1}{y_1}(f(x_1) - f(x_2)) = 2dA\left(\frac{f(x_1)}{2x_1 - (b + c + A^2)}\right.$$
$$\left. + \frac{f(x_2)}{2x_2 - (b + c + A^2)}\right) = 2dA\,\psi(A),$$

kdež dle (6) platí

$$f(x_2) = f\left(a + \frac{(a - b)(a - c)}{x_1 - a}\right).$$

Volíme-li nyní tvar funkce $f(x)$ takový, že

$$f\left(a + \frac{(a - b)(a - c)}{x - a}\right) = - f(x), \tag{7}$$

pak dospíváme k rovnici

$$\frac{dx_1}{y_1} f(x_1) = dA\left(\frac{f(x_1)}{2x_1 - (b + c + A^2)} + \frac{f(x_2)}{2x_2 - (b + c + A^2)}\right),$$

aneb integrujeme-li

$$\int \frac{dx f(x)}{\sqrt{(x - a)(x - b)(x - c)}} = \int dA\left(\frac{f(x_1)}{2x_1 - (b + c + A^2)} + \frac{f(x_2)}{2r_2 - (b + c + A^2)}\right), \quad (8)$$

při čemž x_1 a x_2 jsou kořeny rovnice

$$x^2 - (b + c + A^2) x + bc - A^2 a = 0. \quad (4')$$

Tím integrál předložený vyčíslen; funkci za dA v předchozím integrálu lze určiti jako funkci symetrickou kořenů x_1 a x_2 rovnice (4′), aneb i tak, že kořeny x_1 a x_2 rovnice (4) stanovíme, kteréhožto způsobu dále užijeme.

Poněvadž a, b, c lze navzájem vyměniti, značí rovnice (7) vlastně tři tvary pro funkci $f(x)$.

Úvaha naše vede nás však též k tomu, jak za podmínky (7) možno nalézti substituci, kterou integrál předložený přechází v integrál z funkce racionální. Poněvadž funkce na pravé straně rovnice (8) za integračním znamením jest racionální funkcí veličiny A, která jest stanovena rovnicí (4), plyne z toho, že integrál předložený za podmínky (7) substitucí (4) převádí se v integrál funkce racionální a může tedy i tímto způsobem býti vyčíslen. K poznámce této se později vrátíme.

Uveďme některé applikace nalezených výsledků. Integrál předložený transformujme, položivše $a = 0$, substitucí

$$x = y^2.$$

Pak obdržíme

$$2\int \frac{dy f(y^2)}{\sqrt{(y^2 - b)(y^2 - c)}} = \int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{x(x - b)(x - c)}}.$$

Dle hořejších podmínek bude integrál

$$\int \frac{f(y^2)\, dy}{\sqrt{(y^2 - b)(y^2 - c)}} \quad (1')$$

integrálem pseudoelliptickým, platí-li

$$f(x) = -f\left(\frac{bc}{x}\right),$$

t. j.
$$f(y^2) = -f\left(\frac{bc}{y^2}\right),$$

a jeho hodnota jest dána rovnicí:

$$\int \frac{f(y^2)\,dy}{\sqrt{(y^2-b)(y^2-c)}} = \frac{1}{2}\int dA\left(\frac{f(x_1)}{2x_1-(b+c+A^2)} + \frac{f(x_2)}{2x_2-(b+c+A^2)}\right),$$

kdež x_1 a x_2 jsou kořeny rovnice

$$x^2 - (b+c+A^2)\,x + bc = 0, \tag{α}$$

aneb v jiném tvaru téže rovnice

$$A^2 = \frac{(x-b)(x-c)}{x}.$$

Poněvadž za podmínek daných

$$f(x_2) = -f(x_1),$$

a
$$2x_2 - (b+c+A^2) = -(2x_1 - (b+c+A^2)),$$

možno pravou stranu integrálu posledního psáti ve tvaru

$$\int \frac{f(x_1)\,dA}{2x_1-(b+c+A^2)}.$$

Volíme-li za x_1 jeden kořen rovnice (α) ku př.

$$x_1 = \frac{b+c+A^2}{2} + \sqrt{\frac{(b+c+A^2)^2}{4} - bc},$$

nabýváme rovnice, kterou převádí se integrál (1′) v integrál funkce racionální

$$\int \frac{dy\, f(y^2)}{\sqrt{(y^2-b)(y^2-c)}}$$
$$= \int \frac{dA\, f\left(\frac{b+c+A^2}{2} + \sqrt{\frac{(b+c+A^2)^2}{4} - bc}\right)}{2\sqrt{\frac{(b+c+A^2)^2}{4} - bc}}, \tag{9}$$

kdež ovšem odmocniny na pravé straně za integračním znamením odpadnouti musí; samo sebou se rozumí, že dospěli bychom k vyčíslení téhož integrálu substitucí (α), kladouce $x = y^2$, t. j.

$$A^2 = \frac{(y^2 - b)(y^2 - c)}{y^2}.$$

Podmínce

$$f(x) = -f\left(\frac{bc}{x}\right),$$

čili

$$f(y^2) = -f\left(\frac{bc}{y^2}\right) \tag{β}$$

vyhovují integrály Eulerovy, jichž vyčíslením se prof. Pánek zabýval na mnoha místech, hledaje substituce, kterými je možno vyčísliti; (viz ku př. Věstník kr. č. Sp. nauk v Praze 1893, Čas. pro pěst. mathem. a fys. ročník 30., str. 341 a násl.). Integrály ty jsou:

$$\int \frac{y^2\,dy}{(1 - y^4)\sqrt{1 + y^4}},$$

$$\int \frac{\sqrt{1 + y^4}}{1 - y^4}\,dy,$$

$$\int \frac{1 + y^2}{1 - y^2} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^4}},$$

$$\int \frac{(1 - y^2)\,dy}{(1 + y^2)\sqrt{1 + y^4}}.$$

O všech těchto integrálech platí relace (β), jakž snadno se přesvědčíme, kladouce

$$b = i,$$

$$c = -i,$$

čímž tyto přecházejí v podmínky

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right),$$

čili

$$f(y^2) = -f\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Hodnota všech čtyř integrálů předchozích jest dána rovnicí

$$\int \frac{dy\, f(y^2)\, dy}{\sqrt{y^4+1}} = \int \frac{dA f\left(\frac{A^2+\sqrt{A^4-4}}{2}\right)}{\sqrt{A^4-4}},$$

při čemž

$$A = \frac{\sqrt{y^4+1}}{y};$$

při tom ještě jednou uvádíme, že $\sqrt{A^4-4}$ v integrálu na straně pravé vymizí. Tím dáno řešení, kterým všecky integrály hořejší okamžitě lze vyčísliti a podán současně geometrický význam substituce

$$A = \frac{\sqrt{y^4+1}}{y},$$

kterouž jakožto nejjednodušší uvádí prof. Pánek v článku svém.

Převeďme ještě původní integrál

$$\int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

na typus integrálu Legendre-ova položíce napřed $a = 0$, $b = 1$, $c = \frac{1}{k^2}$. Substitucí

$$x = y^2$$

obdržíme

$$\int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{k^2}\right)}} = 2k \int \frac{f(y^2)\, dy}{\sqrt{(1-y^2(1-k^2y^2)}}.$$

Položíme-li v rovnici (7), která značí podmínky, kdy předložený integrál jest pseudoelliptickým pořadem:

1. $a = 0, \quad b = 1, \quad c = \frac{1}{k^2},$

2. $a = 1, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{k^2},$

3. $a = \frac{1}{k^2}, \quad b = 1, \quad c = 0,$

dospějeme k tvarům $f(x)$, kdy integrál

$$\int \frac{f(y^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

jest pseudoelliptickým.

Případ 1. Platí-li

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{k^2x}\right),$$

čili

$$f(y^2) = -f\left(\frac{1}{k^2y^2}\right).$$

Případ 2. Platí-li

$$f(x) = -f\left(\frac{1-k^2x}{(1-x)k^2}\right),$$

čili

$$f(y^2) = -f\left(\frac{1-k^2y^2}{(1-y^2)k^2}\right).$$

Případ 3. Platí-li

$$f(x) = -f\left(\frac{1-x}{1-k^2x}\right),$$

čili

$$f(y^2) = -f\left(\frac{1-y^2}{1-k^2y^2}\right).$$

Hodnoty integrálů ve všech třech případech lze určiti dle vzorce (8) aneb substitucí $A^2 = \frac{(y^2-b)(y^2-c)}{y^2-a}$. Věty poslední jsou jiným způsobem vyvozeny v Goursatově analysi v díle I., str. 266.

Postup, kterého jsme k vyhledání některých tvarů pseudoelliptických integrálů užili, může býti zevšeobecněn, volíme-li místo svazku paprskového svazek vhodně volených křivek.