O trojúhelnících vzájemně vepsaných a opsaných.

Napsal

A. Strnad, professor v Hradci Králové.

Trojúhelník jest danému trojúhelníku *vepsán*, leží-li vrcholy jeho ve stranách tohoto; *opsán* pak, procházejí-li strany jeho vrcholy tohoto. Předpokládejme $\triangle abc$ (viz obr. 7.) a ve stranách jeho body a', b', c' určené poměry dělicími

$$\frac{ba'}{ca'} = \alpha, \quad \frac{cb'}{ab'} = \beta, \quad \frac{ac'}{bc'} = \gamma, \tag{1}$$

z nichž každý sluší za záporný pokládati, jest-li příslušný bod dělící umístěn mezi vrcholy trojúhelníka; za kladný pak, jest-li na prodloužení strany jeho. Body a', b', c' jsou vrcholy trojúhelníka nového, původnímu vepsaného. Obsah jeho O' jest s obsahem O trojúhelníka daného v jednoduché souvislosti vyjádřené vzorcem

$$\frac{O'}{O} = \frac{\alpha\beta\gamma - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)}, \tag{2}$$

který jsme v VI. ročníku tohoto časopisu (str. 269 a násl.), odvodili. Shovívavé čtenářstvo listů těchto snad nám nezazlí, když k předmětu tomu znova se vracíme, chtějíce v článku tomto řešiti úlohu obdobnou, jednoduchou sice a též začátečníkům přístupnou, však v mnohé příčině poučnou i zajímavou.

I. Přímky aa', bb', cc' omezují trojúhelník $a''b''c''$, původnímu opsaný. Uložme si obsah jeho O'' jakožto úkon obsahu O a poměrů α, β, γ vyjádřiti.

Nechať jest hodnota těchto poměrů a tudíž i poloha bodů dělících ve stranách daného trojúhelníka jakákoliv, vždy jest

$$O = O'' + T_1 + T_2 + T_3, \tag{3}$$

znamená-li

$$T_1 = \triangle abc'', \; T_2 = \triangle bca'', \; T_3 = \triangle cab''.$$

Však třeba při tom šetřiti znaménka ploch, o němž v každém případu dle návodu Möbiova snadně rozhodneme.*)

Mysleme si totiž obvod rovinného obrazce vytvořený koncem průvodiče proměnné velikosti, který se v rovině kolem libovolného však stálého bodu otáčí. Děje-li se toto otáčení ve směru

*) Viz: *Möbius*, Barycentrischer Calcul, §. 17. aneb: *Cremona*, Elemente des graphischen Calculs, übs. von Curtze, §. 12.

kladném, pokládáme též plochu onoho obrazce za kladnou, jinak za zápornou. Abychom obsahy T_1, T_2, T_3 ustanovili, uvažme, že

$$\triangle\, abb' : \triangle\, abc = b'a : ca$$

a, že z položky $cb' : ab' = \beta$ plyne

$$\frac{cb' - ab'}{-ab'} = \frac{ca}{b'a} = 1 - \beta. \tag{4}$$

Následovně jest

$$\triangle\, abb' = \frac{O}{1-\beta}. \tag{5}$$

Trojúhelník tento však rozpadá se ve dva, jichž poměr stanoven rovnicí

$$\frac{\triangle\, abc''}{-\triangle\, ab'c''} = \frac{\frac{1}{2}\, ab\,.\, ac''\,.\, sin\,(baa')}{\frac{1}{2}\, ab'\,.\, ac''\,.\, sin\,(caa')} = \frac{ab}{ab'} : \frac{sin\,(caa')}{sin\,(baa')};$$

poměr poslední pak lze nahraditi jiným, pomníme-li, že

$$\alpha = \frac{ba'}{ca'} = \frac{\triangle\, aba'}{\triangle\, aca'} = \frac{\frac{1}{2}\, ab\,.\, aa'\,.\, sin\,(baa')}{\frac{1}{2}\, ca\,.\, aa'\,.\, sin\,(caa')}$$

a proto

$$\frac{sin\,(caa')}{sin(baa')} = \frac{ab : ca}{\alpha}.$$

Obdržíme tedy dále, zároveň rovnice (4) užívajíce

$$\frac{\triangle\, abc''}{-\triangle\, ab'c''} = \frac{ab}{ab'} : \frac{ab : ca}{\alpha} = \frac{\alpha\,.\, ca}{ab'} = \alpha\,(\beta - 1),$$

odkud následuje:

$$\frac{\triangle\, abc''}{\triangle\, abc'' - \triangle\, ab'c''} = \frac{\alpha\,(\beta - 1)}{\alpha\,(\beta - 1) + 1}.$$

Poněvadž však

$$\triangle\, abc'' - \triangle\, ab'c'' = \triangle\, abc'' + \triangle\, ac''b' = \triangle\, abb',$$

bude tudíž

$$\triangle\, abc'' = \frac{\alpha\,(\beta - 1)}{\alpha\beta - \alpha + 1}\,.\,\triangle\, abb'$$

čili dle předpokládaného označení a vzorce (5)

$$T_1 = -\frac{\alpha O}{\alpha\beta - \alpha + 1};$$

dle obdoby jest pak také

$$T_2 = -\frac{\beta O}{\beta\gamma - \beta + 1}$$

$$T_3 = -\frac{\gamma O}{\gamma\alpha - \gamma + 1}. \qquad (6)$$

Tím vedeni jsme, k rovnici (3) hledíce, k výsledku žádanému

$$O'' = O\left[1 + \frac{\alpha}{\alpha\beta - \alpha + 1} + \frac{\beta}{\beta\gamma - \beta + 1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha - \gamma + 1}\right],$$

který po sečtení zlomků na pravé straně též takto psáti lze:

$$\frac{O''}{O} = \frac{(\alpha\beta\gamma + 1)^2}{(\alpha\beta - \alpha + 1)(\beta\gamma - \beta + 1)(\gamma\alpha - \gamma + 1)}. \qquad (7)$$

II. Nebude snad zcela nezajímavo, podrobíme-li tento vzorec podrobnějšímu rozboru, pozorujíce některé případy zvláštní, které v něm jsou obsaženy.

1. Jest-li

$$\alpha\beta\gamma + 1 = 0, \qquad (8)$$

jest též $O'' = 0$, t. j. trojúhelník $a''b''c''$ přejde v jediný bod, přímkám aa', bb', cc' společný. Odtud jde věta:

„*Jsou-li ve stranách trojúhelníka abc dány tři body a', b', c' tak, že*

$$\frac{ac'}{bc'}\cdot\frac{ba'}{ca'}\cdot\frac{cb'}{ab'} = -1,$$

protínají se příčky aa', bb', cc' v jediném bodu.

Poněvadž však rovnice (8) obsahuje nejen dostatečnou, ale i nutnou podmínku, aby bylo $O'' = 0$, platí věta vyslovená též obráceně, totiž:

Procházejí-li vrcholy trojúhelníka abc tři příčky, kteréž se vespolek v jediném bodu a protější strany v bodech $a'b'c'$ protínají, jest

$$\frac{ac'}{bc'}\cdot\frac{ba'}{ca'}\cdot\frac{cb'}{ab'} = -1.$$

Tuto poučku dokázal statickou úvahou italský geometr *J. Ceva.* *) K ní druží se obdobná věta ze vzorce (2) plynoucí: *Jsou-li ve stranách trojúhelníka abc dány tři body $a'b'c'$ tak, že*

$$\frac{ac'}{bc'}\cdot\frac{ba'}{ca'}\cdot\frac{cb'}{ab'} = +1,$$

leží body $a'b'c'$ v přímce.

---

*) Ve spise: De lineis rectis se invicem secantibus (Milán, 1678).

Obrácené znění její nazývá se poučkou *Menelaovou**): *Protíná-li přímka strany trojúhelníka abc v bodech a'b'c', jest*

$$\frac{ac'}{bc'}\cdot\frac{ba'}{ca'}\cdot\frac{cb'}{ab'}=+1.$$

2. Kdykoliv některý z činitelů v jmenovateli výrazu (7) se rovná nulle, jest $O''=\infty$. I tento výsledek si snadně geometricky vysvětlíme. Jest-li ku př.

$$\alpha\beta-\alpha+1=0, \qquad (9)$$

čili

$$\beta=\frac{\alpha-1}{\alpha},$$

jest pak

$$\frac{cb'}{ab'}=\frac{ba'-ca'}{ba'}=\frac{bc}{ba'}=\frac{cb}{a'b},$$

což zřejmě rovnoběžnost příček aa', bb' znamená. Vrchol c'' trojúhelníka uvažovaného jest pak v nekonečnu a tudíž i obsah trojúhelníka jest nekonečný. Dle toho též zřejmo, co značí každá z podmínek

$$\left.\begin{aligned}\beta\gamma-\beta+1&=0,\\ \gamma\alpha-\gamma+1&=0.\end{aligned}\right. \qquad (10)$$

Kdyby obě současně pravými byly, jest dle první z nich $bb' \parallel cc'$ a dle druhé $cc' \parallel aa'$, pročež i $aa' \parallel bb'$. Musela by tedy zároveň obstáti podmínka (9), o čemž i způsobem algebraickým se přesvědčiti možno. Vyloučíme-li totiž z rovnice (10) veličinu γ, obdržíme

$$\begin{vmatrix}\beta\;, & 1-\beta\\ \alpha-1, & 1\end{vmatrix}=0,$$

čili, jak tvrzeno,

$$\alpha\beta-\alpha+1=0.$$

Povšimněme si pak ještě toho, že γ-násobná rovnice (9) přičtena ke druhé z rovnic (10) dává podmínku (8)

$$\alpha\beta\gamma+1=0,$$

z čehož soudíme, že tři rovnoběžné přímky aa', bb', cc' sluší pojímati jakožto přímky mající společný bod *jediný*, ovšem nekonečně vzdálený. —

*) Menelaus z Alexandrie žil ku konci I. stol. po Kr.

3. Přihledněme k některým zvláštním hodnotám poměrů α, β, γ.

a) Vzhledem ku dvěma bodům základním přísluší bodu třetímu poměr dělící rovný -1, když tento půlí vzdálenost oněch. Rozpůlíme-li tedy všechny tři strany trojúhelníka, jest nám klásti $\alpha = \beta = \gamma = -1$, i obdržíme pak $O'' = 0$, čímž vysloveno, že příčky spojující středy stran trojúhelníka s protějšími vrcholy v jediném bodu se protínají.

b) Nekonečně vzdálený bod přímky má ku dvěma jiným bodům téže přímky poměr dělicí hodnoty $+1$. Jest-li ku př. $\gamma = 1$, jest c' bodem úběžným a proto $cc' \parallel ab$, dále pak jest

$$\frac{O''}{O} = \frac{(\alpha\beta + 1)^2}{\alpha(\alpha\beta - \alpha + 1)}. \tag{11}$$

Kdyby také bylo $\beta = 1$, t. j. $bb' \parallel ac$, bude

$$\frac{O''}{O} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha} \tag{12}$$

a konečně i pro $\alpha = 1$ bude $O'' = 4O$. Geometrický význam jest tu zřejmý, totiž: přímky jdoucí vrcholy trojúhelníka rovnoběžně k protějším stranám, omezují trojúhelník čtyrnásobné velikosti původního.

c) Několik jen slov dostačí o významu hodnot 0 a ∞. Jest totiž dělicí poměr bodu roven nulle, sjednocuje-li se bod tento s prvním bodem základním, má pak hodnotu nekonečnou, splyne-li bod s druhým bodem základním. Neboť, aby ku př. $\gamma = 0$, jest třeba a stačí, když $ac' = 0$, kdežto $bc' = 0$ má za následek $\gamma = \infty$. Pro $\alpha = \beta = \gamma = 0$, jakož i pro $\alpha = \beta = \gamma = \infty$ přijdeme k výsledku, kterýž jest sám sebou patrný, totiž $O'' = O$.

4. Budiž konečně $\alpha = \beta = \gamma$; pak jest

$$\frac{O''}{O} = \frac{(\alpha^3 + 1)^2}{(\alpha^2 - \alpha + 1)^3} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha^2 - \alpha + 1}. \tag{13}$$

Odtud pro $\alpha = -1$, $+1$, 0, ∞ plynou výsledky již z hořejšího známé. Položivše pak $\alpha = 2$, obdržíme $O'' = 3O$, a vedeni jsme tím k větě: Prodloužíme-li každou stranu trojúhelníka týmž směrem o její délku, omezují přímky, spojující obdržené tak body koncové s protějšími vrcholy, trojúhelník trojnásobné velikosti původního. — Zajisté by pozorný čtenář bez obtíží dovedl tuto poučku zobecniti pro případ, kdybychom strany trojúhelníka týmž směrem o jich n-násobnou délku prodloužili.

III. Rozřešivše a rozboru podrobivše úlohu danou, jíž sám slavný geometr *J. Steiner* *) odporoučí, zabývejme se jí ještě dále, majíce na zřeteli trojúhelníky vepsané i opsané, kteréž v druhé řadě s původním souvisí.

1. Vytkneme-li totiž, $\triangle abc$ předpokládajíce, v stranách jeho body a', b', c' dle poměrů α, β, γ, stanoví každá ze stran trojúhelníka $a'b'c'$ v protější straně trojúhelníka abc bod nový. Tak přímka $a'b'$ seče stranu ab v bodu c_1', $b'c'$ stranu bc v bodu a_1' a $c'a'$ stranu ca v bodu b_1'. (Viz obr. 7.) Poměry dělicí

$$\frac{ac_1'}{bc_1'} = \gamma_1, \quad \frac{ba_1'}{ca_1'} = \alpha_1, \quad \frac{cb_1'}{ab_1'} = \beta_1, \tag{14}$$

lze jednoduše vyjádřiti pomocí původních. Neboť jest dle věty Menelaovy pro body $a'b'c_1'$ v přímce obsažené $\alpha\beta\gamma_1 = 1$ a obdobně jest $\beta\gamma\alpha_1 = 1$, $\gamma\alpha\beta_1 = 1$. Body $a_1'b_1'c_1'$ jsou vrcholy druhého trojúhelníka danému vepsaného; nazveme-li obsah jeho O_1', nabudeme dle vzorce (2)

$$\frac{O_1'}{O} = \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1 - 1}{(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1)(\gamma_1 - 1)}$$

a dle rovnic posledních

$$\frac{O_1'}{O} = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 1}{(\alpha\beta - 1)(\beta\gamma - 1)(\gamma\alpha - 1)}. \tag{15}$$

Spojme ještě každý z bodů $a_1'b_1c_1'$ s protějším vrcholem trojúhelníka abc. Přímky spojovací omezují trojúhelník $a_1''b_1''c_1''$ opsaný původnímu; obsah jeho O_1'' stanoví se vzorcem (7) a sice jest

$$\frac{O_1''}{O} = \frac{(\alpha_1\beta_1\gamma_1 + 1)^2}{(\alpha_1\beta_1 - \alpha_1 + 1)(\beta_1\gamma_1 - \beta_1 + 1)(\gamma_1\alpha_1 - \gamma_1 + 1)},$$

čili po dosazení hodnot a snadném upravení

$$\frac{O_1''}{O} = \frac{(\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 1)^2}{(\alpha^2\beta\gamma - \alpha\beta + 1)(\beta^2\gamma\alpha - \beta\gamma + 1)(\gamma^2\alpha\beta - \gamma\alpha + 1)}. \tag{16}$$

2. Podobně pokračujme, od trojúhelníka $a''b''c''$ vycházejíce. Přímky, vrcholy jeho s protějšími trojúhelníka abc spojující, určují ve stranách tohoto další body, totiž přímka cc'' ve straně

---

*) *Crelle*, **Journal für Mathematik, III. str. 201.**

ab bod c_2', aa'' ve straně bc bod a_2' a konečně bb'' ve straně ca bod b_2'. Také dělicí poměry těchto bodů, totiž hodnoty

$$\frac{ac_2'}{bc_2'}=\gamma_2, \quad \frac{ba_2'}{ca_2'}=\alpha_2, \quad \frac{cb_2'}{ab_2'}=\beta_2 \tag{17}$$

známe, jsou-li α, β, γ dány. Neboť, jelikož příčky aa', bb', cc_2' týmž bodem c'' procházejí, platí o nich věta Cevova a jest tudíž $\alpha\beta\gamma_2=-1$, a dle obdoby také $\beta\gamma\alpha_2=-1$, $\gamma\alpha\beta_2=-1$. Znajíce pak tyto hodnoty, obraťme se opět ku vzorci (2), abychom dle něho obsah O_2' vepsaného trojuhelníka $a_2'b_2'c_2'$ ustanovili. Bude tu

$$\frac{O_2'}{O}=\frac{\alpha_2\beta_2\gamma_2-1}{(\alpha_2-1)(\beta_2-1)(\gamma_2-1)}$$

a po náhradě veličin α_2, β_2, γ_2 původními

$$\frac{O_2'}{O}=\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2+1}{(\alpha\beta+1)(\beta\gamma+1)(\gamma\alpha+1)}. \tag{18}$$

Konečně též příčky aa_2', bb_2', cc_2' na nichž vrcholy trojúhelníka $a''b''c''$ leží, omezují nový opsaný trojúhelník $a_2''b_2''c_2''$; obsah jeho O_2'' dán jest rovnicí (7)

$$\frac{O_2''}{O}=\frac{(\alpha_2\beta_2\gamma_2+1)^2}{(\alpha_2\beta_2-\alpha_2+1)(\beta_2\gamma_2-\beta_2+1)(\gamma_2\alpha_2-\gamma_2+1)},$$

která zavedením hodnot α, β, γ v tuto se přetvoří:

$$\frac{O_2''}{O}=\frac{(\alpha^2\beta^2\gamma^2-1)^2}{(\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta+1)(\beta^2\gamma\alpha+\beta\gamma+1)(\gamma^2\alpha\beta+\gamma\alpha+1)}. \tag{19}$$

Aniž bychom vzorce takto vyvinuté šíře rozbírali, dokládáme toliko, že v obrazci znázorňujícím (obr. 7.) jest $\alpha=\beta=\gamma=-2$ a proto

$$O'=\tfrac{1}{3}\,O, \qquad O''=\tfrac{1}{7}\,O,$$
$$O_1'=\tfrac{7}{3}\,O, \qquad O_1''=\tfrac{25}{13}\,O,$$
$$O_2'=\tfrac{13}{25}\,O, \qquad O_2''=\tfrac{3}{7}\,O.$$

Při bedlivějším pohledu na obrazec neujde naší pozornosti zajímavá a nikoli náhodná okolnost, že přímky aa', $b'c'$, $b_2'c_2'$, pak přímky bb', $c'a'$, $c_2'a_2'$, jakož i přímky cc', $a'b'$, $a_2'b_2'$ po třech v jednom bodu se protínají. Který as toho důkaz?

IV. Úlohy řešené vedly nás k poznání dvou základních vět nauky o příčkách trojúhelníkových, totiž věty Menelaovy a věty Cevovy. V další úvaze poznáme, že odtud přirozeně plynou i poučky, harmonických vlastností trojúhelníka se týkající.

1. Buďtež nejprvé body a', b', c' ve stranách trojúhelníka abc tak umístěny, že jest

$$\alpha\beta\gamma - 1 = 0,$$

t. j. tyto tři body buďte položeny v určité přímce P (viz obr. 8.). Body, které jsme prvé a_1', b_1', c_1' znamenali, splynou tu s body a', b', c' a jest pak tedy nejen $O' = 0$, ale též $O_1' = 0$. Ne tak O'', O_1'', O_2'; neboť čítatelé zlomků, hodnoty těchto ploch vyjadřujících, při podmínce předpokládané v nullu nepřejdou Jelikož pak body a_1'', b_1'', c_1'' s body a'', b'', c'' se sjednotí, bude též $O_1'' = O''$, jak se o tom i výpočtem přesvědčiti možno. Jestiť, jak pro $\alpha\beta\gamma = 1$ ze vzorců (7) a (16) vyplývá,

$$O'' = O_1'' = \frac{4O}{\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2 - 2}. \quad (20)$$

Hleďme však dále k bodům a_2', b_2', c_2' a k jich dělicím poměrům. Z rovnic

$$\alpha\beta\gamma = +1, \qquad \alpha\beta\gamma_2 = -1,$$
$$\beta\gamma\alpha_2 = -1, \qquad \gamma\alpha\beta_2 = -1,$$

obdržíme dělením

$$\frac{\alpha}{\alpha_2} = \frac{\beta}{\beta_2} = \frac{\gamma}{\gamma_2} = -1. \quad (21)$$

Dva takové body v přímce, jichž poměry k dvěma bodům základním se toliko znaménkem liší, čili jichž dvojpoměr rovná se -1, slovou vzhledem k těmto *body harmonickými* čili *harmonicky sdruženými.* V případu našem jest tudíž

c_2' bod harmonický s c' vzhledem k bodům a, b,
a_2' „ „ „ a' „ „ „ b, c,
b_2' „ „ „ b' „ „ „ c, a.

Spojíme-li tyto body vespolek, vznikne $\triangle a_2'b_2'c_2' = O_2'$ o jehož velikosti platí rovnice z (18) odvozená

$$O_1' = \frac{2O}{\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 2}. \quad (22)$$

I poloha tohoto trojúhelníka jest význačná. Body a', b_2', c_2' mají ve stranách trojúhelníka abc dělicí poměry α, β_2, γ_2, o nichž platí podmínka $\alpha\beta_2\gamma_2 = 1$, tomu nasvědčující, že body ty v jediné leží přímce; totéž možno říci o bodech b', c_2', a_2' i bodech c', a_2', b_2'.

Spojíme-li však body a'_2, b_2', c_2' s protějšími vrcholy trojúhelníka abc, omezují přímky spojovací plochu O_2'', která se při hořejší podmínce dle vzorce (19) rovná nulle; t. j. tyto přímky sbíhají se v určitém jediném bodu p, jak i rovnice $\alpha_2\beta_2\gamma_2 = -1$ potvrzuje. K čemu jsme úvahami těmito dospěli, lze nyní v jedno shrnouti a následující trojvětou vysloviti:

Protneme-li strany trojúhelníka přímkou a sestrojíme-li v každé straně s průsečíkem obdrženým bod vzhledem k vrcholům harmonický, tedy

a) každý tento průsečík a body harmonické k druhým dvěma průsečíkům leží v jedné přímce;

b) přímky, spojující s protějšími vrcholy dva průsečíky a bod k třetímu harmonický, protínají se v jediném bodu;

c) přímky, spojující s protějšími vrcholy body k průsečíkům harmonické, protínají se v jediném bodu.

K znázornění poučky této nechať přispěje obr. 8., v němž jest $\alpha = -1$, $\beta = -3$, $\gamma = \frac{1}{3}$ a proto

$$O'' = O_1'' = \tfrac{4}{5}\, O, \quad O_2' = \infty.$$

2. Jeden ještě případ zbývá nám prozkoumati, aby vyšetřování naše bylo doplněno a ukončeno. Jest to případ s předešlým obdobný a vyznačený podmínkou

$$\alpha\beta\gamma + 1 = 0.$$

Body a', b', c' mají pak tu zvláštní polohu, že příčky aa', bb', cc' mají společný jediný bod p. (Viz obr. 9.). V bod tento přešel nejen $\triangle\, a''b''c''$, ale i $\triangle\, a_2''b_2''c_2''$, tak že jest $O'' = O_2'' = 0$.

Pozorujme dále body a_2', b_2', c_2'; tyto sjednocují se s a', b', c', tvoříce vrcholy trojúhelníka, jehož obsah jest

$$O' = O_2' = \frac{-2O}{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha - 2}. \tag{23}$$

Co se pak týče bodů a_1', b_1', c_1', v nichž se příslušné strany trojúhelníků abc, $a'b'c'$ protínají, platí o poměrech jich rovnice

$$\alpha\beta\gamma = -1, \quad \alpha\beta\gamma_1 = +1,$$
$$\beta\gamma\alpha_1 = +1, \quad \gamma\alpha\beta_1 = +1,$$

z nichž následuje

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = -1. \tag{24}$$

Jest tedy

c_1' bod harmonický s c' vzhledem k bodům a, b,
a_1' „ „ „ a' „ „ „ b, c,
b_1' „ „ „ b' „ „ „ c, a;

a poněvadž mimo to $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = +1$, jsou tyto tři body položeny v jedné přímce P. To dotvrzuje též vzorce (15), z něhož pro $\alpha\beta\gamma = -1$ plyne $O_1' = 0$.

Přímky aa_1', bb_1', cc_1' jsou stranami trojúhelníka opsaného $a_1''b_1''c_1''$, jehož velikost dána jest vzorcem odvozeným ze (16) užitím předpokládané podmínky

$$O''_1 = \frac{-4O}{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2 + 2}; \quad (25)$$

o zvláštní jeho poloze pak poučují nás rovnice z hořejších podmínek vyplývající: $\alpha_1\beta_1\gamma = \beta_1\gamma_1\alpha = \gamma_1\alpha_1\beta = +1$ a tomu nasvědčující, že přímky aa_1', bb_1', cc_1', dále bb_1', cc_1', aa_1' a konečně cc_1', aa_1', bb_1' po třech vždy v jediném bodu se sbíhají. Stručným výrazem všech těchto vlastností jest pak následující trojvěta, obdobná s onou, kterou jsme v odstavci předešlém vyvodili:

Vedeme-li vrcholy trojúhelníka tři příčky, které se vespolek v jediném bodu a protější strany ve třech bodech protínají, a sestrojíme-li v každé straně bod vzhledem k vrcholům s obdrženým průsečíkem harmonický, tedy

a) každé dva průsečíky a bod s třetím průsečíkem harmonicky leží v jedné přímce;

b) přímky, spojující s protějšími vrcholy kterýkoli průsečík a body k ostatním dvěma průsečíkům harmonické, protínají se v jednom bodu;

c) body k průsečíkům harmonické leží v jedné přímce.

Obrazec 9., v kterém jest $\alpha = -3$, $\beta = -2$, $\gamma = -\frac{1}{6}$ a tudíž

$$O' = O_2' = \tfrac{1}{7}\, O, \quad O_1'' = \tfrac{9}{8}\, O,$$

poskytuje znázornění věty vyslovené. —

Kdo se vyzná i jen v počátcích geometrie polohy, mohl by ovšem z úvah těchto odvoditi mnohé jiné ještě vztahy, zemena o bodech a paprscích harmonických, o homologii vzniklých trojúhelníků atd. To však nebylo účelem řádků těchto; nemělyť ony býti ničím jiným, než cvičením o vzájemném upotřebení algebry i geometrie, a vyšetřováním o souvislosti mezi velikostí a polohou.

O čarách a plochách druhého stupně.

Podává

J. S. Vaněček, professor v Jičíně.

1. Čáry a plochy druhého stupně možno vytvořiti několikerým spůsobem. Uvádíme zde některá vytvořování pomocí trojúhelníků a čtyřstěnů. Poučky zde uvedené jsou z části nové, z části pak známé.

2. Jest dána kuželosečka a uvnitř této nalézají se dva pevné body *a*, *b*. Spojíme-li kterýkoliv bod *v* kuželosečky s bodem *a* přímou čarou, protíná tato kuželosečku v druhém bodu *m* a druhá přímá *vb* v bodu *n*. Probíhá-li bod *v* kuželosečku, obaluje tětiva *mn* novou kuželosečku, která se dotýká první v bodech *x*, *y*, ve kterých ji protíná přímá *ab*.

Vlastnosť tuto můžeme podati duálně:

Pohybuje-li se trojúhelník vepsaný do kuželosečky tak, že se jeho dvě strany točí kolem dvou uvnitř kuželosečky ležících bodů, a jejich průsečný bod probíhá danou kuželosečku, pak obaluje třetí strana novou kuželosečku, jež se dotýká první dvojnásobně.

Trojúhelník opsaný kuželosečce pohybuje se tak, že jeho dva vrcholy probíhají dvě přímé čáry, které danou kuželosečku neprotínají; třetí vrchol opisuje novou kuželosečku, která se dané dotýká dvojnásobně.

3. Vytkněme na kuželosečce dva body *a*, *b*, jež jsou vrcholy trojúhelníku; jeho třetí vrchol *v* nalézá se na libovolné přímce *P*, která protíná kuželosečku ve dvou (reálných neb pomyslných) bodech *x*, *y*. Strana *av* protíná kuželosečku v bodu *m* a strana *bv* v bodu *n*. Probíhá-li vrchol *v* přímou čáru *P*, pak obaluje tětiva *mn* novou kuželosečku, která se dotýká dané kuželosečky v bodech *x*, *y*.

Můžeme tudíž říci: