Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O některých bodech geometrických. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 3, 141--148

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123193`

O některých bodech geometrických.*)

Napsal

V. Jeřábek, professor v Brně.

Dle významu, jaký jednotlivým bodům v geometrii se připisuje, jsou body ty zvláště pojmenovány.

1. *Asymptotický bod*, franc. point asymptotique, sluje bod v konečnu, ku kterému se bod po křivce bez konce přibližuje, aniž ho kdy dosáhne.

2. *Biplanární bod plochy* viz bod dvojný.

3. *Brianchonův bod*, franc. point de Brianchon. Šest přímek číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6 označených a křivky druhého stupně se dotýkajících tvoří jednoduchý křivce opsaný šestistran a zároveň šestiúhelník o vrcholích

$$(1\,2),\ (2\,3),\ (3\,4),\ (4\,5),\ (5\,6),\ (6\,1).$$

Přímky

$$\overline{(12)(45)},\ \overline{(23)(56)},\ \overline{(34)(61)},$$

které protilehlé vrcholy

$$(12),\ (45);\ (23),\ (56);\ (34),\ (61)$$

spojují, protínají se v témž bodu, který bodem Brianchonovým toho šestistranu se jmenuje.

4. *Centrálný* (středový) *bod* (franc. le point central).

a) Při středovém promítání jest b. centrálný pravoúhlým průmětem středu promítání v průmětně.

b) Chasles nazval bodem centrálným onen b. přímky povrchové plochy sborcené, jehož vzdálenost od přímky soumezné jest nejmenší. Týž bod jest bodem dotyčným roviny centrálné, která přímkou plochy sborcené prochází a na rovině asymptotické této přímky kolmo stojí. Roviny tečné přímkou plochy sborcené procházející a kolmo na sobě stojící určují v této přímce involuční řadu bodů dotyčných, střed této involuce jest bodem centralným přímky povrchové.

---

*) Popřáváme ochotně místa této práci důkladné, původně zaslané redakci „Ottova Slovníku Naučného," z níž tam však v článku „Bod" jen stručný výtah mohl býti publikován. *Redakce.*

5. *Bod cuspidální* viz bod vratu.

6. *Bod dělicí* v centrálném promítání a perspektivě jest úběžníkem přímek rovnoběžných, které odetínají od přímky prostorové A a od přímky P jdoucí stopou její v průmětně stejné délky. Spojnice úběžníku α, přímky A s dělicím bodem δ jest rovnoběžna s přímkou P, a $\overline{\alpha_1 \delta}$ rovná se vzdálenosti středu promítání od α_1. Z dělicího bodu promítá se centr. průmět $a_1 b_1$ úsečky ab přímky A na P v úsečku $a_0 b_0 = ab$.

7. *Bod dotyčný*, franc. point de contact. *a*) Má-li přímka s křivkou společný bod x a obsahuje-li zároveň některý z obou jeho nekonečně blízkých bodů sousedních, jest tečnou v onom bodu x, který bodem dotyčným křivky i tečny sluje.

b) Geometrickým místem přímek dotýkajících se v některém bodu plochy jest rovina tečná v onom bodu, který bodem dotyčným plochy i roviny se nazývá.

8. *Bod dvojný*, franc. le point double.

a) Projde-li pohyblivý bod křivky, proběhnuv veškeré body její, touž polohou dvakráte, povstává bod dvojný, jemuž náležejí buďto dvě realné tečny různé (dvojný bod průsečný) nebo dvě realné tečny splývající (dvojný bod dotyčný vůbec a bod vratový zvláště) anebo dvě tečny pomyslné (dvojný bod osamotnělý).

b) Lze-li na ploše určiti takovou polohu bodu A, že každá jím procházející rovina seče plochu v křivce K, mající v A svůj bod dvojný, jest A dvojným bodem plochy. Tečny bodu dvojného křivky K jsou tečnami inflekčními plochy a souhrn jejich tvoří plochu kuželovou stupně druhého. Zredukuje-li se ve zvláštním případě tato plocha kuželová ve dvě různé nebo splývající roviny, nazývá se dvojný bod resp. *biplanárním* nebo *uniplanárním* bodem plochy.

9. *Elliptický bod plochy.* Má-li involuce tečen sdružených v určitém bodu plochy pomyslné tečny samodružné (hlavní, inflekční), nazývá se bod dotyčný bodem elliptickým. Rovina tečná bodu elliptického seče plochu v křivce, mající v bodu dotyčném osamotnělý bod dvojný. Indicatrix ellipt. bodu jest křivka elliptická.

10. *B. Gergonne-ův*, franc. point de Gergonne. Vzhledem k trojúhelníku ABC jest bod tento bodem reciprokým (viz body reciproké) bodu Nagel-ova (v. t.) a průsečíkem přímek spojují-

cích vrcholy trojúhelníka s body, v nichž strany proti lehlé dotýkají se kruhu vepsaného.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c} = tg\frac{A}{2} : tg\frac{B}{2} : tg\frac{C}{2},$$

$$\delta_a = \frac{2P^3}{s(t^2-s^2)} \cdot \frac{1}{a(s-a)}, \quad \delta_b = \frac{2P^3}{s(t^2-s^2)} \cdot \frac{1}{b(s-b)},$$

$$\delta_c = \frac{2P^3}{s(t^2-s^2)} \cdot \frac{1}{c(s-c)}.$$

(Viz poznámku na konci článku tohoto.)

11. *Bod hlavní* v perspektivě jest pravoúhlým průmětem optického středu oka pozorovatele v průmětně (rovině obrazné). Týž bod jest úběžníkem přímek stojících kolmo na průmětně.

12. *Hyperbolický bod plochy.* Tvoří-li tečny sdružené v určitém bodu plochy kvadratickou involuci tečen s realnými tečnami samodružnými (hlavními, inflekčními), jest onen bod hyperbolickým bodem plochy. Rovina tečná bodu hyperbolického seče plochu v křivce, mající v bodu dotyčném svůj průsečný bod dvojný. Indicatrix tohoto bodu jest křivka hyperbolická.

13. *Bod imaginárný* (pomyslný). Má-li bod v soustavě souřadnic ($X \perp Y$) souřadnice $x = x_1 + i\xi_1$, $y = y_1 + i\eta_1$, kdež $i = \sqrt{-1}$, a x_1, ξ_1, y_1, η_1 jsou číselné hodnoty realné, nazývá se bodem imaginárným. Tak na př. má přímka s ellipsou dva body společné, které mohou býti buďto realné různé nebo splývající anebo imaginárné.

14. *Bod inflekční* viz bod obratový.

15. *Bod isolovaný* (osamotnělý), franc. le point isolé, jmenuje se onen bod křivky, v jehož nejbližším okolí žádný jiný reálný bod křivky neleží. Z bodu isolovaného jakožto středu opsaná kružnice s nekonečně malým poloměrem nemá žádného reálného bodu s křivkou společného. Tečny isolovaného bodu dvojného jsou imaginárné.

16. *Kruhový bod plochy*, franc. point ombilical. Je-li indicatrix určitého bodu plochy kružnicí, nazývá se onen bod kruhovým bodem plochy. Rovina tečná bodu kruhového seče plochu v křivce, mající v bodu dotyčném isolovaný bod dvojný s dvěma pomyslnými tečnami, které imaginárnými body kruhovými nekonečně vzdálené přímky roviny tečné procházejí.

Involuce sdružených tečen jest pravoúhlá. Trojosý ellipsoid a dvojplochý hyperboloid má čtyři a ellip. paraboloid dva reálné body kruhové. Body tyto lze určiti takto: Rovina stojící kolmo na největší ose X trojosého ellipsoidu nebo na reálné ose X dvojplochého hyperboloidu anebo na ose X ellip. paraboloidu protíná každou z těchto ploch v ellipse E. Plocha kulová dotýkající se kterékoliv z těchto ploch ve vrcholech větší osy ellipsy E, seče plochu tuto ve dvou kružnicích, jejichž roviny jsou rovnoběžny s rovinami tečnými bodů kruhových. Kruhové body nalézají se v onom průseku hlavním ploch uvedených, který jest obsažen v rovině určené osou X a menší osou ellipsy E a jsou zároveň souměrně sdruženy dle os tohoto průseku.

17. *Bod Lemoine-ův* (franc. point de Lemoine) vzhledem k trojúhelníku ABC jest isogonálně sdružen s těžištěm trojúhelníka (viz body isogonálně sdružené) čili průsečíkem symedian trojúhelníka ABC. Němci nazývají jej bodem Grebe-ovým. Vzdálenosti tohoto bodu od stran trojúhelníka jsou úměrny k jeho stranám.

$$x : y : z = a : b : c, \quad \alpha : \beta : \gamma = a^2 : b^2 : c^2,$$

$$\delta_a = \frac{2P}{m^2} a, \quad \delta_b = \frac{2P}{m^2} b, \quad \delta_c = \frac{2P}{m^2} c.$$

(Viz poznámku na konci článku tohoto.)

18. *Lesklý bod* povrchu nějakého tělesa (franc. point brillant) jest bod, ve kterém toliko jediný paprsek světelný se odráží a do oka pozorovatele vniká. Normála v lesklém bodu plochy půlí úhel mezi paprskem dopadajícím a odraženým, ležíc s ním v téže rovině.

19. *Bod mezní*, franc. point d'arrêt. *a)* Je-li toliko jediný oblouk křivky v určitém bodu náhle ukončen tak, že kružnice z něho s nekonečně malým poloměrem sestrojená křivku pouze v jediném bodu protíná, jmenuje se bod takový mezním bodem křivky. Má-li křivka dva body mezní, mezi kterými jest přetržena, sluje každý z nich přetržníkem.

b) Mezní bod křivky omezující na ploše stín vlastní jest ten, ve kterém se dotýká paprsek světelný této křivky. Tečna v obyčejném bodu meze stínu vlastního a paprsek světelný jdoucí jejím bodem dotyčným jsou tečnami sdruženými plochy. Sjednocením těchto tečen povstává tečna samodružná (hlavní, inflexní), jejíž bod dotyčný jest mezním bodem meze stínu vlastního.

20. *Bod násobný*, franc. le point multiple. *a*) Bod jest *n*-násobným bodem křivky, prochází-li jím *n* oblouků této křivky. Bodu *n*-násobnému křivky přísluší *n* tečen, které mohou býti buďto všechny různé nebo z části splývající anebo po dvou pomyslné. *b)* Vyznačuje-li se bod plochy tou vlastností, že každá jím procházející přímka má v tomto bodu s plochou *n* bodů společných, nazývá se onen bod *n*-násobným bodem plochy. Rovina jdoucí jakkoliv bodem *n*-násobným seče plochu v křivce, mající v témž bodu též svůj bod *n*-násobný.

21. *Bod Nagel-ův* (N), franc. point de Nagel, v trojúhelníku ABC jest bodem anticomplementárním (viz body complementární) středu O kruhu vepsaného. Značí-li T těžiště trojúhelníka ABC, jest $2OT = TN$. Týž bod jest průsečíkem přímek spojujících vrcholy trojúhelníka s body, v nichž vnější kruhy vepsané dotýkají se protilehlých stran.

$$\alpha : \beta : \gamma = (s - a) : (s - b) : (s - c) = cot\,\frac{A}{2} : cot\,\frac{B}{2} : cot\,\frac{C}{2},$$

$$\delta_a = \frac{2P(s - a)}{as}, \quad \delta_b = \frac{2P(s - b)}{bs}, \quad \delta_c = \frac{2P(s - c)}{cs}.$$

(Viz poznámku na konci článku.)

22. *Bod návratový*, franc. le point de rebroussement de deuxième espèce, jest bod vratový (v. t.), jehož sousední části křivky na téže straně jeho tečny se nalézají.

23. *Bod nekonečně vzdálený* (úběžný), franc. point à l'infini. Dělicím poměrem $\frac{AX}{BX}$, kdež A, B značí dva základní body určité přímky, jest toliko jediná poloha bodu X v přímce AB stanovena. Ježto $AX = AB + BX$, jest $\frac{AX}{BX} = \frac{AB}{BX} + 1$. Vzdaluje-li se bod X v přímce do nekonečna, obdrží poměr $\frac{AX}{BX}$ rovnicí poslední vyjádřený pro $lim\,BX = \infty$ jakož pro $lim\,BX = -\infty$

hodnotu $lim \frac{AX}{BX} = 1$, t. j. hodnota poměru $\frac{AX}{BX}$ blíží se kladné jednotce, když X v přímce buďto v jednom neb druhém směru vzdaluje se do nekonečna. Poněvadž každému poměru dělicímu toliko jediný bod přímky přísluší, musí i dělicímu poměru $+1$, aby jednoznačná tato příslušnost porušena nebyla, toliko jediný bod v přímce AB příslušeti, a to jest příčinou, že každé přímce jen jediný nekonečně vzdálený bod se přisuzuje. Ve smyslu zde uvedeném mají rovnoběžné přímky pouze jediný nekonečně vzdálený bod společný. Nekonečně vzdálené body všech přímek ležících v rovině nebo s rovinou rovnoběžných nalézají se v téže přímce, která se nazývá nekonečně vzdálenou čili úběžnou přímkou roviny. Body, které má přímka úběžná s nějakou křivkou společné, nazývají se nekonečně vzdálenými čili úběžnými body této křivky.

24. *Bod obyčejný*. Myslíme-li si z daného bodu M křivky jakožto středu poloměrem r sestrojenou kružnici, která seče křivku pouze ve dvou bodech X a Y ležících na téže straně tečny bodu M tak, že úhel XMY blíží se úhlu přímému, když délky poloměru r nekonečně ubývá, jest bod M obyčejným bodem křivky.

25. *Bod obratový* křivky, franc. point d'inflexion. Má-li proměnná tečna křivky kromě bodu dotyčného s křivkou ještě jiný bod společný a přiblíží-li se tento nekonečně k bodu dotyčnému, bude míti tečna v této zvláštní poloze s křivkou styk trojbodový. Tato zvláštní tečna sluje tečnou obratovou a její bod dotyčný bodem obratovým. Tečna obratová dotýká se křivky a zároveň ji seče v bodu obratovém přecházejíc s jedné strany tečny na druhou. Poloměr křivosti bodu obratového jest nekonečně veliký.

26. *Bod ombiliční, kruhový*, franc. point double ombilical. Isolovaný dvojný bod křivky, jehož pomyslné tečny procházejí imaginárnými body kruhovými, nazývá se bodem ombiličním křivky. Viz též kruhový bod plochy.

27. *Bod osamělý* viz bod isolovaný.

28. *Parabolický bod* plochy jest ten, jehož kvadratická involuce tečen sdružených má dvě splývající tečny samodružné

(hlavní inflekční). Rovina tečná bodu parabolického seče plochu v křivce mající v bodu dotyčném svůj bod vratu. Indicatrix skládá se ze dvou od bodu parabolického stejně vzdálených přímek.

29. *Bod převratový* (rožní, převratník), franc. point saillant. V bodu převratovém jsou ukončeny pouze dva oblouky křivky, mající v něm dvě různé tečny reálné. Kružnice s poloměrem nekonečně malým z bodu tohoto jakožto středu sestrojená, protíná křivku jen ve dvou bodech a poloměry, které těmito body procházejí, tvoří úhel lišící se od úhlu přímého nebo nulle se rovnajícího jen o veličinu konečnou.

30. *Bod přidružený v nekonečnu*, franc. point associé à l'infini (M, M_∞).

Bod M_∞ přidružený v nekonečnu k danému bodu M (α, β, γ) jest ten, jehož souřadnice jsou $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, $\alpha = \beta$.

(Viz poznámku na konci článku tohoto).

31. *Bod rozdvojení*, franc. point de dédoubement. Budiž $y = \varphi(x)$ rovnicí křivky mající v bodu B, jehož pravoúhlé souřadnice jsou $x = a$, $y = \varphi(a)$, svůj bod mezní, a pořadnice křivky po pravé straně bodu tohoto buďtež realné, tedy po levé imaginárné. Dále budiž dána křivka druhá $y = \psi(x)$, jejíž bod $C[x = a, \ y = \psi(a)]$ jest bodem dvojným, a pořadnice $\psi(a)$ tečnou křivky tak, že přímky s touto pořadnicí rovnoběžné pro $x > a$ mají s křivkou nejméně tři body společné. Křivka, jejíž rovnice jest

$$y = \varphi(x) + \psi(x),$$

má v bodu

$$A[x = a, \quad y = \varphi(a) + \psi(a)]$$

bod rozdvojení. Bod tento poprvé objevil J. Plateau (1877) a nazval jej *point de dédoubement*.

32. *Bod řídící*, franc. point directeur, ve třech soumístných soustavách podobných jest středem perspektivním trojúhelníka neproměnlivého (viz body neproměnlivé) a trojúhelníka samodružnými body těchto soustav určeného (trojúhelník podobnosti).

33. *Bod samodružný* (dvojný), le point double. Jsou-li dvě soustavy prostorové nebo rovinné anebo dvě soustavy bodů téže racionálné křivky v určité sdruženosti (m, n) tak, že každému bodu jedné soustavy přísluší n bodů soustavy druhé a každému bodu soustavy druhé m bodů soustavy prvé, a splynouli dva sdružené body těchto soustav v bod jediný, nazývá se bod takový samodružným. Jsou-li dvě soustavy prostorové ve sdruženosti (m, n), a přísluší-li každé přímce soustavy prvé a druhé křivka stupně n'-tého resp. m'-tého, jest ve zmíněných soustavách $(m + n + m' + n')$ bodů samodružných. Dvě soumístné soustavy rovinné, které ve sdruženosti (m, n) se nalézají tak, že každá přímka obsahuje α dvojin bodů sdružených, mají $(m + n + \alpha)$ bodů samodružných. Ve dvou soumístných a spolu kvadraticky sdružených soustavách vyskytují se 4 body samodružné. Dvě soumístné soustavy projektivné mají vůbec tři body samodružné, a jsou-li soustavy tyto podobnými, jest jeden jejich realný samodružný bod v konečnu, a druhé dva nalézají se v nekonečnu v imaginárných bodech kruhových. Je-li sdruženosť dvou soustav bodových ležících na př. v téže kuželosečce nebo přímce (m, n) značná, jest v soustavách těch $(m + n)$ bodů samodružných. Pro $m = n = 1$ obdržíme sdruženosť projektivnou, a tedy dva body samodružné.

34. *Bod singulární* viz body zvláštní.

(Dokončení.)

Problém z geometrické pravděpodobnosti.

Napsal

Augustin Pánek.

K danému kruhu veďme tři libovolné tečny; jak veliká jest pravděpodobnosť, že bude onen kruh vepsán v trojúhelník, těmi tečnami způsobený.

Dejme tomu, že na daném kruhu středu O jsou dotyčné body A, B, C. Buďtež body A, B kdekoliv, nemůže arc AB býti větší polokruhu. Veďme z bodů těch průměry AA′, BB′ i po-