František Machovec
O normálách a středech křivosti křivek Cassiniho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 3, 130--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123195

V tom smyslu není důkazu pro porovitosť všech hmot; u hmot jako sklo, rtuť, krystally... smíme jistě míti oprávněnou pochybnosť v ohledu tom. I známý, stále uváděný pokus akademie del Cimento z r. 1661 se zlatou koulí, vodou naplněnou, zasluhoval by opětné provedení, aby se určitě (zejmena i mikroskopicky) prozkoumati mohlo, *co* se vlastně při pokusu tom stalo.

Jde-li se však hloub ku konstituci hmoty, a přijme-li se konstituce molekularná, tu se celý náš názor podstatně mění: v prázdném prostoru plovou jednotlivé, vesměs od sebe oddělené molekuly a na povrchu jest souvislá prázdná plocha tečkována hmotnými body, kdežto vidí porovitosť souvislou hmotnou plochu tečkovanou prázdnými body. Či nazveme shluk mušek v letě nás obklopující porovitým?

Tím méně lze z porovitosti vykládati roztažitelnosť a stlačitelnosť hmoť. Roztahuje-li neb stahuje-li se rtuť s proměnou teploty, nebudeme si děj ten přece představovati dle analogie houby, kterou můžeme pro pory její *stlačiti,* nemůžeme však *roztáhnouti!*

(Pokračování.)

O normálách a středech křivosti křivek Cassiniho.

Podává

František Machovec,

prof. v Karlíně.

I.

Ve III. svazku časopisu „Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen" z r. 1890, Mannheim*) odvozuje geometricky konstrukci středů křivosti křivek Cassiniho. Ukáži, jak lze rozřešiti mou methodou tuto úlohu.

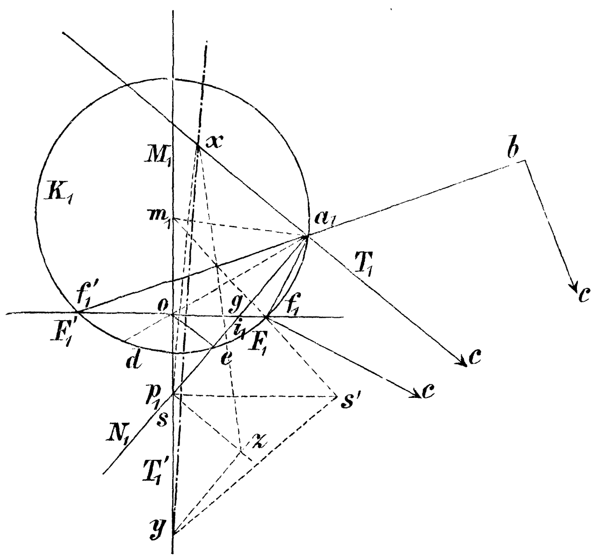
Buďtež f_1 a f_1' (viz obr.) ohniska a a_1 libovolný bod Cassiniho křivky A_1, o střed úsečky f_1f_1' a M_1 kolmice v bodě o na f_1f_1' vztýčená čili pobočná osa křivky A_1.

---

*) „Determination géometrique du centre de courbure de l'elipse de Cassini" str. 14—16.

Mannheim vychází od této konstrukce tečny:

Průvodič $f_1'a_1$ prodlouží se o vlastní délku až do bodu b, dále se učiní $bc \perp f_1'b$ a $f_1c \perp f_1a_1$, načež tečna T_1 v bodě a_1 prochází průsečíkem c těchto kolmic.*) Z této konstrukce bylo by lze snadno odvoditi konstrukci středu křivosti. Učinil jsem to skutečně, ale poněvadž konstrukce, ku které jsem dospěl, není dosti jednoduchá, neuvádím jí tuto. Odvodím z konstrukce tečny, která byla právě popsána, jistou vlastnosť normál křivek Cassiniho a té užiji k sestrojení středů křivosti.



Jmenujeme-li α a α' úhly, které tvoří normála N_1 s průvodiči f_1a_1 a $f_1'a_1$, jest z uvedené konstrukce zřejmo, že

$$\sin\alpha : \sin\alpha' = f_1a_1 : f_1'a_1.$$

Spojíme-li a_1 s o, jest

$$\sin f_1a_1o : \sin oa_1f_1' = f_1'a_1 : f_1a_1,$$

*) Srovnej s tím konstrukci uvedenou ve „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek“ str. 23.

z čehož jde dle předešlé úměry

$$d = \sphericalangle oa_1f'_1 \text{ a } \alpha' = \sphericalangle f_1a_1o.$$

Již z tohoto vztahu vychází na jevo jednoduchá konstrukce normály, ale ani tou nedospěli bychom k jednoduché konstrukci středu křivosti.

Opišme trojúhelníku $a_1f_1f'_1$ kružnici K_1 a označme d a e druhé průsečníky přímek a_1o a N_1 s touto kružnicí. Z předešlého výsledku jest patrno, že arc f'_1d = arc ef_1 a poněvadž body f_1 a f'_1 jsou k M_1 souměrně položeny, mají i body d a e tuto vlastnosť. Z toho ale jde, že $\sphericalangle eof_1 = f_1oa_1$ a z toho zase, že body a_1 a e jsou body p_1 a g harmonicky odděleny. Při tom značí g průsečník normály s hlavní osou křivky A_1. Tím odůvodněna jest věta:

Normála křivky Cassiniho v kterémkoli jejím bodě a_1 prochází polem hlavní osy této křivky vzhledem ke kružnici obsahující bod a_1 i obě ohniska.

Dle této věty lze sestrojiti normálu křivky A_1 v bodě a_1 takto: Trojúhelníku $a_1\ f_1f'_1$ opíšeme kružnici K_1 a v některém z ohnisek, na př. v f_1, sestrojíme k ní tečnu. Průsečníkem p_1 této tečny s pobočnou osou prochází žádaná normála.

II.

Vlastnosť normály právě vytčená hodí se dobře k vyšetření středů křivosti křivky A_1.

Pokládejme body f_1 a f'_1 za orthogonálné průměty přímek F a F' kolmých k průmětně π a přímku M_1, na níž jsou středy všech kružnic K_1, za průmět přímky M, jejíž stopou jest bod $s \equiv p_1$. Při tom vylučme dva případy a to, když bod p_1 jest v nekonečné vzdálenosti a když jest na přímce $f_1f'_1$. První případ nastane pro kružnici K_1 sestrojenou nad průměrem $f_1f'_1$, druhý pro kružnici poloměru nekonečně velkého, přecházející ve přímku $f_1f'_1$. Po vyloučení těchto dvou případů lze míti přímku M za nakloněnou k průmětně.

Kružnice K_1 pokládejme za průměty kružnic K, jejichž roviny jsou rovnoběžné s π a jejichž středy m jsou na přímce M. Tyto kružnice tvoří plochu K (hyperboloid jednodílný), která protíná plochu válcovou procházející křivkou A_1 kolmo k rovině průmětné ve křivce A, jejímž průmětem jest Cassiniho křivka A_1.

Střed m každé kružnice K spojen jest s tím bodem f přímky F (nebo F'), s nímž má stejnou od průmětny vzdálenosť a na každou z těchto spojnic mf vztyčena jest v bodě f kolmice rovnoběžná s rovinou π. Přímky mf a tyto kolmice tvoří dva hyperbolické paraboloidy H a H', z nichž druhý protíná rovinu promítající přímky M ve křivce P. Tato křivka s křivkou A a průmětnou π jsou řídícími útvary plochy sborcené N, jejíž průmět má za obrys evolutu křivky A_1. Abychom sestrojili bod, v němž tato evoluta dotýká se přímky N_1, čili střed křivosti křivky Cassiniho v bodě a_1, jest nutno znáti stopy tečen křivky A v bodě a a křivky P v bodě p.

K sestrojení první z těchto stop uvažme, že plochy K dotýká se podél kružnice K plocha kuželová mající střed v bodě s. Z toho jde, že stopou tečné roviny této plochy v bodě a jest kolmice s bodu s na poloměr m_1a_1 sestrojená a že průsečník x této kolmice s tečnou T_1 jest stopou tečny T křivky A v bodě a.

Přímka f_1s jest stopou paraboloidu H, tudíž přímka m_1f_1 stopou paraboloidu H'. Učiníme-li $p_1s' \perp M_1$, obdržíme průmět povrchové přímky plochy H', pro niž jest s' stopou a vedeme-li tudíž tímto bodem rovnoběžku s f_1p_1, obdržíme stopu roviny tečné plochy H' v bodě p a v průsečníku y této stopy s M_1 stopu tečny T' křivky P v bodě p.

Plochy N dotýká se dle přímky N hyperbolický paraboloid o řídících útvarech T, T' a π. Obrysem průmětu tohoto paraboloidu bude parabola dotýkající se přímky N_1 v žádaném středu křivosti. Tato parabola bude se dotýkati i přímek $T_1, T'_1 \equiv M_1$ a xy, poněvadž tyto přímky jsou průměty přímek onoho paraboloidu.

Z toho jest patrna tato konstrukce středu křivosti křivky Cassiniho v bodě a_1:

a) Spusťme s bodu p_1, v němž normála v bodě a_1 protíná pobočnou osu, kolmici na poloměr kružnice K_1 obepsané $\triangle\, a_1f_1f'_1$, který prochází bodem a_1; průsečník této kolmice s tečnou v bodě a_1 budiž označen x.

b) V témž bodě p_1 vztyčme kolmici na osu pobočnou a v jejím průsečníku s poloměrem kružnice K_1, který prochází ně-

kterým ohniskem, kolmici na tento poloměr. Průsečník této kolmice s pobočnou osou budiž označen y.

Parabola, která má za tečny přímku xy, osu pobočnou a tečnu a normálu křivky Cassiniho v bodě a_1, dotýká se normály ve středu křivosti místa a_1.

Vedeme-li tedy na př. bodem p_1 rovnoběžku s T_1 a bodem y rovnoběžku s N_1 a je-li z průsečník těchto dvou přímek, protíná přímka zx normálu N_1 v žádaném středu křivosti i.

Z provedené konstrukce vyplývá úměra

$$m_1 o : op_1 = m_1 p_1 : p_1 y,$$

z níž obdržíme
$$m_1 p_1^2 = m_1 o \,.\, m_1 y;$$

tohoto vztahu lze užiti k jinému snadnému sestrojení bodu y.

Mannheim dospívá v pojednání shora jmenovaném k této konstrukci středu křivosti:

Délka $a_1 c$ rozdělí se na čtyři stejné díly. Prvním dělícím bodem n od bodu a_1 sestrojí se rovnoběžka s normálou N_1 a průsečníkem jejím r s průvodičem $a_1 f_1$ vede se rovnoběžka s průvodičem druhým. Její průsečník s hlavní osou spojí se s bodem a_1 a bod u, v němž tato spojnice protíná přímku nr s bodem f_1. Přímka uf_1 protíná N_1 ve středu křivosti i_1.

Myslím, že vlastnosť bodu i_1, kterou jsem odvodil, snáze se pamatuje, než konstrukce Mannheimova. Užíváme-li při konstrukci dvou trojúhelníků a kružidla a počítáme-li jednoduchosť konstrukce jako Lemoine*), jest jednoduchosť pro obě konstrukce vyjádřena číslem 30.

III.

Konstrukce, kterou jsem odvodil má tu vadu, že nelze ji užiti pro body křivky A_1 ležící na kružnici, která má $f_1 f'_1$ za průměr a pro vrcholy na ose hlavní.

Pro první druh bodů jest bod p_1 bodem úběžným a přímka M byla by $\parallel \pi$, pro druhý druh bod p_1 jest kdekoli na $f_1 f'_1$ a bod m_1 jest úběžný, tak že přímka M musila by býti v prů-

7) „Sur la mesure de la simplicité dans les tracés géométriques“ (Journal de mathématiques élémentaires, 1889).

mětně; ani pro jeden ani pro druhý druh bodů úvahy odst. II. neplatí. Z té příčiny odvodím z konstrukce výraz pro poloměr křivosti a z toho poznáme velikosť poloměru křivosti i pro tyto zvláštní body. Pro jednoduchosť vynechány jsou v následujícím odvozování ukazovatelé průmětů.

Budiž

$$of_1 = c, \quad oa = r, \quad f'a = r_2, \quad fa = r_1, \quad r_1 r_2 = k^2,$$

při čemž k^2 jest pro všecky body křivky Cassiniho veličinou stálou; dále

$$\sphericalangle\, xsa = \sphericalangle\, xam = \sphericalangle\, aof = \varphi, \qquad \sphericalangle\, f'af = \sphericalangle\, omf = \omega$$

a poloměr křivosti $ai = \varrho$.

Především jest

$$\varrho : ap = ax : (ax + pz);$$

avšak

(1) $$ap \,.\, ep = fp^2 = \frac{c^2}{\cos^2\omega}$$

a $$ap : ep = r : oe.$$

Poněvadž $\triangle\, oef \sim \triangle\, ofa$, jest poměr

$$oe : c = c : r, \quad \text{tedy} \quad oe = \frac{c^2}{r},$$

což, vloženo do předcházející úměry, poskytne

(2) $$ap : ep = r^2 : c^2.$$

Z (1) a (2) rovnice obdržíme

(I) $$ap = \frac{r}{\cos\omega}.$$

Dále jest

(II) $$ax = ap \,.\, \operatorname{tg}\varphi = \frac{r \operatorname{tg}\varphi}{\cos\omega},$$

(3) $$pz = py \,.\, \sin\varphi',$$

při čemž dle odst. II.

$$py : mp = op : mo, \quad \text{a} \quad \varphi' = \sphericalangle\, opa.$$

Z toho obdržíme snadno

(4) $$py = \frac{c \sin \omega}{\cos^3 \omega}.$$

Z $\triangle$ *apo* plyne

$$\sin \varphi' : \cos \varphi = r : ap$$

čili

$$\sin \varphi' : \cos \varphi = r : \frac{r}{\cos \omega}$$

t. j.

(5) $$\sin \varphi' = \cos \varphi \cos \omega.$$

Vložíme-li hodnoty ze (4) a (5) rovn. do (3), obdržíme

(III) $$pz = \frac{c \cos \varphi \sin \omega}{\cos^2 \omega}.$$

Vyjádříme nyní ještě $\sin \omega$ a $\cos \omega$ veličinou c, r, φ a k^2. Plocha

$$\triangle ff'a = \frac{r_1 r_2 \sin \omega}{2} = cr \sin \varphi,$$

z čehož jde

(IV) $$\sin \omega = \frac{2cr \sin \varphi}{k^2}.$$

Užijeme-li na $\triangle aff'$, $\triangle aof$ a $\triangle aof'$ věty Carnotovy pro strany ff', r_1 a r_2 a sečteme-li rovnice tím vzniklé, nabudeme rovnice

(V) $$\cos \omega = \frac{r^2 - c^2}{k^2}.$$

Užitím rovnic I—V obdržíme z původní úměry snadno

$$\varrho = \frac{k^2}{r + \frac{c^2}{r} \cos 2\varphi},$$

kterýž výraz shoduje se s výrazem, který pro poloměr křivosti křivky Cassiniho odvodil E. Reusch.*)

*) „Normale und Krümmungshalbmesser des Cassinischen Ovals" (Mathem.-naturwissenschaftliche Mitteilungen, II. B. 1889). V témž článku podává Reusch jednoduchou konstrukci středů křivosti této křivky.

Pro body na kružnici sestrojené nad průměrem ff' jest

$$r = c, \quad k^2 = r_1 r_2 = 2c^2 \sin\varphi$$

a tedy

$$\varrho = \frac{c \sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Pro vrcholy na hlavní ose, jest $r = c$ a $\varphi = 0$ nebo π, tedy

$$\varrho = \frac{k^2}{2c}.$$

Pro vrcholy křivky Cassiniho ležící na ose pobočné poskytuje má konstrukce zajímavý výsledek.

Budiž v jedním z těchto vrcholů a L kružnice obepsaná $\triangle vff'$. Bod x jest v tomto případě bodem úběžným tečny a bod y, tudíž i body z a i, splynou s bodem p. Z toho jest patrno:

Střed křivosti křivky Cassiniho v některém jejím vrcholu v ležícím na ose pobočné jest polem hlavní osy vzhledem ke kružnici obepsané trojúhelníku vff'.

IV.

Z vlastnosti normál křivky Cassiniho, která byla odvozena v odst. I., jsou patrny věty:

Normály křivek Cassiniho o společných ohniskách v bodech, v nichž je protíná kterákoli kružnice K tato ohniska obsahující, procházejí jediným bodem osy pobočné. Tento bod jest polem hlavní osy těchto křivek vzhledem ke kružnici K.

A naopak:

Sestrojíme-li z libovolného bodu p pobočné osy křivek Cassiniho o společných ohniskách k těmto křivkám normály), jsou paty těchto normál na kružnici, která oběma ohnisky prochází a pro niž bod p jest polem hlavní osy těchto křivek.*

Z věty první vyplývá:

Kružnice mající za průměr délku obsaženou mezi ohnisky

---

*) Mezi tyto normály nepočítáme osu pobočnou. Z každého bodu osy pobočné jsou možny kromě této osy čtyři normály ke křivce Cassiniho.

konfokálných křivek Cassiniho, protíná tyto křivky v bodech, v nichž normály jsou rovnoběžny s pobočnou osou.

Jestliže kružnice K prochází některým vrcholem v křivky Cassiniho, který jest na ose pobočné, splynou dva průsečníky a tudíž i dvě ze čtyř normal ve větě první vytčených v jedno a jejich průsečník p jest středem křivosti místa v. Tím dokázána jest znova vlastnosť na konci odst. III. vytčená.

Drobné pokusy fysikální.

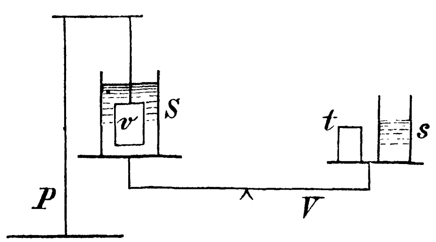
Podává

Karel Pánek,

prof. akad. gymn. v Praze.

I. Zavěsíme-li těleso nějaké do kapaliny, jest váha kapaliny o tolik větší, kolik těleso vytlačilo kapaliny; nebo jinými slovy: kdyby část kapaliny ztuhla, nemění se tím rovnováha částí ostatních. (Důkaz Stevinův pro spojité nádoby). Zákon tento můžeme snadno quantitativně dovoditi:

V (obr. 1.) jsou Robervalovy váhy krámské, nyní skoro všude užívané (s prostorem nad mískami volným); na levou mísku dáme sklenici s vodou (S), na pravou stranu prázdnou skleničku (s) s tárou (t), až nastane rovnováha.



Obr. 1.

Za těleso do kapaliny zavěšené užijeme nejlépe válečku z Archimedova pokusu, ježto dutina okůvku, do něhož váleček těsně zapadá, nám dává jeho obsah.