

Josef Velišek

Experimentální příspěvek k problému turbulentního proudění kapalin

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 3, 197--211

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123204>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1922

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Končí-li řada (7) mimo v levo též na pravé straně, je-li tedy mimo  $k_j = 0$  též  $h_i = 0$ , značí tato podmínka

$$h_i = k_{i+1} - \frac{d^2 l}{dx^2} K_{i,j} = 0 \text{ čili } K_{i,j+1} = 0,$$

takže  $B$  má hodnotu téhož tvaru jako  $A$ .

Invarianty rovnice  $f$  s řadou (7) oboustranně zakončenou možná tedy dvojím způsobem stanoviti

$$h = \frac{d^2 h}{dx^2} H_{i-1} = \frac{d^2 l}{dx^2} K_j, \quad k = \frac{d^2 l}{dx^2} H_i = \frac{d^2 l}{dx^2} K_{j-1}$$

a možná dosazením hodnot za  $A, B$  přesvědčiti se přímo, že dvojí hodnota pro každý invariant jest totožná. Podle toho možná dát rovnici  $f$  symmetrický tvar

$$f = y'' + \left( \frac{dl}{dx} \frac{H_i}{K_j} \right) y' - \left( \frac{d^2 l}{dx^2} H_i \right) y = 0.$$

Na př.  $i, j = 0, 0; 0, 1; 1, 1$  obdržíme při  $a = 0$  rovnice resp.

$$y'' + \frac{dA}{dx} y' = 0, \quad y'' + \frac{dA}{dx} y' + \frac{d^2 A}{dx^2} y = 0,$$

$$y'' + \left( \frac{dA}{dx} + \frac{d^2 A}{dx^2} \right) y' + \left( 2 \frac{dA}{dx^2} + \frac{d^3 A}{dx^3} \right) y = 0$$

v nichž hodnota  $A$  jest určitá, v každé rovnici ovšem jiná a určí se dle předešlého.

## Experimentální příspěvek k problému turbulentního proudění kapalin.

Napsal *Josef Velišek*.

Proudění hydraulické čili turbulentní poprvé konstatoval, odlišil a popsal Hagen\*) r. 1854. Zkoumal ve své práci vliv teploty a tlaku na vznik turbulence a pokusil se též o jistou teorii, jež však v důsledku toho, že vyšel při jejím odvozování z falešného předpokladu o lineárním rozdělení rychlostí po průměru trubice, byla nesprávná. Přes to však jest jeho práce důležitá: obsahuje odlišení nového druhu proudění a řadu cenných poznámek vztahujících se ke zkoumanému problému.

Práce Hagenova položila otázku, zda v novém druhu proudění platí také obecné rovnice hydrodynamické a na čem závisí t. zv. kritická rychlost, t. j. rychlost, při níž končí průtok Poiseuilleův a začíná turbulence. Jak takové otázky řešiti, ukázal ve svých kía-

\*) Abhandl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. 1854, Berlin.

sických pracích Osborne Reynolds.\*) Za předpokladu platnosti obecných rovnic hydromechanických a mechanické podobnosti kapalin při proudění odvodil kritérium pro kritickou rychlost  $U_c$ :

$$U_c = \varepsilon \frac{\eta}{\rho \cdot R}$$

kdež  $\varepsilon$  jest t. zv. Reynoldsův parametr,  $\eta$  viskozita,  $\rho$  spec. hmota příslušné kapaliny a  $R$  jistá lineární dimenze kapiláry. Hodnotu  $\varepsilon$  vypočetl 500, prakticky dostal pro vodu 1000. Formuli verifikoval experimentálně.

Již před Reynoldsem zabýval se hydraulickým prouděním Darcy\*\*) v roce 1854. Výsledky jeho prací liší se však značně od prací Reynoldsových, neboť užíval k pokusům kovových nastavených trubcí místo skleněných.

Také Couette\*\*\*) v roce 1890 zkoumal turbulentní proudění. Zabýval se studiem vlivu rozměrů trubice na vznik turbulence a výsledky jeho jsou ve shodě s kritériem Reynoldsovým.

Dosavadní práce prováděly se velkou většinou s vodou, kapalinou nejobecnější a tudíž prvnímu zkoumání nejsnáze se naskytne. Jest patrná zajímavost a důležitost výzkumu a srovnání zjevů turbulentního proudění u různých kapalin. Bose čekal od srovnávacích měření vyjasnění v otázce, zda a jak by se daly příslušné konstanty rozložit na aparátové, materiálové a event. i universální. Dosavadní metody operovaly s aparáty takových dimensí, že znemožňovaly nákladností pokusů srovnávací měření. Zmenšení pak rozměrů mělo v zápětí vznik takových experimentálních potíží, že jemné pozorování zákonitostí hrubě se jevících u větších přístrojů bylo obyčejně téměř znemožněno.

Ke srovnávacím měřením překročili r. 1909 Bose a Rauert.†) Cílem jejich práce bylo v prvé řadě podat pokusná data. Pracovali s aparátem, jehož užíval F. W. Willers††) při výzkumu nehomog. systému kyseliny máselné a vody. Zkoumání podrobili 9 látek: vodu, toluol, benzol ethylalkohol, ethylacetát, aceton, chloroform, bromoform a rtuť. Experimentální data uložili do tabulek a publikovali bez příslušné diskuse a matemat. zpracování. K tomu přikročili po dvou letech Emil a M. Boseovi.†††) Důležitým výsledkem jejich práce je verifikace Reynoldsova kritéria pro různé kapaliny. Pro laminární průtok platí Poiseuilleův zákon, který v případě, že měříme jeden a týž volum kapaliny za stejné teploty tímž aparátem, zjednoduší se na výraz:

$$p \cdot t = K,$$

\*) Phil. Trans. Lond. R. Soc. 174, 1883 a 186, 1895.

\*\*) Mémoires des Savants Étrangers, t. XV.

\*\*\*) Journ. de Physique 1890, t. IX.

†) Physik. Zeitschr. X. 407, 1909.

††) Physik. Zeitschr. X. 244, 1909.

†††) Physik. Zeitschr. XII. 4, 1911.

kdež  $p$  značí účinný tlak a  $t$  dobu průtoku, konstanta  $K$  závisí na dimensích aparátu, teplotě a na povaze látky. Jednoduchou transformací lze obdržeti:

$$\log \frac{1}{t} = \log p - A$$

což jest rovnice přímky v systému koordinát  $\log p$ ,  $\log \frac{1}{t}$  svírající s osou abscis úhel  $45^\circ$ . Proudění turbulentní dá se vyjádřiti také přímkou, ale o jiném sklonu:

$$\log \frac{1}{t} = \frac{1}{n} \log p + A'$$

Tuto rovnici hledali z nalezených dat a vzhledem k tomu, že odchylky od hodnot příslušných této rovnici sledovaly jistou tendenci srouce až 10krát větší než pozorovací chyby, soudili, že lze měření vystihnouti rovnicí:

$$\log \frac{1}{t} = B + C (\log p) + D (\log p)^2 + E (\log p)^3.$$

Avšak tato namáhavá práce nepřinesla v dalším žádných výsledků.

V pracích těchto pokračoval Boseův žák Walther Sorkau.\*) Methoda a aparatura, již při těchto pracích užito bylo, bude popsána níže. Zkoumání podrobena voda, ethylalkohol, ethylacetat, chloroform, trimethylethylen, amylen, aceton. Zajímavé chování jevil chloroform:

přímka v systému koordinát  $\log p$ ,  $\log \frac{1}{t}$  vyznačující svým sklonem k ose abscis proudění hydraulické, od jistého tlaku počínajíc, jevila náhlý přechod: body další ležely dosti rozháraně. Po jisté hodnotě tlaku jevíly další body opět pravidelnost znovu na přímce, avšak o jiném sklonu. Vzhledem k tomu, že poloha bodu diskontinuity závisela na teplotě určitým způsobem, usuzoval Sorkau, že zde jde o nové dva druhy proudění, které označil turbulence II., resp. III; označení turbulence I. ponechal turbulence Hagenově. Zajímavé jest, že při vyšších teplotách obor turbulence II. ztrácel stabilitu. Zpracováním výsledků svých měření odvodil Sorkau pro turbulence I. rovnici:

$$\sqrt[3]{p^2} \cdot t \cdot e^{273/\theta} = C,$$

v níž  $p$  značí účinný tlak,  $t$  dobu průtoku,  $\theta$  teplotu abs.,  $e$  základ přiroz. logaritmní a  $C$  jistou konstantu závislou na chem. povaze příslušné kapaliny. Tuto rovnici proklamoval pak za universální

\*) Physik. Zeitschr. XII. 1911. 14, VIII. 1912. 17, XIV. 1913. 16, XIV. 1913. 17, XVI. 1915. 6, a Ueber den Einfluss von Temperatur, spez. Gewicht und chem. Konstitution auf die Turbulenzreibung, Dissert. Greisswald 1912.

zákon, který v turbulenci I. nastupuje v platnost místo obecných rovnic hydrodynamických. Podobně jako chloroform chovaly se i ostatní kapaliny.

Kritiku těchto prací Sorkauových podali současně Cl. Schaefer a G. Frankenberg, jakož i G. Mie.\*) První dva tvrdili proti Sorkauovi a dokázali, že při rovnici Sorkauově nelze mluvit o nějakém universálním zákoně pro turbulenci I. Na základě dimensionálních úvah ve spojení s hydrodynamickými rovnicemi odvodili pro turbulentní proudění obecný vztah:

$$p^n \cdot t = N \rho^{n-1} \eta^{2-n} L^{2n-2},$$

kdež  $\rho$  značí hustotu,  $\eta$  viskozitu,  $L$  jistou lineární dimenzi kapiláry a  $N$  konstantu, která už nezávisí na viskozitě a spec. hmotě. Touto rovnicí jest dána hodnota pravé strany rovnice

$$p^n t = \text{Const.}$$

a současně teploturní závislost její, neboť

$$p^n \cdot t = N [\rho_0 (1 - a\theta)]^{n-1} [\eta_0 (1 - b\theta + \gamma\theta^2)]^{2-n} L^{2n-2}$$

Tato rovnice není žádný universální zákon, jenž by platil na místě obecných rovnic hydromechaniky. Rovnici tuto zkoušeli na experimentálních datech a ze shody počtu s experimentem soudili, že také v turbulentním proudění platí hydrodynamické rovnice. Toto tvrzení pak sám Sorkau\*\*) uznal.

G. Mie podal také několik poznámek k pracím Sorkauovým. Zvláště si povšimnul charakteru bodů Sorkauovy turbulence II. Poukázal na to, že všechny leží pod jistou mezní přímkou, přes níž nejdou a s jistou rezervou se vyslovil o skutečné existenci této turbulence.

V posledních pracích zkoumal Sorkau podrobně vodu, při čemž nemohl docílití oboru turbulence II.

Kritické poznámky, jež pronesl G. Mie, jakož i celková povaha prací Sorkauových a charakter zjevu turbulence II. a dále fundamentální důležitost rozhodnouti otázku, zda a za jakých okolností existuje turbulence Sorkauem označená II., přiměly autora této práce, že experimentálně zkoumal poměry na přechodu Hagenovy turbulence do turbulence následující. Dalším cílem bylo stanovití, jaký vliv má teplota na přechod jedné turbulence do druhé.

### Metoda a aparatura.

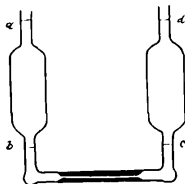
Měření prováděna, jako všechna předchozí, methodou transpiranční a aparaturou obdobnou aparatuře Sorkauově a poněkud zdo-

\*) Physik. Zeitschr. XIV. 1913, 3.

\*\*) Physik. Zeitschr. XVI. 1915, 6.

konalenou. Vlastní viskosimetr skládal se ze dvou cylindrických nádobek stejného obsahu, vyznačeného na každé dvěma vyleptanými značkami. Nádobky byly spojeny, jak z obr. 1. patrně, kapilárou, již příslušné volumy kapaliny byly proháněny. Dimense aparátu byly tak voleny, že když byl viskosimetr naplněn na př. od značky *a* ke značce *c*, stoupla při protlačení volumu mezi značkami *a* a *b* hladina ve druhé nádobce od *c* ke značce *d*. Tak docíleno rekompensace přetlaků a měření se zjednodušilo. Kapalina proháněna kapilárou oběma směry užitím kovového jemně pracovaného komutujícího kohoutu.

Poloměr kapiláry určen vážením a měřením délky sloupce rtuťového,  $r = 0,016 \text{ cm}$ , délka kapiláry byla  $3,90 \text{ cm}$ . Volum pro-

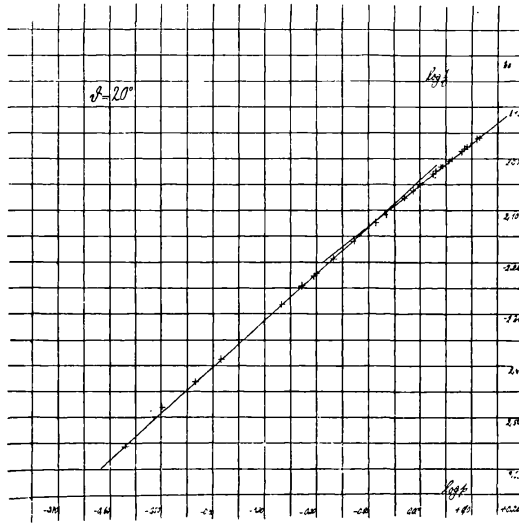


Obr. 1.

tékající kapaliny byl  $16,68 \text{ cm}^3$  za teploty  $19,5^\circ \text{ C}$ . Stejněměrnost průřezu užití kapiláry zkontrolována byla posouváním rtuťového sloupce a měřením jeho délky. Viskosimetr byl upevněn v termostatu elektrickým proudem vytápěném, teplotura regulována byla thermoregulátorem a držena konstantní na  $0,1^\circ$  přesně. Měření prováděna byla při teplotách  $20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ . Potřebných tlaků bylo docílováno stlačeným vzduchem. Velká bomba připojena byla oloveným potrubím k velké nádobě obsahu ca  $100 \text{ l}$ , druným vrtáním z ní vedena byla olovená trubice ke komutujícímu kohoutu. Paralelně připojen byl přes  $2 \text{ m}$  vysoký rtuťový manometr, jenž byl přidělán k zrcadlové skále dělené na  $\text{mm}$  a upevněné na čtverhraném massivním dřevěném sloupu. Olovnice udávala vertikální směr manometrové trubice a teploměr teplotu síně resp. rtuť v manometru. Postup měření byl tento: Termostat byl nejprve vyhřát na příslušnou teplotu, thermoregulátor na ni pak zastaven, viskosimetr před tím vyčištěný a vysušený vložen do termostatu a naplněn k uvedeným značkám měřenou kapalinou. Na to z bomby s komprimovaným vzduchem upuštěno do reservoiru, na jehož dně bylo chlorkalcium, jisté množství vzduchu, čímž docíleno žádoucího tlaku. Vždy po napaštění resp. upuštění bylo posečkáno jistou dobu, aby adiabatické

Tab. I.

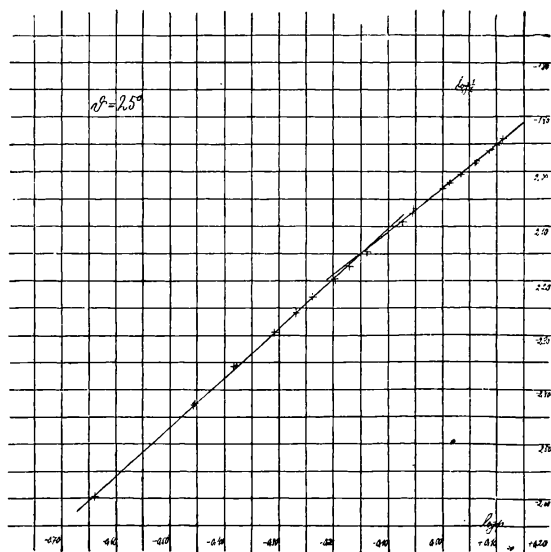
$\vartheta = 20^\circ$								
$\check{c}$	$p$	$t$	$\check{c}$	$p$	$t$	$\check{c}$	$p$	$t$
1.	0,1816	518,7	12.	0,6250	167,6	23.	1,0574	106,8
2.	0,1821	518,8	13.	0,6293	166,0	24.	1,0731	105,5
3.	0,2683	359,3	14.	0,6797	155,6	25.	1,0968	103,6
4.	0,3157	309,2	15.	0,7447	144,0	26.	1,1021	103,4
5.	0,3668	269,5	16.	0,8170	132,7	27.	1,1520	99,8
6.	0,4113	242,6	17.	0,8558	127,7	28.	1,2045	96,5
7.	0,4230	215,7	18.	0,9291	119,0	29.	1,2153	95,6
8.	0,5376	190,8	19.	0,9303	118,9	30.	1,2259	94,8
9.	0,5887	175,8	20.	0,9679	115,2	31.	1,2499	93,6
10.	0,5894	175,6	21.	0,9896	112,8	32.	1,2861	91,3
11.	0,6237	167,4	22.	0,0075	111,2	33.	1,2892	90,8



Obr. 2.

Tab. II.

$\vartheta = 25^\circ$								
$\check{c}$ .	$p$	$t$	$\check{c}$ .	$p$	$t$	$\check{c}$ .	$p$	$t$
1.	0,2284	395,0	9.	0,6732	148,7	17.	1,1477	96,4
2.	0,3496	265,2	10.	0,7256	139,6	18.	1,1541	95,5
3.	0,3505	264,4	11.	0,8413	123,3	19.	1,2215	91,4
4.	0,4147	227,6	12.	0,8780	119,0	20.	1,2315	90,8
5.	0,4168	225,6	13.	0,8809	116,7	21.	1,2364	90,4
6.	0,4910	196,0	14.	0,9993	107,1	22.	1,2566	89,6
7.	0,5768	169,6	15.	1,0280	104,6	23.	1,2873	87,2
8.	0,6328	157,0	16.	1,0820	101,0			

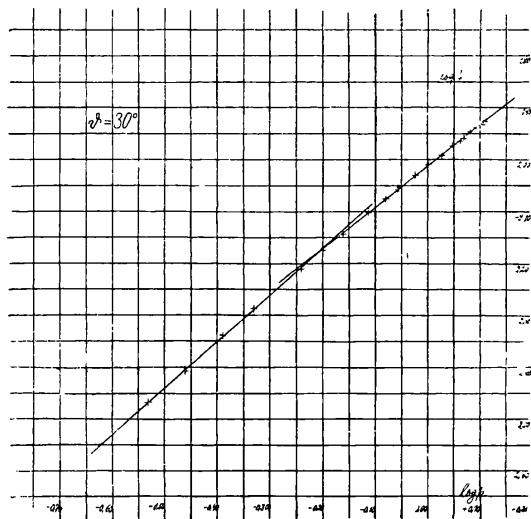


Obr. 3.



Tab. III.

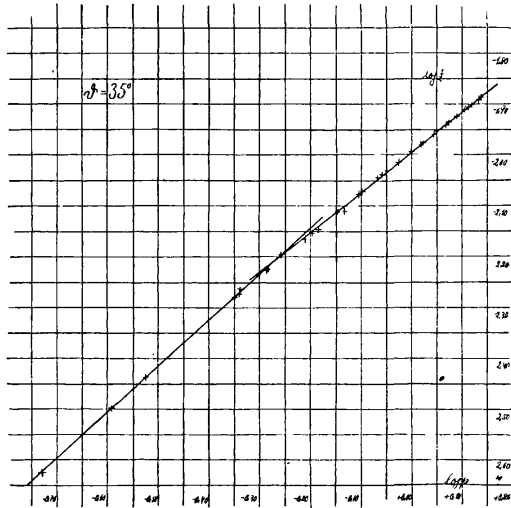
$\varphi = 30^\circ$								
č.	$p$	$t$	č.	$p$	$t$	č.	$p$	$t$
1.	0,2935	293,0	9.	0,7726	126,1	17.	1,1580	92,0
2.	0,3449	255,3	10.	0,8310	119,0	18.	1,1711	90,8
3.	0,3459	254,5	11.	0,8787	113,9	19.	1,2064	88,6
4.	0,4084	218,2	12.	0,8815	113,2	20.	1,2406	87,0
5.	0,4677	193,7	13.	0,9471	107,3	21.	1,2766	84,7
6.	0,5734	162,3	14.	1,0206	102,0	22.	1,2810	84,8
7.	0,6318	149,3	15.	1,0649	98,0	23.	1,2867	84,6
8.	0,6918	139,1	16.	1,1168	94,2			



Obr. 4.

Tab. IV.

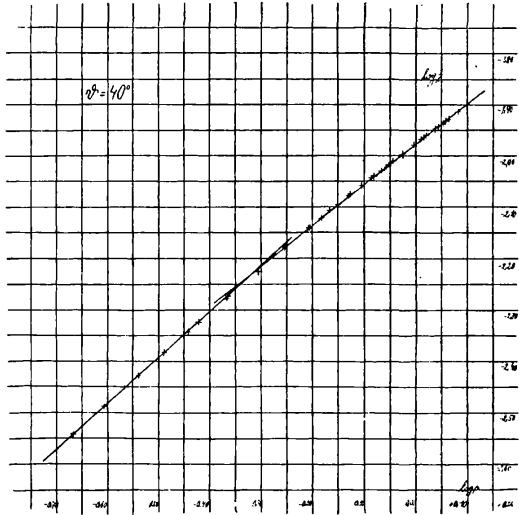
$\vartheta = 35^\circ$								
$\tilde{c}$ .	$p$	$t$	$\tilde{c}$ .	$p$	$t$	$\tilde{c}$ .	$p$	$t$
1.	0,1910	411,8	13.	0,6543	140,4	25.	1,1069	91,2
2.	0,2856	314,4	14.	0,7127	129,2	26.	1,1222	89,8
3.	0,2993	273,5	15.	0,7344	126,3	27.	1,1741	87,3
4.	0,4491	190,2	16.	0,7855	119,3	28.	1,1856	86,2
5.	0,4542	193,7	17.	0,7957	117,8	29.	1,2308	83,7
6.	0,4579	187,5	18.	0,8553	111,2	30.	1,2742	81,4
7.	0,4588	183,8	19.	0,8738	109,5	31.	1,2948	80,4
8.	0,5189	168,5	20.	0,8948	107,4	32.	1,3145	79,7
9.	0,5207	167,9	21.	0,9410	103,3	33.	1,3588	77,9
10.	0,5518	156,4	22.	0,9975	98,6	34.	1,3717	77,1
11.	0,6130	146,3	23.	1,0455	95,2			
12.	0,6346	142,2	24.	1,0513	94,8			



Obr. 5.

Tab. V.

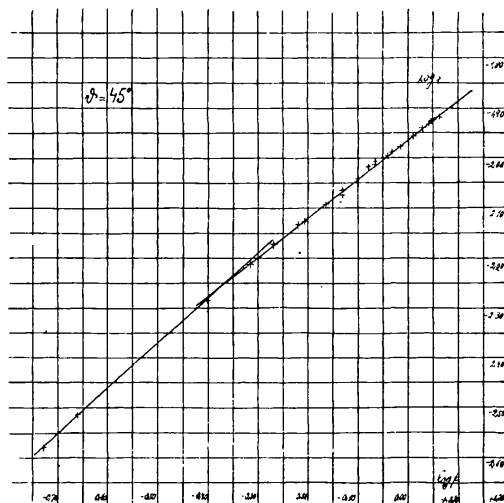
$\vartheta = 40^\circ$								
$\tilde{c}$	$p$	$t$	$\tilde{c}$	$p$	$t$	$\tilde{c}$	$p$	$t$
1.	0,2154	347,4	14.	0,6588	132,4	27.	0,9491	99,0
2.	0,2471	307,8	15.	0,6831	128,1	28.	0,9939	95,3
3.	0,2717	281,4	16.	0,7088	124,4	29.	0,9992	95,0
4.	0,2900	267,1	17.	0,7479	119,3	30.	1,0268	92,9
5.	0,3250	240,4	18.	0,7500	119,0	31.	1,0405	92,1
6.	0,3620	219,5	19.	0,7870	114,4	32.	1,0514	91,1
7.	0,3789	209,8	20.	0,8225	110,4	33.	1,0950	88,4
8.	0,4301	189,1	21.	0,8308	109,5	34.	1,1091	87,5
9.	0,4314	187,4	22.	0,8566	107,0	35.	1,1292	86,6
10.	0,4949	167,4	23.	0,8768	105,0	36.	1,1412	85,6
11.	0,5599	151,0	24.	0,8883	104,0	37.	1,1424	85,4
12.	0,6228	138,2	25.	0,9035	102,5	38.	1,1645	84,5
13.	0,6246	138,2	26.	0,9459	99,0			



Obr. 6.

Tab. VI.

$\vartheta = 45^\circ$								
č.	$p$	$t$	č.	$p$	$t$	č.	$p$	$t$
1.	0,1869	376,8	9.	0,6876	124,2	17.	0,9301	97,3
2.	0,2179	327,7	10.	0,7415	119,0	18.	0,9648	95,1
3.	0,3172	293,9	11.	0,7920	112,6	19.	1,0212	90,9
4.	0,3958	193,3	12.	0,7954	110,2	20.	1,0702	87,1
5.	0,4836	163,3	13.	0,8513	104,0	21.	1,1000	85,7
6.	0,5389	149,1	14.	0,8578	103,0	22.	1,1136	84,5
7.	0,6046	136,2	15.	0,8600	102,0	23.	1,1292	83,9
8.	0,6232	134,3	16.	0,9099	98,9	24.	1,1572	82,7



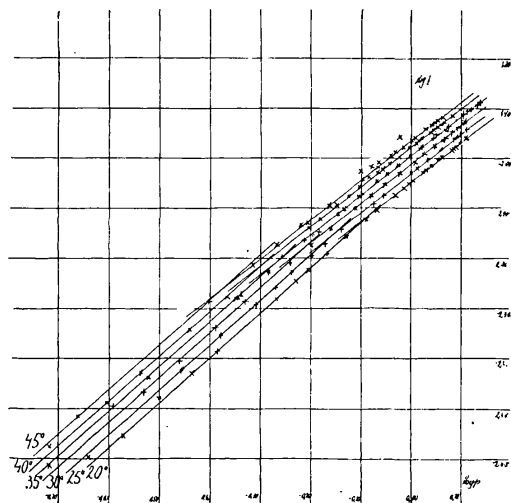
Obr. 7.

procesy nepůsobily během měření kolísání tlaku. Vzhledem ke značné kapacitě tlakového reservoáru, a této uvedené opatrnosti, jakož i vzhledem k výhodám olověných trubic spojovacích a těsnění dosaženo bylo velmi značné stálosti tlaku.

Tlak odečítán byl na zrcadlové škále a doba průtoku měřena pomocí stopek na  $\frac{1}{5}$  sec. Tlak měněn byl připouštěním resp. upouštěním a udán v  $kg/cm^2$ , čas v sec.

Měření provedena na tetrachlormethanu\*) za 6 různých teplot. Poiseuilleova průtoku dosaženo nebylo vzhledem k malé světlosti kapiláry. Výsledky měření sestaveny jsou do tabulek a příslušné křivky narýsovány. (Viz tabulky na str. 202–207.)

Z grafického znázornění dosažených výsledků na prvý pohled plyne, že Hagenova turbulence přechází do turbulence následující



Obr. 8.

téměř hladce. Z uvedených měření je vidno, že na přechodu není pozorovati vůbec žádných rozháraných bodů. Všimneme-li si blíže bodů ležících v okolí průsečíku obou čar, pozorujeme, že body neležící již na některé z obou přímek odklánějí se od původní čáry, aby zcela mírným ohybem přešli do přímky následující. Po vymizení Hagenovy turbulence bylo zkoumáno následující proudění velmi

\*) Merckův praeparát puriss., čistota zkontrolována stanovením bodu varu. Měření tato jsou částí srovnávacích měření, která se provádějí.

zevrubně, jak svědčí větší hustota sestroyených bodů. Body ležící pak na další přímce jeví už zcela určitou pravidelnost, čára probíhá dále nezlomena. Uvedené výsledky rozhodují otázku existence turbulence Sorkauem označené II. ve smyslu negativním. Neexistuje tedy Sorkauova turbulence II., již mělo při dalším zvyšování rychlosti přejítí Hagenovo proudění do turbulence následující. To, co při svých měřeních obdržel Sorkau, byl patrně jistý instabilní stav zaviněný asi nepravidelností v kapiláře.

Přímky vyjadřující v uvedeném systému koordinát oboje proudění jsou paralelní. Vyloučíme-li při výpočtu kotangenty úhlu, jež svírá uvažovaná přímka s osou abscis, ty hodnoty, jež se odchyľují od přímky v okolí průsečíku obou čar, dostaneme pro oboje proudění tyto hodnoty :

Tab. VII.

$\vartheta$	$\cotg \alpha_1 = n_1$	$\cotg \alpha_{II} = n_{II}$
20°	1,088 ± 0,001	1,264 ± 0,021
25°	1,102 ± 0,020	1,260 ± 0,042
30°	1,078 ± 0,002	1,274 ± 0,031
35°	1,103 ± 0,026	1,275 ± 0,014
40°	1,134 ± 0,037	1,290 ± 0,020
45°	1,106	1,299 ± 0,020

Střední hodnota pro  $n_1 = 1,102 \pm 0,018$ , pro  $n_{II} = 1,277 \pm 0,029$ . Přímky ty jsou vlivem teploty paralelně posouvány. Užijeme-li uvedených hodnot pro  $\cotg \alpha_1$ , resp.  $\cotg \alpha_{II}$ , můžeme psát jejich rovnice pro dané teploty :

Tab. VIII.

$\vartheta$	Turb. I.	Turb. II.
20°	$\log \frac{1}{t} = 0,907 \log p - 2,036$	$\log \frac{1}{t} = 0,783 \log p - 2,047$
25°	$\log \frac{1}{t} = 0,907 \log p - 2,011$	$\log \frac{1}{t} = 0,783 \log p - 2,030$
30°	$\log \frac{1}{t} = 0,907 \log p - 1,986$	$\log \frac{1}{t} = 0,783 \log p - 2,009$
35°	$\log \frac{1}{t} = 0,907 \log p - 1,961$	$\log \frac{1}{t} = 0,783 \log p - 1,994$
40°	$\log \frac{1}{t} = 0,907 \log p - 1,937$	$\log \frac{1}{t} = 0,783 \log p - 1,977$
45°	$\log \frac{1}{t} = 0,907 \log p - 1,918$	$\log \frac{1}{t} = 0,783 \log p - 1,964$

Konstanty v rovnicích pro obě turbulence jsou lineární funkce teploty,\*) takže lze je psát:

$$A_1 = -2,136 + 0,005 \vartheta$$

$$A_{II} = -2,114 + 0,0034 \vartheta.$$

Můžeme tudíž psát rovnice pro oba druhy proudění:

$$\log \frac{1}{t} = 0,907 \log p - 2,136 + 0,005 \vartheta$$

$$\log \frac{1}{t} = 0,783 \log p - 2,114 + 0,0034 \vartheta.$$

Abychom našli geometr. místo průsečíků obou systémů přímek, čili přechodů jedné turbulence do druhé, eliminujme z obou rovnic proměnný parametr  $\vartheta$ . Snadným počtem dostaneme vztah:

$$\log \frac{1}{t} = -2,062 + 0,494 \log p.$$

Body přechodu leží na přímce, kterou lze i takto obdržeti: řešením obou rovnic pro každou teplotu najdeme tyto souřadnice příslušných průsečíků:

Tab. IX.

$\vartheta$	$\log p$	$\log \frac{1}{t}$	$\vartheta$	$\log p$	$\log \frac{1}{t}$
20°	-0,089	-2,117	35°	-0,267	-2,203
25°	-0,153	-2,150	40°	-0,322	-2,229
30°	-0,186	-2,155	45°	-0,371	-2,254

Závislost jejich lze vyjádřiti lineárnou funkcí:

$$\log \frac{1}{t} = -2,074 + 0,49 \log p.$$

Obě rovnice souhlasí spolu dobře. Tato přímka je narysována v obraze 9.

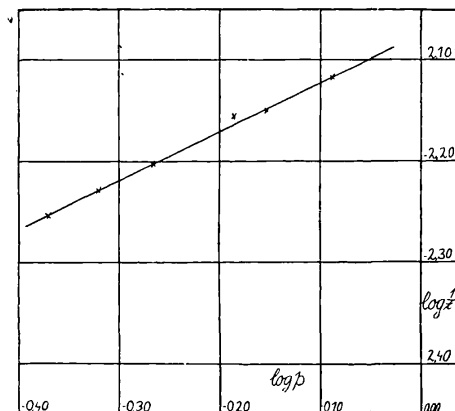
Další pokusy s jinými kapalinami se provádějí.

### Resumé.

Měření provedená na tetrachormethanu ukazují, že přechod z turbulence Hagenovy do turbulence následující děje se zcela pravidelně, bez labilního stadia, jež Sorkau označil turbulence II. Vlivem teploty posouvají se přímky vyznačující oba druhy proudění

\*) Jak už Sorkau zjistil.

paralelně. Průsečíky obou čar, t. j. přechody z jedné turbulence do druhé leží na přímce, jejíž rovnice byla stanovena. Z ní je



Obr. 9.

patrně, že turbulence Hagenova přechází do turbulence následující tím dříve, čím vyšší je teplota, při níž se proudění děje.

Budiž dovoleno na tomto místě vysloviti upřímný dík p. prof. Dru. *J. Baborovskému* za laskavý zájem a pomoc při této práci poskytovanou.

*Z ústavu theoret. a fysik. chemie čes. vys. školy techn. v Brně.*

## VĚSTNÍK LITERÁRNÍ.

### RECENSE KNIH.

**Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen.** Unter Mitwirkung von Dr.-Ing. C. Wieselberger und Dipl.-Ing. Dr. phil. A. Betz herausgegeben von Dr.-Ing. Dr. L. Prandtl. I. Lieferung. 91 Abbildungen und 2 Tafeln. Verlag von R. Oldenbourg München und Berlin 1921. S. IV + 140. Mk 40.—.

Svazek obsahuje nejdůležitější výsledky moderně vybudovaného ústavu aerodynamického v Göttingách. Navazuje na práce (jichž seznam jest uveden na konci svazku), uveřejněné již dříve jednotlivě v odborných časopisech. Po zajímavém náčrtku dějin vývoje ústavu následuje v prvé