Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav A. Hruška

Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných. [III.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 3, 167--178

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123212`

pro osu souměrnosti křivou, totožnou s křivkou ${}^2A'$, z čehož patrno, že středy tětiv křivky A rovnoběžných se směrem S vyplňují dvě kuželosečky.

Lze provésti i šetření duální: Jsou-li dány dvě křivky ${}^1A$, ${}^2A$ a pevná přímka, vyhledati obálku paprsků oddělujících tečny křivek ${}^1A$, ${}^2A$ na S se protínající vzhledem k S harmonicky. Je-li S úběžná, pak hledané tečny probíhají středem pasu rovnoběžných tečen křivek ${}^1A$, ${}^2A$; dotyčník jest středem spojnice bodů dotyčných obou křivek základních ${}^1A$, ${}^2A$. Jsou-li ${}^1A$, ${}^2A$ kuželosečky, jest A čtvrté třídy, osmého stupně a lze ji jednoduše konstruovati, i její body dvojné a dvojné tečny.

Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných.

Dr. techn. *Václav Hruška*,
soukr. docent a asistent české vysoké školy technické v Praze.

(Dokončení.)

Jest tedy

$$(39)\qquad \varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma, t\sigma} = -\varepsilon_{\sigma, t\sigma; \varrho, t\varrho}; \quad a_{\varrho, t\varrho, \sigma, t\sigma} = -a_{\sigma, t\sigma; \varrho, t\varrho}.$$

Při tom hoví $\varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma, t\sigma}$ rovnicím (*O. N.* odst. 24., vzorec (31)).

$$(40)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{\varrho, u+1; \sigma, u'} - a_{3-u} \cdot \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, u'} = \varepsilon_{\varrho, u; \sigma, u'+1} - a_{3-u'}\, \varepsilon_{\varrho, u, \sigma, 2} \\ \varrho, \sigma = 1, 2; \; u, u' = 0, 1, 2; \; a_3 = K, \; a_2 = L, \; a_1 = M \\ \varepsilon_{\varrho, u; \sigma, -1} = 0, \; \varepsilon_{\varrho, -1; \sigma, u'} = 0 \end{cases}$$

Čili explicite psáno

$$\left.\begin{array}{rlll} & K.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = & K.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} & \\ & K.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} = & L.\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} & - \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 0} \\ & K.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} = & M.\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} & - \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 1} \\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 0} - & L.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = & & - K\, \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 1} & L.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} = & \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 0} & - L\, \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} & L.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} = & \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 1} & - M\, \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 0} & M.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = & & - K\, \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 1} & M.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} = & \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} & - L\, \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} & M.\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} = & \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} & - M\, \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} \end{array}\right\}\ \varrho = 1, 2$$

Ježto $K \neq 0$ dostáváme z rovnice

prvé $\varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2}$

deváté $\varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} = \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1}$

páté $\varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 1} = \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 0}$

Druhá a čtvrtá pak nejsou vespolek neodvislé; stejně šestá a osmá, třetí a sedmá. Tudíž oněch 4×9 rovnic (40) se redukuje na 4×6 neodvislých

$$(40^*) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 1} = \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 0} = -K\,\varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} + M\,\varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} \\ \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} = \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} \\ \varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} = \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 2} = \varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 1} + L\,\varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 2} - M\,\varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 1} \\ \varepsilon_{\varrho, 0; \sigma, 0} = L\,\varepsilon_{\varrho, 2; \sigma, 0} - K\,\varepsilon_{\varrho, 1; \sigma, 2} \\ \qquad \varrho, \sigma = 1, 2. \end{cases}$$

Dosadíme-li sem $\varrho = \sigma = 1$, tu vzhledem k rovnicím (39) vyjde

$$(41) \qquad \varepsilon_{1, t_1; 1, \tau_1} = 0 \qquad (t_1, \tau_1 = 0, 1, 2).$$

Stejně jest

$$(41') \qquad \varepsilon_{2, t_2; 2, \tau_2} = 0 \qquad (t_2, \tau_2 = 0, 1, 2).$$

Zvolme nyní $\varrho = 1$, $\sigma = 2$ a pokusme se ustanoviti x_i^{1, t_1} x_k^{2, t_2} tak, aby bylo

$$(42) \qquad \varepsilon_{1, 2; 2, 2} = 0, \quad \varepsilon_{1, 2; 2, 1} = e_1; \quad \varepsilon_{1, 2; 2, 0} = 0.$$

Z rovnic (40*) a (39) pak vyjde

$$(43) \quad \begin{cases} \varepsilon_{1, 0; 2, 0} = -\varepsilon_{2, 0; 1, 0} = -Ke_1 & \varepsilon_{1, 1; 2, 0} = -\varepsilon_{2, 0; 1, 1} = 0 \\ \varepsilon_{1, 0; 2, 1} = -\varepsilon_{2, 1; 1, 0} = 0 & \varepsilon_{1, 1; 2, 1} = -\varepsilon_{2, 1; 1, 1} = Me_1 \\ \varepsilon_{1, 0; 2, 2} = -\varepsilon_{2, 2; 1, 0} = 0 & \varepsilon_{1, 1; 2, 2} = -\varepsilon_{2, 2; 1, 1} = e_1 \\ \qquad \varepsilon_{1, 2; 2, 0} = -\varepsilon_{2, 0; 1, 2} = 0 & \\ \qquad \varepsilon_{1, 2; 2, 1} = -\varepsilon_{2, 1; 1, 2} = e_1 & \\ \qquad \varepsilon_{1, 2; 2, 2} = -\varepsilon_{2, 2; 1, 2} = 0 & \end{cases}$$

Ustanovme tedy — je-li to možno — celá čísla $x_i^{1,2}$, $x_k^{2,2}$ ($i, k = 1, 2 \ldots 6$) tak, aby bylo

$$(44) \quad \begin{cases} 0 = \varepsilon_{1, 2; 2, 2} = x_1^{1,2} x_4^{2,2} - x_4^{1,2} x_1^{2,2} + x_2^{1,2} x_5^{2,2} - x_5^{1,2} x_2^{2,2} + x_3^{1,2} x_6^{2,2} - x_6^{1,2} x_3^{2,2} \\ e_1 = \varepsilon_{1, 2; 2, 1} = x_1^{1,2} x_4^{2,1} - x_4^{1,2} x_1^{2,1} + x_2^{1,2} x_5^{2,1} - x_5^{1,2} x_2^{2,1} + x_3^{1,2} x_6^{2,1} - x_6^{1,2} x_3^{2,1} \\ 0 = \varepsilon_{1, 2; 2, 0} = x_1^{1,2} x_4^{2,0} - x_4^{1,2} x_1^{2,0} + x_2^{1,2} x_5^{2,0} - x_5^{1,2} x_2^{2,0} + x_3^{1,2} x_6^{2,0} - x_6^{1,2} x_3^{2,0} \end{cases}$$

Zvolme $\overset{2,2}{x}_2 = \overset{2,2}{x}_3 = \overset{2,2}{x}_4 = \overset{2,2}{x}_5 = \overset{2,2}{x}_6 = 0$, takže z rovnic (35) vyjde

$$(36^*)\quad \begin{cases} \overset{2,0}{x}_i = -K_{i4}\,\overset{2,2}{x}_1 & i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \overset{2,1}{x}_1 = M\overset{2,2}{x}_1 - a_{11}\,\overset{2,2}{x}_1 & \\ \overset{2,1}{x}_k = -a_{k+3,1}\,\overset{2,2}{x}_1 & k = 2, 3 \\ \overset{2,1}{x}_{l+3} = a_{l,1}\,\overset{2,2}{x}_1 & l = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (44), dostaneme

$$(44)\quad \begin{cases} 0 = -\overset{2,2}{x}_1 \,.\, \overset{1,2}{x}_4 \\ e_1 = \overset{2,2}{x}_1\Big(.+a_{21}\,\overset{1,2}{x}_2 + a_{31}\,\overset{1,2}{x}_3 + a_{41}\,\overset{1,2}{x}_4 + a_{51}\,\overset{1,2}{x}_5 + a_{61}\,\overset{1,2}{x}_6 - \\ \qquad - M\,\overset{1,2}{x}_4\Big) \\ 0 = \overset{2,2}{x}_1\Big(.-K_{54}\,\overset{1,2}{x}_2 - K_{64}\,\overset{1,2}{x}_3 + K_{14}\,\overset{1,2}{x}_4 + K_{24}\,\overset{1,2}{x}_5 + K_{34}\,\overset{1,2}{x}_6\Big) \end{cases}$$

Jelikož v závorce v druhé z těchto rovnic jsou všechny členy dělitelny e_1, jest

$$(45)\qquad \overset{2,2}{x}_1 = 1$$

a tedy z prvé rovnice (44*) jde

$$(46)\qquad \overset{1,2}{x}_4 = 0$$

Tudíž řešení rovnic (44*) celými čísly se redukuje na řešení čísly celými rovnic

$$(47)\quad \begin{cases} K_{45}\,\overset{1,2}{x}_2 + K_{46}\,\overset{1,2}{x}_3 + K_{24}\,\overset{1,2}{x}_5 + K_{34}\,\overset{1,2}{x}_6 = 0 \\ a_{12}\,\overset{1,2}{x}_2 + a_{13}\,\overset{1,2}{x}_3 + a_{15}\,\overset{1,2}{x}_5 + a_{16}\,\overset{1,2}{x}_6 = -e_1 \end{cases}$$

Rovnice tyto jsou řešitelny čísly celými, neboť *NSM* determinantů matice

$$M_1 \quad \begin{matrix} K_{45} & K_{46} & K_{24} & K_{34} \\ a_{12} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \end{matrix}$$

jest dle předpokladu $e_1^2\, e_2$ a dělí též všechny determinanty matice

$$\left|\begin{matrix} K_{45} & K_{46} & K_{24} & K_{34} & 0 \\ a_{12} & a_{13} & a_{15} & a_{16} & -e_1 \end{matrix}\right.$$

Hledejme — možno-li — takové řešení rovnic (47) celými čísly, které či [illegible] echna $\overset{1,0}{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ dělitelna $e_1 e_3 = \dfrac{K^{*)}}{e_2}$. Dokažme si, že to je možno. Musely by totiž vedle rovnic (47) býti ještě splněny kongruence

$$\overset{1,0}{x_i} = K_{i,1} \overset{1,2}{x_4} + K_{i,2} \overset{1,2}{x_5} + K_{i,3} \overset{1,2}{x_6} - K_{i,4} \overset{1,2}{x_1} - K_{i,5} \overset{1,2}{x_2} - K_{i,6} \overset{1,2}{x_3} \equiv 0$$
$$(\text{mod } e_1 e_3), \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

kde ovšem $\overset{1,2}{x_4} = 0$. Musely by tedy vlastně býti splněny kongruence

$$(48)\left\{\begin{array}{l} -K_{14} \overset{1,2}{x_1} \equiv K_{15} \overset{1,2}{x_2} + K_{16} \overset{1,2}{x_3} - K_{12} \overset{1,2}{x_5} - K_{13} \overset{1,2}{x_6} \\ -K_{24} \overset{1,2}{x_1} \equiv K_{25} \overset{1,2}{x_2} + K_{26} \overset{1,2}{x_3} - \quad . \quad - K_{23} \overset{1,2}{x_6} \\ -K_{34} \overset{1,2}{x_1} \equiv K_{35} \overset{1,2}{x_2} + K_{36} \overset{1,2}{x_3} - K_{32} \overset{1,2}{x_5} - \quad . \\ \qquad 0 \equiv K_{45} \overset{1,2}{x_2} + K_{46} \overset{1,2}{x_3} - K_{42} \overset{1,2}{x_5} - K_{43} \overset{1,2}{x_6} \\ -K_{54} \overset{1,2}{x_1} \equiv \quad . \quad + K_{56} \overset{1,2}{x_3} - K_{52} \overset{1,2}{x_5} - K_{53} \overset{1,2}{x_6} \\ -K_{64} \overset{1,2}{x_1} \equiv K_{65} \overset{1,2}{x_2} \quad . \quad - K_{62} \overset{1,2}{x_5} - K_{63} \overset{1,2}{x_6} \end{array}\right\} (\text{mod } e_1 e_3)$$

kde $\overset{1,2}{x_2}, \overset{1,2}{x_3}, \overset{1,2}{x_5}, \overset{1,2}{x_6}$, *jsou řešení celými čísly rovnic* (47).

Čtvrtá z kongruencí (48) bude splněna, neboť též na pravé straně je pak nula. Co se týče ostatních, nutno ukázati, že *NSM* determinantů 5. řádu matice

$$\left\| \begin{array}{cccccc} -K_{14} & e_1 e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{24} & 0 & e_1 e_3 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{34} & 0 & 0 & e_1 e_2 & 0 & 0 \\ -K_{54} & 0 & 0 & 0 & e_1 e_3 & 0 \\ -K_{64} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 e_3 \end{array} \right\|$$

t. j. $e_1^5 \, e_3^4 \, e_2$ dělí též všechny determinanty 5. řádu matice

$$\left\| \begin{array}{l} K_{15} \overset{1,2}{x_2} + K_{16} \overset{1,2}{x_3} - K_{12} \overset{1,2}{x_5} - K_{13} \overset{1,2}{x_6}, \\ \qquad\qquad\qquad - K_{14} \; e_1 e_3, 0, 0, 0, 0 \\ K_{25} \overset{1,2}{x_2} + K_{26} \overset{1,2}{x_3} - \quad . \quad - K_{23} \overset{1,2}{x_6}, \\ \qquad\qquad\qquad - K_{24}, 0, e_1 e_3, 0, 0, 0 \end{array} \right\|$$

*) Viz konec odst. 4.

$$\left\| \begin{array}{l} K_{35}\overset{1,2}{x}_2 + K_{36}\overset{1,2}{x}_3 - K_{32}\overset{1,2}{x}_5 - \cdot \;, \\ \qquad\qquad - K_{34}\,,\,0\,,\,0\,,\,e_1 e_3\,,\,0\,,\,0 \\ \cdot \quad + K_{56}\overset{1,2}{x}_3 - K_{52}\overset{1,2}{x}_5 - K_{53}\overset{1,2}{x}_6\,, \\ \qquad\qquad - K_{54}\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,e_1 e_3\,,\,0 \\ K_{65}\overset{1,2}{x}_2 + \cdot \quad - K_{62}\overset{1,2}{x}_5 - K_{63}\overset{1,2}{x}_6\,, \\ \qquad\qquad - K_{64}\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,e_1 e_3 \end{array} \right\|$$

Tvrdím, je-li $\overset{1,2}{x}_2$, $\overset{1,2}{x}_3$, $\overset{1,2}{x}_5$, $\overset{1,2}{x}_6$ *libovolné* řešení čísly celými rovnic (47), jsou všecky determinanty 5. řádu této matice dělitelny $e_1^5 e_3^4 e_2$. O determinantech neobsahujících prvého sloupce matice jest to evidentní. Rovněž je to evidentní o determinantech neobsahujících druhý sloupec matice. Co se týče determinantů, jež obsahují i prvý i druhý sloupec matice, dokážeme to následovně:

Na př.:

$$\left| \begin{array}{l} K_{15}\overset{1,2}{x}_2 + K_{16}\overset{1,2}{x}_3 - K_{12}\overset{1,2}{x}_5 - K_{13}\overset{1,2}{x}_6\,,\, - K_{14}\,,\, e_1 e_3\ 0\ 0 \\ K_{25}\overset{1,2}{x}_2 + K_{26}\overset{1,2}{x}_3 - \quad \cdot \quad - K_{23}\overset{1,2}{x}_6\,,\, - K_{24}\,,\, 0\ e_1 e_3\ 0 \\ K_{35}\overset{1,2}{x}_2 + K_{36}\overset{1,2}{x}_3 - K_{32}\overset{1,2}{x}_5 - \quad \cdot \quad ,\, - K_{34}\,,\, 0\ 0\ e_1 e_3 \\ \cdot \quad + K_{56}\overset{1,2}{x}_3 - K_{52}\overset{1,2}{x}_5 - K_{53}\overset{1,2}{x}_6\,,\, - K_{54}\,,\, 0\ 0\ 0 \\ K_{65}\overset{1,2}{x}_2 + \quad \cdot \quad - K_{62}\overset{1,2}{x}_5 - K_{63}\overset{1,2}{x}_6\,,\, - K_{64}\,,\, 0\ 0\ 0 \end{array} \right| =$$

$$= e_1^3 e_3^3 \left| \begin{array}{l} \cdot \quad + K_{56}\overset{1,2}{x}_3 - K_{52}\overset{1,2}{x}_5 - K_{53}\overset{1,2}{x}_6\,,\, - K_{54} \\ K_{65}\overset{1,2}{x}_2 + \quad \cdot \quad - K_{62}\overset{1,2}{x}_5 - K_{63}\overset{1,2}{x}_6\,,\, - K_{64} \end{array} \right| =$$

$$= e_1^3 e_3^3 \,[K_{65} K_{54}\overset{1,2}{x}_2 - K_{56} K_{64}\overset{1,2}{x}_3 + \overset{1,2}{x}_5 (K_{52} K_{64} - K_{62} K_{54}) +$$
$$+ \overset{1,2}{x}_6 (K_{53} K_{64} - K_{63} K_{54})].$$

Avšak jest

$$K_{52} K_{64} - K_{62} K_{54} = K_{52} K_{64} - K_{56} K_{24} + K_{54} K_{26} + K_{56} K_{24} =$$
$$= + K \,.\, a_{13} + K_{56} K_{24}$$

$$K_{53} K_{64} - K_{63} K_{54} = K_{53} K_{64} - K_{56} K_{34} + K_{54} K_{36} + K_{56} K_{34} =$$
$$= - K \,.\, a_{12} + K_{56} K_{34}$$

takže horní determinant se rovná

$$\overset{3}{e}_1\,\overset{3}{e}_3\left[K\left(a_{13}\,\overset{1,2}{x}_5-a_{12}\,\overset{1,2}{x}_6\right)+\right.$$

$$\left.K_{56}\left(K_{15}\,\overset{1,2}{x}_2+K_{46}\,\overset{1,2}{x}_3+K_{24}\,\overset{1,2}{x}_5+K_{34}\,\overset{1,2}{x}_6\right)\right]=$$

$$=\overset{3}{e}_1\,\overset{3}{e}_3\,K\left(a_{13}\,\overset{1,2}{x}_5-a_{12}\,\overset{1,2}{x}_6\right)$$

když $\overset{1,2}{x}_i$ $(i=2, 3, 5, 6)$ hoví prvé rovnici (47). Jelikož jest $K=e_1\,e_2\,e_3$ a a_{12} i a_{13} jsou dělitelny e_1, jest celý výraz dělitelný $\overset{5}{e}_1\,\overset{4}{e}_3\,e_2$. Podobně bychom to ukázali o každém determinantu matice, obsahujícím prvý i druhý sloupec. Odtud tedy usuzujeme, že jsou-li $\overset{1,2}{x}_i$ $(i=2, 3, 5, 6)$ libovolná řešení rovnic (47) celými čísly, že lze ustanoviti $\overset{1,2}{x}_1$ tak, aby byly splněny kongruence (48), t. j. aby byly všechny

$$\overset{1,0}{x}_i\equiv 0 \pmod{e_1\,e_3}\quad (i=1, 2, \ldots 6).$$

Abychom nyní našli $a_{\varrho, t\varrho; \sigma, \tau\sigma}$ použijme rovnic (*O. N.* odst. 25., vzorce (31) a (31)′)

$$(49)\quad\begin{cases}\bar{a}_{\varrho, t\varrho; \sigma, u'}=\varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma, u'-1}-a_{3-u'}\,\bar{\varepsilon}_{\varrho, t\varrho; \sigma\, 2}\\ \varrho, \sigma=1, 2;\ u'=0, 1, 2;\ t\varrho=0, 1, 2;\ \varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma,\ 1}=0\\ a_3=K,\quad a_2=L=a_1=M\end{cases}$$

Čili

$$(49^*)\quad\begin{cases}a_{\varrho, t\varrho; \sigma, 0}= & -K\,\varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma, 2}\\ a_{\varrho, t\varrho; \sigma, 1}=\varepsilon_{\varrho, t\varrho, \sigma, 0} & -L\,\bar{\varepsilon}_{\varrho, t\varrho; \sigma, 2}\\ \bar{a}_{\varrho, t\varrho; \sigma, 2}=\bar{\varepsilon}_{\varrho, t\varrho; \sigma, 1} & -M\,\varepsilon_{\varrho, t\varrho; \sigma, 2}\\ \qquad \varrho, \sigma=1, 2; & t\varrho=0, 1, 2.\end{cases}$$

Jest tedy

$$(50)\quad\begin{cases}\bar{a}_{1, t_1; 1, \tau_1}=a_{2, t_2; 2, \tau_2}=0 \qquad (t_1, t_2, \tau_1, \tau_2=0, 1, 2)\\ a_{1, 0; 2, 0}=0,\ \bar{a}_{1, 0; 2, 1}=-Ke_1,\ \bar{a}_{1, 0; 2, 2}=0\\ \bar{a}_{1, 1; 2, 0}=-Ke_1,\ a_{1, 1; 2, 1}=-Le_1,\ a_{1, 1; 2, 2}=0\\ \bar{a}_{1, 2; 2, 0}=0,\ \bar{a}_{1, 2; 2, 1}=0,\ a_{1, 2; 2, 2}=e_1\\ \qquad \bar{a}_{2, t_2; 1, \tau_1}=-a_{1, \tau_1; 2, t_2} \qquad (t_2, \tau_1=0, 1, 2)\end{cases}$$

Při tom transformace S má matici (vzorec (36), (36*), (45), (46), (47))

$$
S \quad \begin{array}{cccccc}
\overset{1,0}{x}_1 & \overset{1,1}{x}_1 & \overset{1,2}{x}_1 & \overset{2,0}{x}_1 & \overset{2,1}{x}_1 & \overset{2,2}{x}_1 \\
\overset{1,0}{x}_2 & \overset{1,1}{x}_2 & \overset{1,2}{x}_2 & \overset{2,0}{x}_2 & \overset{2,1}{x}_2 & \overset{2,2}{x}_2 \\
\text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
\overset{1,0}{x}_6 & \overset{1,1}{x}_6 & \overset{1,2}{x}_6 & \overset{2,0}{x}_6 & \overset{2,1}{x}_6 & \overset{2,2}{x}_6
\end{array}
$$

kde $\overset{1,2}{x}_2$, $\overset{1,2}{x}_3$, $\overset{1,2}{x}_4$, $\overset{1,2}{x}_6$ jest libovolné řešení celými čísly rovnic (47), $\overset{1,2}{x}_1$ je řešení systému kongruencí (48), $\overset{1,2}{x}_1 = 0$ (vzorec (46)); $\overset{1,1}{x}_i$ a $\overset{1,0}{x}_i$ $(i = 1, 2, \dots 6)$ jsou dány vzorci (36). $\overset{2,2}{x}_1 = 1$ (vzorec (45)), $\overset{2,2}{x}_i = 0$ $(i = 2, 3, \dots 6)$, a ze vzorců (36*) pak vyjde $\overset{2,1}{x}_1 = M + a_{14}$, $\overset{2,1}{x}_2 = a_{15}$, $\overset{2,1}{x}_2 = a_{16}$, $\overset{2,1}{x}_4 = 0$, $\overset{2,1}{x}_5 = a_{21}$, $\overset{2,1}{x}_6 = a_{31}$; $\overset{2,0}{x}_i = - K_{i\,4}$ $(i = 1, 2, \dots 6)$. Specielně tedy je $\overset{2,0}{x}_4 = 0$, $\overset{2,1}{x}_4 = 0$ a vzhledem k (47) $\overset{1,0}{x}_4 = 0$, $\overset{1,1}{x}_4 = - e_1$. Všecky elementy prvého sloupce jsou dělitelny $e_1\, e_3$, druhého e_1, čtvrtého $e_1\, e_2$ a pátého e_1.

10. Utvořme nyní transformaci $T = |t_{i,k}|$ $(i, k = 1, 2, \dots 6)$ takto:

$$
(51) \quad \left\{ \begin{array}{l}
t_{i,1} = \dfrac{\overset{1,0}{x}_i}{e_1\, e_3}, \quad t_{i,2} = \dfrac{\overset{1,1}{x}_i}{e_1}, \quad t_{i,3} = \overset{1,2}{x}_i \\[2ex]
t_{i,4} = \dfrac{\overset{2,0}{x}_i}{e_1\, e_2}, \quad t_{i,5} = \dfrac{\overset{2,1}{x}_i}{e_1}, \quad t_{i,6} = \overset{2,2}{x}_i
\end{array} \right.
$$

$$
T \left\{ \begin{array}{l}
x_i = \sum\limits_{\varrho = 1}^{6} t_{i,\varrho}\, x_\varrho \\[2ex]
y_k = \sum\limits_{\sigma = 1}^{6} t_{k,\sigma}\, y_\sigma
\end{array} \right.
$$

a označme jako obyčejně koeficienty transformovaných forem

$$
A = T'AT = \sum_{\varrho, \sigma = 1}^{6} \overline{a}_{\varrho\sigma}\, \overline{x}_\varrho\, y_\sigma
$$

$$
E = T'ET = \sum_{\varrho, \sigma = 1}^{6} \overline{\varepsilon}_{\varrho,\sigma}\, x_\varrho\, y_\sigma
$$

$$
a_{\varrho,\sigma} = \sum_{i,k=1}^{6} a_{i,k}\, t_{i\varrho}\, t_{k\sigma}
$$

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma} = \sum_{i,k=1}^{6} \varepsilon_{i,k}\, t_{i\varrho}\, t_{k\sigma}$$

Dosadíme-li sem za $t_{i\varrho}$, $t_{k\sigma}$ hodnoty (51), tu vzhledem k (38), (41), (41′), (43), (50) budou matice forem A a E

$$(52)\qquad A = T'AT = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K}{e_1 e_2} & -\frac{L}{e_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & \frac{K}{e_1 e_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & \frac{L}{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(53)\qquad E = T'ET = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M}{e_1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{e_1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Uvažujme nyní transformaci T_1 o matici

$$(54)\qquad T_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{M}{e_1} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Pak tedy bude

$$T_1'\bar{E}T_1 = (TT_1)'\,E\,(TT_1) =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{M}{e_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{M}{e_1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= E.$$

$$T_1 A T_1 = (TT_1)' A (TT_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{M}{e_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -e_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{e_1 e_2} & 0 & -\frac{L}{e_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_1 & -M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{e_1 e_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & \frac{L}{e_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{e_1 e_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & \frac{L}{e_1} & -M \\ 0 & 0 & -e_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{e_1 e_2} & 0 & -\frac{L}{e_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & M & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = A \tag{55}$$

Vidíme tedy, že transformace

$$C = TT_1 \tag{56}$$

má tu vlastnost, že $\quad C'EC = E, \qquad C'AC = A$

a jest tedy hledanou transformací; nemění formy E, má celistvé elementy a odstraňuje ve formě A celou řadu koeficientů.

Samozřejmě determinant transformace $| C | = \pm 1$.

III.

11. Mějme systém singulárních relací mezi periodami singulárních nedegenerovaných Abelových funkcí tří proměnných u_1, u_2, u_3

$$\left\{\begin{aligned} & a_{56}\,(r_{11}) + a_{64}\,(r_{12}) + a_{45}\,(r_{13}) + \\ & + \sum_{i=1}^{3} a_{2,i+3}\, r_{3i} - \sum_{i=1}^{3} a_{3,i+3}\, r_{2,i} \quad a_{23} = 0 \\ & a_{56}\,(r_{21}) + a_{64}\,(r_{22}) + a_{45}\,(r_{23}) + \\ & + \sum_{i=1}^{3} a_{3,i+3}\, \tau_{1i} - \sum_{i=1}^{3} a_{1,i+3}\, r_{3i} + a_{31} = 0 \\ & a_{56}\,(r_{31}) + a_{64}\,(r_{32}) + a_{45}\,(r_{33}) + \\ & + \sum_{i=1}^{3} a_{1,i+3}\, r_{2,i} - \sum_{i=1}^{3} a_{2,i+3}\, \tau_{1,i} + a_{12} = 0 \end{aligned}\right. \tag{57}$$

Při tom systémy simultanních period stojí v témž sloupci obrazce

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & 1 & 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ u_2 & 0 & 1 & 0 & \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ u_3 & 0 & 0 & 1 & \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{array}$$

$\tau_{ik} = \tau_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ a $(\tau_{i,k})$ značí minor adjungovaný v determinantu $|\,\tau_{ik}\,|$ $(i, k = 1, 2, 3)$ elementu τ_{ik}. Čísla a_{56}, a_{64}, a_{45}, a_{23}, a_{31}, a_{12}, $a_{h,\,i+3}$ $(h, i = 1, 2, 3)$ značí čísla celá racionální.*)

Definujme rovnicemi

$$\begin{array}{lll} a_{56} = -a_{65} & a_{23} = -a_{32} & a_{i+3,\,h} = -a_{h,\,i+3} \; (i, h = 1, 2, 3) \\ a_{64} = -a_{46} & a_{31} = -a_{13} & a_{r,\,r} = 0 \; (r = 1, 2, \ldots 6) \\ a_{45} = -a_{54} & a_{12} = -a_{21} & \end{array}$$

dalších 21 celých čísel, takže čtvercová matice $a_{r\,s}$ $(r, s = 1, 2, \ldots 6)$ je pseudosymmetrická.

Utvořím bilineární formy

(58) $$A = \sum_{i,k=1}^{6} a_{i,k}\, x_i\, y_k$$

(59) $$E = \sum_{i,k=1}^{6} \varepsilon_{i,k}\, x_i\, y_k = x_1 y_4 - x_4 y_1 + x_2 y_5 - x_5 y_2 + x_3 y_6 - x_6 y_3.$$

Znám-li formu A, mohu ihned napsati singulárné relace (54). Avšak k témuž systému vede rovněž bilineární forma

(58′) $$\overset{(1)}{A} = A - \omega\, E = \sum_{i,k=1}^{6} \overset{(1)}{a}_{i,k}\, x_i\, y_k$$

(ω... libovolné číslo); jest totiž

$$\overset{(1)}{a}_{i,k} = a_{i,k} \; (i \not\equiv k \pmod 3,\; i, k = 1, 2, \ldots 6)$$

$$\overset{(1)}{a}_{i,\,i+3} = a_{i,\,i+3} - \omega$$

$$\overset{(1)}{a}_{i+3,\,i} = a_{i+3,\,i} + \omega$$

a vzhledem k $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ vystupují koeficienty a_{14}, a_{25}, a_{36} v relacích (54) pouze v kombinacích $a_{25} - a_{36} = \overset{(1)}{a}_{25} - \overset{(1)}{a}_{36}$, $a_{36} - a_{14} = \overset{(1)}{a}_{36} - \overset{(1)}{a}_{14}$, $\quad a_{14} - a_{25} = \overset{(1)}{a}_{14} - \overset{(1)}{a}_{25}$.

Jest tedy též naopak systémem (54) určena forma

$$\overset{(1)}{A} = A - \omega\, E$$

až na číslo ω jednoznačně; ω možno voliti libovolně.

*) Viz Humbert-Lévy, Comptes rendus t. 158, p. 1609 a mé pojednání v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky roč. 48.

V následujícím zvolím za ω celé číslo $\omega_1 + e_1\, \omega_2$ (odst. 4), takže forma $\overset{(1)}{A}$ má tu vlastnost, že $NSM\ (\overset{(1)}{a}_{ik}) = e_1\ (i, k = 1, 2, \ldots 6)$, $NSM\ (\overset{(1)}{K}_{rs}) = e_1 e_2\ (r, s = 1, 2, \ldots 6)$, když $1, e_1, e_1 e_2$ znači elementární dělitele matice ($\mathfrak{M}$) (vzorec 16) utvořené pomocí koeficientů $a_{i,k}$ formy $\grave{A}$.

Podrobím-li periody $r_{i,k}$ obyčejné (nesingulárné) transformaci period Abelových funkcí, definované maticí $C = c_{rs}$ $(c_{rs} = 1, 2, \ldots 6)$, tu bude

$$C'EC = E$$

a koeficienty transformovaného systému singulárních relací vypíši z koeficientů formy transformované

$$A = C'AC$$

nebo z koeficientů formy

$$\overset{(1)}{A} = C'(A - \omega E)\ C = C'AC - \omega\ C'EC = A - \omega E$$

právě tak, jako jsme vypsali koeficienty systému (54) z koeficientů formy A resp. $A^{(1)}$.

Nejsou-li nyní všechny Abelovy funkce, jichž periody hoví singulárním relacím (54) degenerované, jest výraz

$$P\ (\lambda) = K + L\,\lambda + M\lambda^2 + \lambda^3$$

irreducibilní v těle čísel racionálných.*)

Pak můžeme najíti, způsobem v oddíle II. vytčeným, transformaci TT_1 (vzorec (53)), kterou zvolíme za C, takže matice formy $\overset{(1)}{A}$ po této transformaci bude

$$(60)\qquad \overset{(1)}{A} = \left|\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\overset{(1)}{K}}{e_1\, e_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\, e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & \dfrac{L^{(1)}}{e_1} & -\overset{(1)}{M} \\ 0 & 0 & -\, e_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\overset{(1)}{K}}{e_1\, e_2} & 0 & -\dfrac{\overset{(1)}{L}}{e_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & M^{(1)} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

*) O racionálních kořenech polynomu $\frac{J}{27} + \frac{I}{3}\,\mu - \mu^3$ atd. Rozpravy české Akademie 1920, čís. XV.

kde

$$(61)\quad \begin{cases} \overset{(1)}{K} = K + L\omega + M\omega^2 + \omega^3 \\ \overset{(1)}{L} = L - 2M\omega + 3\omega^2 \\ \overset{(1)}{M} = M + 3\omega \end{cases}$$

jsou invarianty svazku bilineárních forem

$$\overset{(1)}{A} - \lambda E$$

vzhledem k transformacím, jež nemění formy E.

Ze vzorce (57) tedy vypíšeme transormovaný systém singulárních relací

$$(62)\quad \begin{cases} \cdot + \cdot - e_1\, \tau_{33} - e_2\, \tau_{12} - \dfrac{L^{(1)}}{e_1}\tau_{22} + \overset{(1)}{M}\tau_{23} = 0 \\ e_2\, \tau_{11} - \overset{(1)}{M}\tau_{13} + \cdot + \dfrac{L^{(1)}}{e_1}\tau_{12} + \cdot - \dfrac{K^{(1)}}{e_1 e_2}\tau_{23} = 0 \\ \cdot + e_1\, \tau_{13} + \cdot + \cdot \dfrac{K^{(1)}}{e_1 e_2}\tau_{22} + \cdot = 0 \end{cases}$$

kde $\tau_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ značí nové transformované periody.*)

Máme tedy poučku:

Nedegenerují-li všechny Abelovy funkce, jichž periody splňují singulární relace (54), v Abelovy funkce méně než tří proměnných, lze najíti takovou obyčejnou (nesingulární) lineární transformaci period, že transformovaný systém singulárních relací má tvar (59).

Podotýkám zvláště, že v systému (59) schází nejen členy kvadratické, ale též členy bez proměnných.

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Piše *M. Lerch.*

(Dokončení.)

Isolujme v (II) člen $n = o$ a u ostatních užijme rozkladu

$$\varphi(c + n) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \ldots + \frac{1}{c+n-1} + \varphi(c),$$

kde $c = a + b$; vyjde

$$[\varphi(a + x) - \varphi(c)]\; [\varphi(c - a - x) - \varphi(c)]$$
$$- [\varphi(a) - \varphi(c)]\; [\varphi(c - a) - \varphi(c)]$$

*) Srv. O systémech singulárních relací . . ., Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 48., str. 43-56.