

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Bohuslav Hostinský  
O křivosti ploch druhého stupně

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 40 (1911), No. 3, 296--305

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123225>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1911

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## O křivosti ploch druhého stupně.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. Ellipsoid, jenž jest dán v soustavě pravouhlých souřadnic rovnicí

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad (1)$$

jest obsažen v soustavě konfokálních ploch druhého stupně:

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda} = 1, \quad (2)$$

kde  $\lambda$  značí proměnný parametr.

O konstantách  $a, b, c$  předpokládám, že vyhovují podmínce

$$a > b > c > 0. \quad (3)$$

Rovnice (2) jest pro obecný bod  $(x, y, z)$  prostoru vzhledem k  $\lambda$  třetího stupně. Leží-li bod  $(x, y, z)$  na ellipsoidu (1), jak budeme předpokládati, má (2) jeden kořen rovný nulle; druhé dva kořeny  $u, v$  jsou elliptické souřadnice na povrchu ellipsoidu \*).

Vyjádříme-li, že rovnice (2) jest splněna pro  $\lambda = u$  a pro  $\lambda = v$ , obdržíme dvě rovnice, které spolu s (1) určují  $x, y$  a  $z$  jako funkce parametrů  $u, v$ . Tak odvodíme známé vzorce

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{a(a+u)(a+v)}{(a-b)(a-c)} \\ y^2 &= \frac{b(b+u)(b+v)}{(b-a)(b-c)} \\ z^2 &= \frac{c(c+u)(c+v)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned} \right\} (4)$$

ve kterých jsou pravé strany kladné, omezíme-li  $u$  a  $v$  podmínkami

$$-a \leq u \leq -b \leq v \leq -c. \quad (5)$$

\*) O konfokálních plochách druhého stupně a o souřadnicích elliptických jednají spisy: *Lamé*: Leçons sur les coordonnées curvilignes; *Salmon-Fiedler*: Analyt. Geom. des Raumes I. *Darboux*: Leçons sur les systèmes orthogonaux; *Kirchhoff*: Mechanik; *Staudé*: Analyt. Geom. des Punktepaars etc. a j.

Za těchto podmínek podávají rovnice (4) parametrické vyjádření jednoho oktantu ellipsoidu, volíme-li na př. všechny odmocniny ( $x$ ,  $y$  a  $z$ ) kladně.

Budiž dále  $R_1$  hlavní poloměr křivosti, patřící ke křivoznačné čáře

$$v = \text{const.}$$

a  $R_2$  druhý hlavní poloměr křivosti patřící k druhé křivoznačné čáře

$$u = \text{const.}$$

a položme

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

2. Derivace dle  $u$  a dle  $v$  budeme označovat indexy  $u$  resp.  $v$ ; zavedeme-li známé zkratky \*)

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

vypočítáme z rovnic (4) snadno, že

$$E = \frac{(u-v)u}{4(a+u)(b+u)(c+u)}, \quad G = \frac{(v-u)v}{4(a+v)(b+v)(c+v)}.$$

K výpočtu křivosti plochy jest nutno zavést ještě t. zv. veličiny druhého řádu  $L$  a  $N$  definované rovnicemi.

$$\sqrt{EG} \cdot L = \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad \sqrt{EG} \cdot N = \begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix};$$

jejich hodnoty jsou

$$L = \frac{abc(u-v)}{4(a+u)(b+u)(c+u)\sqrt{uv}},$$

$$N = \frac{abc(v-u)}{4(a+v)(b+v)(c+v)\sqrt{uv}}.$$

\*) Užívám všude označení Scheffersova (Einführung in die Theorie der Flächen; viz str. 501, kde jest přehled formulí pro případ, že  $u$  a  $v$  jsou parametry křivoznačných čar).

Dle známých vzorců jest (cf. Scheffers l. c.)

$$H = \frac{EN + GL}{EG} = \sqrt{\frac{abc}{uv}} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \quad (6)$$

$$K = \frac{LN}{EG} = \frac{abc}{u^2v^2} \quad (7)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{abc}{uv}} \quad (8)$$

Odmocniny jest voliti tak, aby  $H$ ,  $K$ ,  $R_1$  a  $R_2$  vyšly kladně.

3. Z rovnic (8) vyplývá, že

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = \frac{\partial R_2}{\partial v} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{uv}{abc}}.$$

Funkce  $F(u, v)$ , která souvisí s křivostí  $K$  jednoduchým vztahem

$$F(u, v) = \frac{2}{3\sqrt[4]{abc}} \cdot K^3 = \frac{2}{3} \frac{(uv)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{abc}},$$

má tedy tu vlastnost, že její první derivace rovnají se hlavním poloměřům křivosti:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = R_1, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = R_2.$$

4. Přikročme nyní k hlavní úloze této práce: vyšetřiti *čáry konstantní křivosti* na ellipsoidu, t. j. křivky, podél kterých křivost má stálou hodnotu  $K$ .

Položme

$$k = \sqrt{\frac{abc}{K}}, \quad (9)$$

rovnice (7), která nabývá tvaru

$$uv = k, \quad (10)$$

jest již rovnicí hledaných čar; eliminujeme-li touto rovnicí  $v$  z rovnic (4), obdržíme formule vyjadřující souřadnice  $x$ ,  $y$ ,  $z$  jako funkce parametru  $u$ . Jestliže pak eliminujeme  $u$  z některých dvou těchto formulí, obdržíme projekce hledaných čar do hlavních rovin ellipsoidu. K diskusi nám stačí průměty do

rovin  $xy$  a  $xz$  (jež se protínají v nejdelší ose ellipsoidu); nanačným postupem odvodíme snadno rovnice těch průmětů:

$$z = 0, \frac{x^2}{\frac{a(ab-k)}{b(a-c)}} + \frac{y^2}{\frac{b(ab-k)}{a(b-c)}} = 1; \quad (11)$$

$$y = 0, \frac{x^2}{\frac{a(ac-k)}{c(a-b)}} + \frac{z^2}{\frac{c(ac-k)}{a(c-b)}} = 1. \quad (12)$$

Tedy:

*Čáry konstantní křivosti na ellipsoidu jsou prostorové křivky čtvrtého stupně; průměty jejich do hlavních rovin ellipsoidu jsou koncentrické homothetické kuželosečky.*

Vzorci (11) a (12) lze snadno přehlédnouti průběh těch čar. Vyjděme od vrcholu  $C(0, 0, \sqrt{c})$ , jež má elliptické souřadnice

$$u = -a, \quad v = -b,$$

a v němž křivost má minimum  $K_c$  dané rovnicí

$$K_c = \frac{c}{ab}.$$

Uvážíme-li, že maximální křivost  $K_a$  jest ve vrcholu  $A(\sqrt{a}, 0, 0)$ , jež má elliptické souřadnice

$$u = -b, \quad v = -c,$$

a že tedy

$$K_a = \frac{a}{bc},$$

vidíme, že parametr  $k$  daný rovnicí (9) klesá z největší hodnoty  $ab$  až na nejmenší hodnotu  $bc$ , když křivost roste od  $K_c$  do  $K_a$ .

Nechť z počátku jest  $k$  málo menší než  $ab$ ; křivky (11) jsou malé elipsy, které se zvětšují s klesajícím  $k$ , až pro

$$k = ac \quad (13)$$

obdržíme elipsu, která se dotýká ellipsoidu ve vrcholech  $B(0, \pm\sqrt{b}, 0)$  a leží celá uvnitř ellipsoidu. Zmenšuje-li se  $k$  ještě dále, protínají elipsy (11) ellipsoid ve čtyřech reálných bodech; dosáhne-li konečně  $k$  svrchu uvedené minimální hod-

noty, dotýká se ellipsa (11) ellipsoidu ve vrcholech  $A(\pm\sqrt{a}, 0, 0)$  a probíhá mimo tyto dva body dotyku celá vně ellipsoidu.

Křivky (12) jsou hyperboly o společných asymptotách; je-li  $k > ac$ , jest  $Oz$  jejich reální osou, je-li  $k < ac$ , jest reální osou  $Ox$ .

V případě (13) redukuje se hyperbola na ony asymptoty.

Průběh čar konstantní křivosti možno dle toho naznačiti asi tak: Křivky konstantní křivosti tvoří v blízkosti vrcholů  $A$  a  $C$ , kde má křivost maximum, resp. minimum nekonečně malé ovály, které se zvětšují, vzdalujeme-li se od řečených dvou vrcholů; společný mezní tvar ovalů jsou dvě ellipsy, které se křížují ve vrcholech  $B$  ellipsoidu. Podél těchto dvou ellips má ellipsoid konstantní křivost  $K_b$  danou vzorcem

$$K_b = \frac{b}{ac}.$$

5. Jedná-li se o vyšetření čar konstantní křivosti na hyperboloidu jednodílném n. dvojdílném, stačí pozměniti přiměřeně podmínky (3) a (5); tak lze všechny předchozí výpočty a úvahy přizpůsobiti nové úloze. Věta o průmětech čar konstantní křivosti do hlavních rovin, vyslovená v předešlém odstavci, platí patrně i pro hyperboloidy.

Diskuse reálních tvarů by neobsahovala nic podstatně nového; proto ji zde pomíjím.

6. Vyšetřme ještě čáry konstantní křivosti na paraboloidu

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2z = 0; \quad (14)$$

předpokládati budu paraboloid elliptický a to

$$a > b > 0. \quad (15)$$

Elliptické souřadnice  $u, v$  na paraboloidu (14) jsou určeny rovnicí

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + 2z - \lambda = 0, \quad (16)$$

kteřá představuje konfokální paraboloidy, jest třetího stupně v  $\lambda$  a má, je-li  $(x, y, z)$  bod paraboloidu (14), kořeny  $0, u, v$ .

Podobně jako dříve odvodíme vzorce

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{a(a+u)(a+v)}{b-a} \\ y^2 &= \frac{b(b+u)(b+v)}{a-b} \\ 2z &= a+b+u+v, \end{aligned} \right\} (17)$$

které vyjadřují parametricky jeden kvadrant paraboloidu, jsou-li parametry  $u$  a  $v$  jsou omezeny podmínkami

$$-\infty \leq u \leq -a \leq v \leq -b. \quad (18)$$

7. Poněvadž  $u$  a  $v$  jsou opět parametry křivoznačných čar, můžeme počítati křivost právě tak, jako v odst. 2. Provedeme-li výpočet veličin  $E$ ,  $F$ ,  $L$  a  $N$  na základě vzorců (17), dojdeme k následujícímu zajímavému výsledku:

*Veličiny  $E$ ,  $F$ ,  $L$  a  $N$  pro paraboloid obdržíme, jestliže ve vzorcích odst. 2., které vyjadřují obdobné veličiny pro elipsoid, prostě vynecháme faktory*

$$c, c+u, c+v.$$

Místo rovnic (b) až (8) budeme dle toho míti pro paraboloid (17)

$$H = \sqrt{ab} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right), \quad K = \frac{ab}{u^2 v^2},$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{ab}{uv}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{ab}{uv}},$$

a podobně, jako v odst. 3.,

$$R_1 = \frac{\partial F}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial F}{\partial u},$$

kde jest položeno

$$F(u, v) = \frac{2}{3\sqrt[4]{ab}} \cdot K^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \frac{(uv)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{ab}}.$$

8. Čáry konstantní křivosti možno určiti podobně jako v odst. 4.

Průměty jejich do souřadnicových rovin jsou

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{\frac{a}{b}(k-ab)} + \frac{y^2}{\frac{b}{a}(k-ab)} = 1, \quad (19)$$

$$x = 0, \quad y^2 = \frac{2b^2}{a-b}z + \frac{b(k-ab)}{a-b} \quad (20)$$

$$y = 0, \quad x^2 = \frac{2a^2}{b-a}z + \frac{a(k-ab)}{b-a}; \quad (21)$$

parametr  $k$  jest určen rovnicí

$$k = \sqrt{\frac{ab}{K}},$$

která ukazuje, v jakých mezích jest  $k$  obsaženo: vzdalujeme-li se od vrcholu

$$u = -a, v = -b,$$

kde nabývá křivost maximální hodnoty  $\frac{1}{ab}$ , ubývá křivosti; v nekonečnu jest křivost rovna nulle. Z toho následuje, že  $k$  roste od  $ab$  do nekonečna.

Rovnice (19) až (21) interpretujeme geometricky takto:

*Čáry konstantní křivosti na elliptickém paraboloidu promítají se do tečné roviny vrcholové jako koncentrické homothetické ellipsy; do roviny souměrnosti paraboloidu promítají se jako shodné paraboly o společné ose.*

Srovnajme ještě paraboly (20) a (21) s řezy paraboloidu rovinami  $yz$  a  $xz$ :

$$\begin{aligned} x = 0, y^2 &= -2bz, \\ y = 0, x^2 &= -2az; \end{aligned}$$

vzhledem k podmínce (15) jest patrné, že paraboly (20) v rovině  $yz$  jsou obráceny k vrcholu paraboloidu stranou konkávní, kdežto paraboly (21) v rovině  $xz$  jsou k němu obráceny stranou konvexní; průseky parabol (20) a (21) s paraboloidem jsou vždy reální.

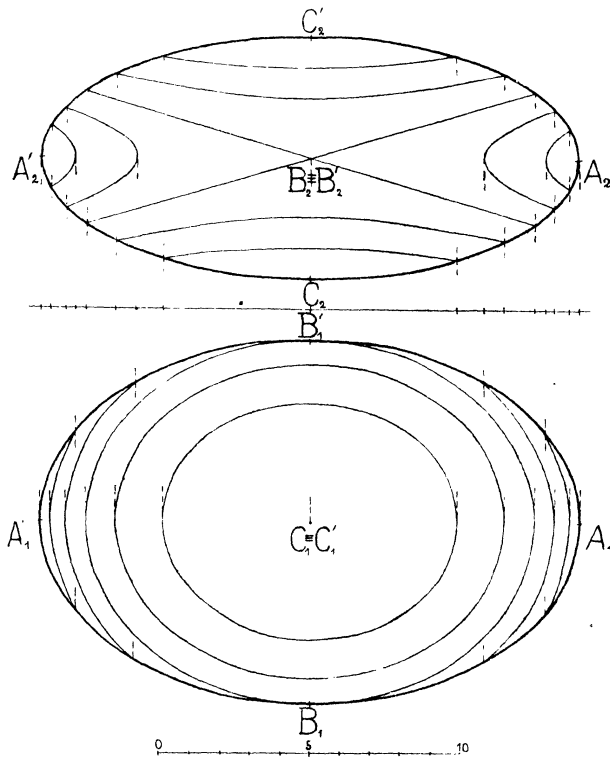
Jest samozřejmo, že analogické úvahy vedly by v případě paraboloidu hyperbolického k podobným výsledkům.



Průběh čar konstantní křivosti jest pro dvě speciální plochy druhého stupně znázorněn připojenými obrázky.

Obr. 1. představuje průměty čar konstantní křivosti na ellipsoidu

$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 1$$

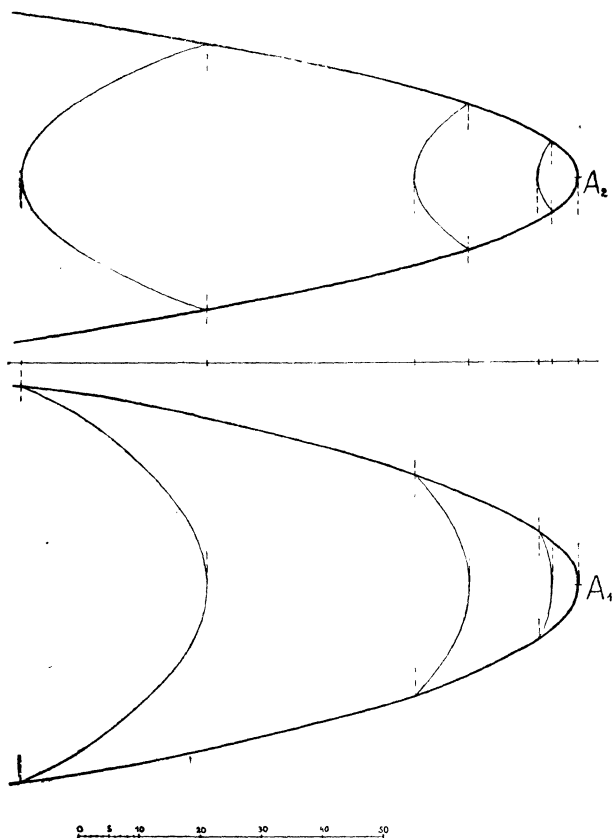


Obr. 1.

do rovin  $xy$  (v dolní části obrazce),  $xz$  (v hořejší části) a příslušné obrisy ellipsoidu. Zobrazeno jest celkem 7 čar; hodnoty křivosti  $K$  na těchto čarách byly voleny tak, že mezi maximální a minimální hodnotu křivosti bylo interpolováno pět členů

tvořících s nimi řadu geometrickou:

0·140 ... , 0·081 ... , 0·047 ... , 0·027 ... , 0·016 ... , 0·009 ... ,  
0·005 ...



Obr. 2.

První a poslední čára jsou utvořeny páry bodovými  $A, A'$  resp.  $C, C'$ ; čtvrtá čára jsou dvě ellipsy, křižující se ve vrcholech  $B$  a  $B'$ .

Obr. 2. představuje průměty čar konstantní křivosti na paraboloidu

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + 2z = 0$$

do rovin  $xz$  (v dolejší části obrazce),  $yz$  (v hořejší části) a příslušné obrysy paraboloidu. Mimo vrchol  $A$ , kde jest maximální křivost  $= \frac{1}{6}$ , jsou zobrazeny tři čáry, na nichž má křivost hodnoty

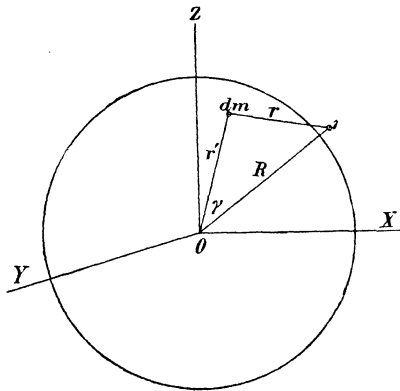
$$\frac{1}{60}, \frac{1}{600} \text{ a } \frac{1}{6000}.$$

## O geometrických a fysikálních methodách k určení parallaxy sluneční.

Dr. Karel Vodička.

(Pokračování.)

*Sploštění země z pokusů kyvadlových.* Při theoretickém výpočtu tíže vyjdeme z okolnosti, že gravitační pole zemské má centrum svoje v těžišti, které tedy při výpočtu potenciálu  $W$



Obr. 3.

zvolíme za počátek souřadnicového systému. Pak měž element zemský  $dm$  ve vzdálenosti  $r'$  od těžiště souřadnice  $x, y, z$ , bod potenciálový pak ve vzdálenosti  $R$  v blízkosti povrchu země souřadnice  $\xi, \eta, \zeta$  (obr. 3.). Vzdálenost bodu potenciálového od elementu  $dm$  budiž  $r$  a úhel  $\widehat{Rr'}$  budiž  $\gamma$ .