Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O přítažnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 213--220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123241

Dle toho lze i jiné relace transcendenty ψ ustanoviti a tedy i součet řad a tudíž i tvary integrálů logarithmických.*) *Hill***) pojednává o transcendentě $\lambda(x)$, kterou *Landen* podal a *Legendre*†) dokázal a která souvisí s funkcí ψ_2 rovnicí

$$\lambda(x) = -\psi_2(1-x).$$

Jako pro elliptické integrály a pro funkci gamma sestrojil tabulky *Legendre* ve svém „Traité de fonctions *elliptiques*", *Kramp* ve své „Analyse des réfractions astronomiques" pro transcendentu $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$ a *Soldner* pro svůj integrální logarithmus, podobně sestavil *Hill* pro transcendentu $\lambda(x)$ hodnoty.

O přítažnosti.

(Napsal Dr. *F. J. Studnička.*)

K nejdůležitějším zjevům přírodním patří zajisté úkazy, jichž příčinu představuje síla přítažná, *přítažnost* neb *attrakce;* jestiť síla tato duší všehomíra, řídíc všechny pohyby těles světových tak správně a bezpečně, že na tisíce let nazpět i ku předu můžeme fáse těchto pohybů zcela určitě počítati a udávati. Od té doby, co se poznala příčina těchto zjevů, co byly vyzpytovány zákony, jimiž se tato síla řídí, od té doby počíná se rozvíjeti fysická astronomie, od té doby ujímá a rozšiřuje se fysikální názor světa.

---

*) Integrály funuce $l\,[1 \pm \varphi(x)]$ ve spojení s funkcí algebraickou x v mezích $0 \ldots 1$, nazval *Legendre* ve svém „Traité de fonct. ellipt." *Eulerovými.* — Tvary těchto integrálů měly by se nyní nazývati *transcendenty Eulero-Legendrovými* neboť *Legendrem* obdržely patřičného významu. — Též tak zvané *funkce cylindrické* neměly by se nazývati pouze *Besselovými*, poněvadž *Fourier* je vynalezl a *Bessel* rozšířil a tudíž měly by slouti právem *Fouriero-Besselovými.*

**) Crelle Journal, Bd. 3.

†) Exercices de calc. int.

Již někteří řečtí učenci jako *Anaxagoras*, *Diogenes z Apollonie*, *Plato*, *Joannes Philoponos* a j. v. měli dosti jasný pojem o všeobecné přítažnosti; již *Koprník* vyslovil zcela zřejmě „gravitatem non aliud esse quam appetentiam quandam naturalem partibus inditam ... ut in unitam integritatemque suam sese conferant in formam globi coëuntes“; ba již *Kepler* vysvětloval touto silou odliv a příliv moře a tušil i závislost její působivosti na čtverci vzdálenosti, v čemž *Robert Hooke* s ním souhlasil: avšak teprv *Newton* vyměřil pojem tento přesně, vyjádřiv přítažnost p, jakouž působí bod m na hmotný bod m' ve vzdálenosti d postavený, vzorcem

$$p = k\frac{mm'}{d^2}, \tag{1}$$

kdež značí k míru přítažnosti; neb jako délku nelze než délkou měřiti, možná přítažnost měřiti jen přítažností, při čemž zvolena za jedničku přítažnost mezi dvěma body hmotou 1 opatřenými a ve vzdálenosti 1 od sebe položenými, což ze vzorce (1) patrno, učiníme-li $m = m' = 1$, $d = 1$.

A tímto jednoduchým výměrem stala se přítažnost mathematickému badání přístupnou, tímto výměrem mathematickým stala se z astronomie fysické mechanika nebes. Jako vypočítá se snadno, mnoho-li úroků vynese kapitál v určité době při určitém úročení, podobně vypočítá se nyní snadno, kde se octne v jistém čase hmotný bod, vrhne-li se určitým směrem do prostoru ovládaného jistým středem přítažnosti.

Poněvadž síla tato jest tak důležitou pro poznání přírody vůbec a některých velikolepých zjevů zvlášť, nutno jí věnovati při vyučování fysikálním i na středních školách pozornost co možná největší; neb co jiného má pro celý život utkvěti v paměti studujícího nežli poznání všech důležitějších zjevů přírodních?

Ptáme-li se však, mnoho-li se v knihách pro střední školy sepsaných o tomto předmětu vykládá, zní odpověd velmi smutně; obsahujeť na př. rozšířená fysika, již *Pisko* pro vyšší gymnasia a reálné školy sepsal a *Klika* přeložil, o tomto předmětu jenom 29 řádek (pag. 75.), kteréž nejsou ani tak stilisovány, aby z nich žák mohl nabýti jasného ponětí o jednom jen zákonu, ba kteréž mu i nepravé závěrky podávají.

Nelze sice upříti, že bez vyšší mathematiky nedá se vniknouti dokonale do theorie attrakce a že tedy není možná na středních školách ji všeobecně vykládati; nelze však též upříti, že některé zákony a to právě ty nejdůležitější bez větších vědomostí, nežli jaké mají žáci našich středních škol, možná dosti jasně a jednoduše vyvinouti.

Již *Baumgartner*, *Ettingshausen* a *Kuncek* snažili se bez upotřebení vyšší mathematiky provésti mnoho důkazů fysikálních a po nich u nás — zahraničné spisy nemáme tu na zřeteli, poněvadž nebyly do škol uvedeny — pokoušeli se i jiní, aby touto cestou přišli k cíli; někde se podařil pokus velmi dobře, jinde jen špatně, což ale nezáviselo vždy na předmětu, o němž se jednalo, nýbrž na spůsobu, jakým se s ním nakládalo.*) Zejmena co se tkne důkazu zákona fundamentálního z nauky o přítažnosti, jejž *Newton* první provedl v klassickém spisu svém „Philosophiae naturalis principia mathematica" (Prop. LXXIII. cor. 2), nelze nazvati dosavadní provedení šťastným; jest příliš dlouhé a umělé, což po Kunckovi uznali všichni tím, že ho vynechali ve spisech školních a nahradili krátkým rozumováním, kteréž na př. u Kliky resp. Piska dosti nešťastně dopadlo; jen *Lang* ve své důkladné, ač suchopárně psané knize „Einleitung in die theoretische Physik" se ho ještě (pag. 92) přidržel.

Podlé spůsobu, jakým se u nás školní knihy sepisují a do škol zavádějí, nelze očekávati, že se nám dostane brzy důkladnější školní fysiky, zejména pro vyšší třídy středních škol, pročež upozorňujeme tuto aspoň čtenáře těchto listů na velmi jednoduché a při tom přesné důkazy, jaké o některých poučkách sem připadajících vedeny jsou ve spisu *Thomsona* a *Taita*, o němž jsme v předešlém sešitu podali zprávu; snad si jich povšimne a jich i použije budoucí spisovatel české fysiky!

Jednáť se tu o přítažnost kulové plochy hmotné na bod hmotný kde koli položený. Aby tu zákony příslušné jednoduchými prostředky odůvodnil, vykládá spisovatel napřed některé geometrické výměry a poučky těm, kdož by jich snad neznali, a sice tyto:

---

*) Srovnej: „O duchu mathematickém." Časop. pro pěstov. math. a fys. R. II. pag. 64.

1. Pohybuje-li se přímka v prostoru podél dané křivky nějaké tak, že stále prochází daným bodem, jest stopa její v prostoru *plochou kuželovou* neb krátce *kuželem*; daný bod tento jest pak *vrcholem* kužele.

2. Je-li křivka, podlé níž se přímka pohybuje, jednoduše uzavřenou, povstává kužel *úplný*, kterýž se patrně skládá ze dvou ploch proti sobě ležících a vrcholem spojených. Protneme-li tedy takovýto kužel plochou kulovou, jejíž střed leží v jeho vrcholi, obdržíme co průsek dvě shodné křivky uzavřené; ploské obsahy takovýchto křivek rozličnými koulemi vykrojených mají se k sobě jako čtverce poloměru příslušných koulí.

3. Poměr ploského obsahu takové kuželem nějakým na kouli vykrojené plochy p k čtverci příslušného poloměru r jmenuje se tu *úhlem kuželovým* (Kegelecke); jest tedy

$$\omega = \frac{p}{r^2}; \qquad (2)$$

dvě protilehlé úplné kuželové plochy mají tudíž společný úhel kuželový ω.

4. Součet všech kolem daného bodu ležících úhlů kuželových jest tudíž 4π; neb ze vzorce (2) jde

$$\Sigma\omega = \frac{\Sigma p}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi, \qquad (3)$$

jelikož Σp značí povrch koule. A poněvadž úplnému kuželi odpovídají dva shodné výkrojky, bude součet kuželových úhlů všech úplných kuželů 2π.

5. Vedeme-li vrcholem úplného kužele rovinu tak, že jej protne, obdržíme co průsek dvě přímky; a jestli úhel, jejž tyto přímky při jakémkoli položení roviny uzavírají, nesmírně neb nekonečně malý, sluje kužel ten *elementárním.*

6. Koule, jejíž střed leží na vrcholi elementárního kužele, protíná jeho plochu *v pravém úhlu* neb *orthogonálně;* totéž platí i o libovolné ploše, dotýká-li se koule tu, kde protíná kužel. Každý jiný řez jest *šikmý;* úhel pak, jejž uzavírá řez orthogonální s řezem šikmým, měří *šikmost* tohoto řezu.

7. Ploský obsah pravoúhlého řezu p kužele elementárního možná považovati za průmět řezu šikmého q, z čehož jde

$$p = q \cos\alpha,$$

značí-li tu α šikmost; a použijeme-li vzorce (2), bude konečně

$$q = \frac{\omega r^2}{\cos\alpha}, \tag{4}$$

což značí, že *ploský obsah řezu šikmého tu obdržíme, násobíme-li kuželový úhel čtvercem příslušného poloměru koule a dělíme-li kosinusem šikmosti.*

Znajíce tyto geometrické věty, můžeme přikročiti k vyšetření dvou hlavních zákonů o přítažnosti platících.

I.

Abychom určili přítažnost kulové plochy stejnoměrně hmotou pokryté na hmotný bod uvnitř plochy se nacházející, považujme bod ten P (obr. 26.) za vrchol elementárního kužele, kterým vykrojeny na kouli plošky průřezu AB a $A'B'$, jež krátce nazveme q a q'. Šikmý tento řez kužele vyjádříme pomocí vzorce (4)

$$q = \omega \frac{\overline{PA}^2}{\cos\alpha}, \quad q' = \omega \frac{\overline{PA'}^2}{\cos\alpha},$$

kdež $\alpha = \sphericalangle PAC = PA'C$ co kuželový úhel vrcholu P a řezu q; i bude přítažnost plošky q a q' na bod P, označíme-li ji krátce p a p', podle vzorce (1)

$$p = \frac{k\varrho q}{\overline{PA}^2} = k\varrho \frac{\omega}{\cos\alpha},$$

$$p' = \frac{k\varrho q'}{\overline{PA'}^2} = k\varrho \frac{\omega}{\cos\alpha},$$

kdež ϱ jest hmota na jednotku plochy připadající, z čehož pak jde na jevo, že

$$p = p';$$

a jelikož obě síly stejné jsouce mají tu směr protivný, bude výslednice 0.

Co platí o tomto elementárním kuželi, platí o každém jiném, majícím vrchol v bodu P, z čehož poznáváme, že *přítažnost hmotné kulové plochy na hmotný bod uvnitř se nacházející jest 0.*

Totéž platí o duté kouli, skládající se z vrstev stejnoměrných hutností, leží-li bod uvnitř dutiny.

II.

Abychom určili přítažnost kulové plochy stejnoměrně hmotou pokryté na hmotný bod mimo plochu ležící, spojme bod ten P (obr. 27.) se středem koule C, při čemž protne přímka CP kouli v bodu D; na to vyhledejme na přímce CP čtvrtý bod O tak, aby

$$CO : CD = CD : CP, \tag{5}$$

a považujme bod O za vrchol elementárního kužele, kterým vykrojeny na kouli plošky průřezu AB a $A'B'$, jež opět nazveme q a q', takže

$$q = \omega \frac{\overline{OA}^2}{\cos\alpha}, \quad q' = \omega \frac{\overline{OA'}^2}{\cos\alpha}.$$

Přítažnost plošky q a q' na bod P bude tedy, použijeme-li dřívějšího označení,

$$p = \frac{k\varrho q}{AP^2} = \frac{k\varrho\omega}{\cos\alpha}\left(\frac{OA}{AP}\right)^2,$$

$$p' = \frac{k\varrho q'}{A'P^2} = \frac{k\varrho\omega}{\cos\alpha}\left(\frac{OA'}{A'P}\right)^2;$$

ze srovnalosti (5) jde však na jevo, že

$$\Delta COA \sim CAP, \quad \Delta COA' \sim CA'P,$$

jest tedy, značí-li a poloměr koule a d vzdálenost CP, $\sphericalangle APC = A'PC = \alpha$ a

$$\frac{OA}{AP} = \frac{CA}{CP} = \frac{a}{d} = \frac{CA'}{CP} = \frac{OA'}{A'P},$$

z čehož patrno, dosadíme-li tyto hodnoty do vzorců předcházejících, že i tu

$$p = p'.$$

Rozložíme-li pak síly p a p' na složky směrem CP a kolmo na tento směr působící, totiž p na PQ a QR a p' na PQ a QR', poznáme, že QR a QR' co stejné opačným směrem působící síly se ruší, PQ a PQ se však co síly stejného směru sečítají; výslednice bude tedy

$$v = 2p\cos\alpha$$

aneb použijeme-li předešlých rovnic

$$v = 2k\varrho\omega\frac{a^2}{d^2}.$$

Vedeme-li tedy bodem O všechny možné elementární kužele, vyčerpáme tím celou plochu kulovou, $\Sigma\omega$ tu bude podlé předešlého 2π, Σv pak přítažností celé kulové plochy V, takže z posledního vzorce povstane

$$\Sigma v = V = 4k\pi\varrho\frac{a^2}{d^2}$$

aneb považíme-li, že tu jest $4\pi\varrho a^2 = M$,

$$V = k\frac{M}{d^2}, \qquad (6)$$

kdež M značí hmotu celé plochy kulové.

Ze vzorce (6) jde na jevo, že *přítažnost hmotné plochy kulové na hmotný bod mimo ni postavený jest tak veliká jako kdyby celá hmota této koule byla v jediný bod sestředěna a do středu koule postavena.*

A poněvadž hmotnou kouli, při níž stejnoměrná hutnost jednotlivých vrstev se řídí vzdáleností jejich od středu, možná považovati za soubor hmotných kulových ploch, bude i přítažnost na bod mimo kouli postavený tak velká, jako kdyby celá hmota koule byla v jediný bod sestředěna a do středu koule postavena.

III.

Abychom určili přítažnost kulové plochy stejnoměrně hmotou pokryté na velmi malou plošku neb *prvek* plošný σ v poloze P (obr. 28.) na kouli se nacházející, považujme P za vrchol elementárního kužele, který vykrojí na kouli plošku q průřezu AB, k níž patří kuželový úhel ω; plocha tohoto řezu bude podlé vzorce (4)

$$q = \omega\frac{\overline{PA}^2}{\cos\alpha}.$$

Poněvadž plošce σ odpovídá hmota $\varrho\sigma$, bude přítažnost p plošky q na plošku σ podlé vzorce (1)

$$p = k\frac{\varrho q \varrho\sigma}{\overline{PA}^2} = k\frac{\varrho^2\sigma\omega}{\cos\alpha}$$

a složka směrem CP působící bude tedy

$$v = k\varrho^2\sigma\omega.$$

Vedeme-li ku kouli bodem P tečnou rovinu, budou elementární kužele vesměs na jedné straně její ležeti, $\Sigma\omega$ bude tudíž

2π, tak že přítažnost celé koule na plošku σ podlé toho jest

$$V = 2\pi\, k\, \varrho^2\, \sigma\,. \qquad (7)$$

Kdybychom ve vzorci (6) položili $d = a$, obdrželi bychom

$$V_a = 4\pi\, k\, \varrho \text{ a tudíž } V = {}^1/_2 V_a\, \varrho\, \sigma\,, \qquad (8)$$

z čehož jde na jevo, že *přítažnost kulové plochy stejnoměrně hmotou pokryté na prvek jejího povrchu jest o polovičku menší nežli přítažnost na bod nekonečně blízko nad povrchem ležící, v němž soustředěna jest hmota prvku jmenovaného.*

Střed hmotné kulové plochy i koule z vrstev stejnoměrných hutností se skládající jest tudíž *středem přítažnosti* a koule tudíž tělesem *centrobarickým.*

O dalších výsledcích z těchto zákonů plynoucích netřeba tuto se zmiňovati.

Barometrické měření výšky.

(Podává dr. *Fr. Hejslar.*)

Účelem těchto řádků jest vyvinouti jednoduše a zároveň přesně vzorec, jenž k barometrickému měření výšky obyčejně slouží a v knihách školních také s více méně jasným výkladem se uvádí.

Pokládajíce všechny vrstvy vzduchové za stejně oteplené a opírajíce se o zákon, že expanse vzduchu do výše geometricky ubývá, jestliže výše této arithmeticky přibývá, nabudeme známým spůsobem pro *absolutní* [1]) výšku H výrazu

$$H = \frac{h}{\log k}\,(\log B_r - \log B_u)\,,$$

v němž značí h výšku vodorovné vrstvy vzduchové, B_r výšku

---

[1]) Výška nějaké vrstvy vzduchové nad jinou slove *relativní,* nad hladinou mořskou *absolutní.*